VISIT…

LANZAROTE Caliente.COM

АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА ССР

ИНСТИТУТ ИСТОРИИ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ И ТЕХНИКИ

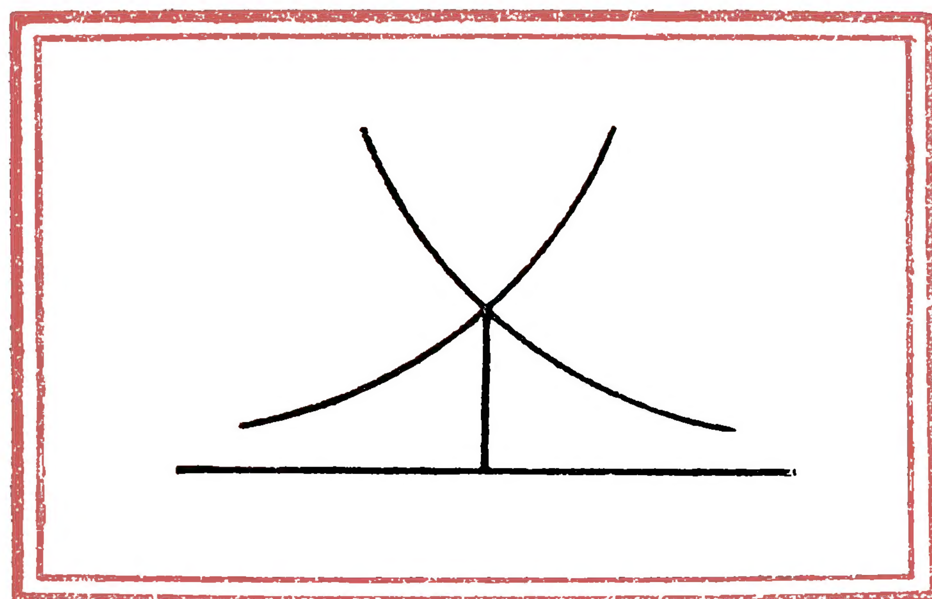
КЛАССИКИ НАУКИ



Н. И. ЛОБАЧЕВСКИЙ

ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ ПО ГЕОМЕТРИИ

РЕДАКЦИЯ
АКАДЕМИКА П. С. АЛЕКСАНДРОВА,
Б. Н. ДЕЛОНЕ И П. К. РАШЕВСКОГО
КОММЕНТАРИИ
В. Ф. КАГАНА, А. П. НОРДЕНА,
Б. Л. ЛАПТЕВА И В. Г. БОЛТЯНСКОГО



ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА · 1956

СЕРИЯ «КЛАССИКИ НАУКИ»
Серия основана академиком *С. И. Вавиловым*

Редакционная коллегия:
академик *И. Г. Петровский* (председатель),
академик *Н. Н. Андреев*, академик *К. М. Быков*, академик *Б. А. Казанский*,
академик *О. Ю. Шмидт*, академик *Д. И. Щербаков*, академик *П. Ф. Юдин*,
член-корр. АН СССР *Б. Н. Делоне*, член-корр. АН СССР *Х. С. Коштоянц*,
член-корр. АН СССР *А. М. Самарин*, проф. *Д. М. Лебедев*,
проф. *Н. А. Фигуровский*, канд. филос. наук *И. В. Кузнецов*
(заместитель председателя)

ОТ РЕДАКЦИИ

В феврале 1956 года исполнилось сто лет со дня смерти великого русского математика Николая Ивановича Лобачевского и сто тридцать лет существования созданной им геометрической системы.

В настоящее, юбилейное издание, выпускаемое в связи с этой датой, включены три сочинения Н. И. Лобачевского: «Геометрические исследования по теории параллельных линий», «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных» и «Воображаемая геометрия». Эти работы были выбраны потому, что они в основном содержат все геометрические изыскания великого математика и, таким образом, позволяют составить полное представление о том, что было им создано в области геометрии. Вместе с тем каждая из этих трех работ имеет свои существенные особенности.

Первая из помещаемых работ («Геометрические исследования») была выпущена Н. И. Лобачевским в свет в 1840 г., после того как им были уже опубликованы наиболее крупные геометрические сочинения, в том числе «Новые начала» и «Воображаемая геометрия». Эти крупные сочинения замечательного геометра совершенно не были поняты математиками того времени. Тогда Н. И. Лобачевский пришел к мысли дать краткое, но доступное изложение основных начал созданной им «воображаемой» геометрии. Это и было осуществлено в сочинении «Геометрические исследования», написанном с удивительным искусством. Опубликованное в 1840 г. на немецком языке, оно затем было переведено на английский и французский языки и

неоднократно переиздавалось. «Геометрические исследования»— это такое введение в «воображаемую» геометрию, которое, по замыслу Н. И. Лобачевского, должно сделать доступным изучение остальных, труднее изложенных его сочинений. Именно с этой работы целесообразно начать изучение геометрических сочинений Лобачевского в подлиннике.

После изложения нескольких применяемых в дальнейшем теорем (предложения 1—15), доказываемых без помощи V постулата, Лобачевский излагает в «Геометрических исследованиях» свою теорию параллелей (предложения 16—25). На основе этой (неэвклидовой) теории параллелей проводится изучение предельных линий и поверхностей (теоремы 28—34); в частности, доказывается замечательная теорема о том, что на предельной поверхности действует эвклидова геометрия. В заключительной части работы содержится неэвклидова тригонометрия и основная формула, выражающая угол параллельности.

Сочинение «Новые начала» изложено значительно подробнее, чем другие сочинения Н. И. Лобачевского. Однако оно содержит много материала, чуждого «воображаемой» геометрии; печатание его растянулось на четыре года, и это не содействовало усвоению новой геометрии. Изложение «воображаемой» геометрии в этой работе сходно с тем, которое дано в «Геометрических исследованиях», отличаясь несколько большей подробностью. Кроме основ неэвклидовой геометрии, «Новые начала» содержат (главы I—VI) оригинальное изложение основного начального геометрического материала, в корне отличающееся от изложения в «Началах» Эвклида.

Главы XII и XIII составляют, по существу, работу, не связанную с первыми главами, и не включены в настоящее издание; глава XII посвящена решению прямолинейных треугольников в эвклидовой геометрии, глава XIII — решению сферических прямоугольных треугольников. Основная задача, которую себе ставит Н. И. Лобачевский, заключается в том, чтобы установить степень точности логарифмических вычислений, которыми сопровождается «решение треугольников».

Следует отметить, что вопросы измерения площадей прямолинейных многоугольников и объемов простейших многогранников не рассматриваются Лобачевским в этой работе, хотя должны были войти в нее, что видно из ряда мест (см. последний раздел «Вступления», ст. 2, ст. 8, ст. 9 и др.). В связи с этим в настоящее издание включен отрывок из сочинения «О началах геометрии» (см. Приложение 1), восполняющий этот пробел.

Наконец, сочинение «Воображаемая геометрия» было написано Н. И. Лобачевским с целью применения созданной им геометрии к анализу и получения чисто аналитического доказательства непротиворечивости его системы. В начале работы Лобачевский заимствует из своих прежних работ три соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника, но здесь не доказывает их, а принимает в виде исходных положений. Из них выводятся остальные семь соотношений между сторонами и углами для прямоугольного, а затем и все соотношения для произвольного прямолинейного треугольника.

После этого доказывается, что полученная система формул позволяет решить любой треугольник по тем же данным, что и в геометрии Эвклида, и с тем же ограничением, которое накладывается на три стороны треугольника: сумма двух сторон больше третьей.

Эти результаты Н. И. Лобачевский считает достаточными, чтобы утверждать, что построенная им тригонометрия не противоречит абсолютной геометрии (с современной точки зрения это доказательство непротиворечивости не является достаточным). Дальнейшая часть работы содержит вычисления, связанные с геометрическими фигурами на плоскости и в пространстве. Помимо вычисления площадей и объемов, Н. И. Лобачевский приводит различные приложения к анализу, получив, в общей сложности, несколько десятков интегральных формул. Среди этих формул имеются как оригинальные результаты, так и известные соотношения для Г-функции, эллиптических функций, а также интегралы Пуассона и др.

Основная идея этих приложений состоит в том, что интегралы истолковываются как выражающие площади или объемы в пространстве Лобачевского или распространяются на такие площади или объемы. После этого производится преобразование координат или разбиение области интегрирования на части и сравнение новых полученных при этом интегралов со старыми, что и приводит к различным интегральным соотношениям или окончательным выражениям для интегралов.

Помимо трех основных работ Н. И. Лобачевского, в настоящее издание, как сказано выше, включен отрывок из сочинения «О началах геометрии», посвященный вычислению площадей многоугольников (Приложение 1), и «Речь о важнейших предметах воспитания» (Приложение 2).

Так как сам Н. И. Лобачевский не мог (по самому состоянию геометрии в его время) дать строгое доказательство непротиворечивости своей геометрической системы, мы сочли целесообразным включить в настоящее издание такое доказательство непротиворечивости (Приложение 3). Оно написано Б. Н. Делоне и представляет собой отрывок из его книги «Краткое изложение доказательства непротиворечивости планиметрии Лобачевского». Кроме того включен краткий очерк жизни и деятельности Лобачевского, написанный академиком П. С. Александровым.

Текст работ Лобачевского взят (так же, как и большинство подстрочных примечаний и комментариев) из «Полного собрания сочинений Н. И. Лобачевского», выпущенного Гостехиздатом (1946—1956). Ряд примечаний написан заново В. Г. Болтянским. Отметим еще, что в текст Н. И. Лобачевского внесены некоторые несущественные изменения, исправляющие очевидные недосмотры автора. Так, внесены исправления в черт. 4 к сочинению «Геометрические исследования» и черт. 23, 25, 38, 41, 42, 46 к сочинению «Новые начала». Добавлено несколько чертежей, поясняющих текст Лобачевского (эти чертежи, помимо номера, имеют буквы «а», «б» ...). Исправлены опечатки и вычислительные ошибки в некоторых формулах

(как, например, в группе формул на стр. 386—387). Более существенные ошибки рассмотрены в примечаниях.

Знаки *, ◊, △, ○, ⊗, ⦶, ⊖ относятся к подстрочным примечаниям в тексте, цифры [1], [2], [3]...— к более обширным примечаниям, помещенным в конце книги. Нумерация чертежей и формул проводится в каждом сочинении заново и совпадает с имеющейся в подлиннике.


ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ ПО ГЕОМЕТРИИ
* Н.И.ЛОБАЧЕВСКИЙ *

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ТЕОРИИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ЛИНИЙ



В геометрии я нашел некоторые несовершенства, которые я считаю причиной того, что эта наука, поскольку она не переходит в анализ, до настоящего времени не вышла ни на один шаг за пределы того состояния, в каком она к нам перешла от Эвклида. К этим несовершенствам я отношу неясность в первых понятиях о геометрических величинах, способы, которыми мы себе представляем измерение этих величин, и, наконец, важный пробел в теории параллельных линий, к восполнению которого все усилия математиков до настоящего времени были тщетными*. Старания Лежандра не прибавили к этой теории ничего, так как он был вынужден оставить единственно строгий ход [исследования], стать на побочный путь и прибегнуть к вспомогательным предложениям, которые он без обоснования старается изобразить как необходимые аксиомы.

Свой первый опыт по началам геометрии я опубликовал в «Казанском вестнике», за 1829 г.◊ В надежде, что я удовлетворил

---

* Настоящее сочинение посвящено исключительно устранению пробела в теории параллельных линий. О том, в чем Лобачевский усматривал сущность остальных недостатков геометрии,—неясность первых понятий и дефекты метрики,— подробно сказано во «Вступлении» к сочинению «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных», которое включено в настоящее издание (стр. 73). Там же Лобачевский говорит об исследованиях Лежандра, относящихся к теории параллельных линий.

◊ Речь идет о сочинении «О началах геометрии» (Н. И. Лобачевский. Полн. собр. соч., т. I, Гостехиздат, 1946, стр. 185—261).

всем требованиям, я занялся после этого обработкой всей этой науки и эту свою работу опубликовал отдельными частями в «Ученых записках Казанского университета» за 1836, 1837 и 1838 гг. под заглавием «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных». Размер этой работы, быть может, мешает моим соотечественникам следить за предметом, который после Лежандра утратил интерес. Я держусь, однако, мнения, что теория параллельных линий не должна была бы отказаться от своих притязаний на внимание математиков; поэтому я намерен изложить здесь сущность моих исследований; при этом вперед отмечу, что, вопреки мнению Лежандра*, все остальные несовершенства, как, например, определение прямой линии, оказываются здесь посторонними и лишены всякого влияния на теорию параллельных линий.

Чтобы не утомлять читателей множеством таких предложений, коих доказательства не представляют затруднений, я привожу здесь наперед только те из них, знание которых необходимо для последующего◊.

---

* A. M. Legendre, «Réflexions sur différentes manieres de demontrer la théorie des paralléles ou le théorème sur la somme des trois angles du triangle». Mémoires de l'Académie des Sciences, Paris, 1833, XII, стр. 367—410 (см. стр. 372).

◊ Приводимые ниже 15 предложений носят различный характер. Первое из них представляет собой одно из возможных определений прямой линии; другие должны быть рассматриваемы как постулаты или аксиомы (например, предложения 2, 3, 5); наконец, остальные суть теоремы, обычно доказываемые в курсах геометрии. Все эти предложения не зависят от постулата о параллельных линиях (т. е. устанавливаются, не опираясь на этот постулат); Лобачевский их приводит как материал, которым он может пользоваться при развитии своей геометрической системы, не рискуя впасть в ложный круг — воспользоваться положением, независимость которого он имеет в виду обнаружить. Однако в этот перечень вошли далеко не все предложения, не зависящие от постулата о параллельных линиях; более того, Лобачевский в дальнейшем изложении и сам пользуется предложениями, не вошедшими в этот перечень; мы их отметим в своем месте.

1) *Прямая линия покрывает себя самое во всех положениях.* Под этим я разумею, что при вращении поверхности прямая линия не меняет своего места, если она проходит через две неподвижные точки поверхности [1].

2) Две прямые не могут пересекаться в двух точках.

3) Прямая линия, будучи достаточно продолжена в обе стороны, должна уходить за всякие пределы и таким образом делит ограниченную плоскость на две части [2].

4) Две прямые, перпендикулярные к одной и той же третьей прямой, никогда не пересекаются, сколько бы мы их ни продолжали*.

5) Прямая линия всегда пересекает другую прямую, если переходит с одной ее стороны на другую [3].

6) Вертикальные углы, у которых стороны одного составляют продолжения сторон другого, равны. Это справедливо как в применении к плоским прямолинейным углам, так и в применении к плоскостным двугранным углам.

7) Две прямые не могут пересечься, если какая-либо третья прямая пересекает их под равными углами◊.

8) В прямолинейном треугольнике равным углам противолежат равные стороны, и обратно.

9) В прямолинейном треугольнике большей стороне противолежит также больший угол. В прямоугольном треугольнике гипотенуза больше каждого из катетов, и прилежащие к ней углы острые.

10) Прямолинейные треугольники конгруэнтны [4], если у них равны сторона и два угла△ или две стороны и заключенный

---

* Лобачевский не стремится к полной независимости высказываемых утверждений. В частности, предложение 4 является частным случаем предложения 7.

◊ Имеются в виду соответственные (или накрест лежащие) углы.

△ В этой части предложения 10 уже заключаются два признака равенства треугольников: 1) по стороне и двум углам, прилежащим к ней, 2) по стороне и двум углам, из которых один прилежит, а другой противолежит ей. Доказательство первого из этих признаков общеизвестно. До-

между ними угол или две стороны и угол, противолежащий большей стороне [5], или три стороны.

11) Прямая линия, перпендикулярная к двум другим прямым, не лежащим с нею в одной плоскости, перпендикулярна ко всем прямым, проведенным через точку их общего пересечения в плоскости двух последних прямых.

12) Пересечение шара плоскостью есть круг.

13) Прямая, которая перпендикулярна к линии пересечения двух [перпендикулярных*] плоскостей и расположена в одной из этих плоскостей, перпендикулярна к другой плоскости.

14) В сферическом треугольнике равным сторонам противолежат равные углы и обратно.

15) Сферические треугольники конгруэнтны, если у них равны две стороны и угол, заключенный между ними, или же сторона и прилежащие к ней углы◊.

Начиная отсюда, дальнейшие предложения уже сопровождаются пояснениями и доказательствами.

16) Все прямые линии, выходящие в некоторой плоскости из одной точки, могут быть по отношению к некоторой задан-

---

казательство второго из них см., например, в сочинении Лобачевского «Новые начала», ст. 87 (стр. 205 настоящего издания).

* Это слово, очевидно, по недосмотру, в оригинале пропущено, что отмечено и в казанском издании этого сочинения («Полн. собр. соч. по геом.», стр. 554).

◊ Это предложение формулировано не вполне точно: сферические треугольники при этих условиях либо конгруэнтны, либо симметричны. Но Лобачевский придерживается своеобразной терминологии, по которой две сферические фигуры «конгруэнтны», если одна из них может быть совмещена со второй либо непосредственно, либо после замены одной из них симметричной. Это он определенно оговаривает в «Новых началах», ст. 81 (стр. 198 настоящего издания). Нужно сказать, что первой из этих двух теорем Лобачевский фактически пользуется только в том случае, когда оба треугольника равнобедренные и боковые стороны одного равны боковым сторонам другого; при равенстве содержащихся между ними углов сферические треугольники в этом случае всегда конгруэнтны в обычном смысле слова.

ной прямой той же плоскости разделены на два класса, именно на *пересекающие* ее и *непересекающие**. *Граничная линия* одного и другого классов этих [прямых] линий называется *параллельной заданной линии* [6].

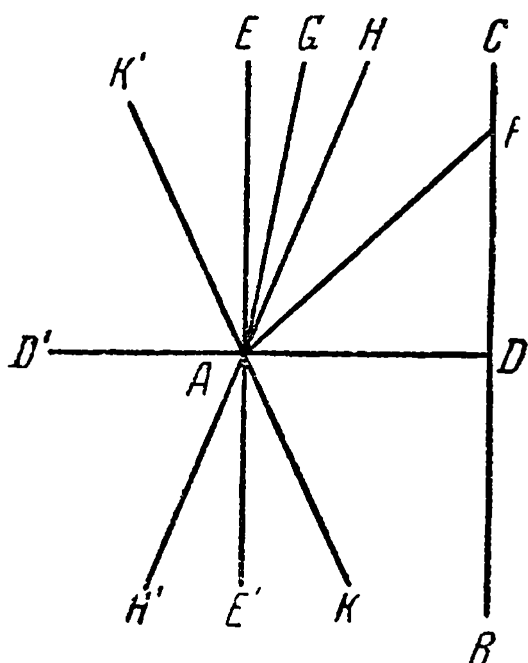
Из точки A (черт. 1) опустим на [заданную] линию BC перпендикуляр AD, к которому, в свою очередь, восставим перпендикуляр AE. В прямом угле EAD прямые, выходящие из точки A, либо все встречают линию DC, как, например, AF, либо же некоторые, подобно перпендикуляру AE, не встречают линии DC. Не зная, есть ли перпендикуляр AE единственная линия, которая не встречается с DC, будем считать возможным, что существуют и другие линии, например AG, которые не встречают DC, сколько бы мы их ни продолжали. При переходе от пересекающих линий AF к непересекающим AG мы должны встретить линию AH, параллельную DC,— граничную линию,— по одну сторону которой ни одна линия AG не встречает DC, между тем как по другую сторону каждая линия AF пересекает линию DC. Угол HAD между параллелью HA и перпендикуляром AD называется *углом параллели* (углом

* Этими соображениями устанавливается та своеобразная точка зрения, вернее, то исходное допущение, которое отличает «неэвклидову» геометрию Лобачевского от обычной, веками утвердившейся «эвклидовой» геометрии. Лобачевский допускает, что из точки A, лежащей вне прямой BC, может в плоскости ABC выходить не одна, а несколько прямых, не встречающих BC; точнее, он не исключает этой возможности. Это допущение непосредственно приводит к классификации, установленной в тексте и обстоятельно изложенной в следующем абзаце Лобачевского; оно подробно разъяснено в примечании [6].

Геометрия, построенная на всех постулатах Эвклида, с заменой, однако, постулата о параллельных (V постулата) допущением, что в плоскости из точки, лежащей вне прямой, можно провести больше одной прямой, не встречающей данной, и есть *неэвклидова геометрия Лобачевского*. Однако название «неэвклидова геометрия» в настоящее время получило гораздо более широкое значение; но в примечаниях к настоящему сочинению мы под «неэвклидовой геометрией» всегда разумеем геометрию Лобачевского; ее в настоящее время обычно называют также *гиперболической геометрией* (см. сноску * на стр. 70).

параллельности); мы будем здесь обозначать его через $\Pi(p)$ при $AD=p$*.

Если $\Pi(p)$ есть прямой угол◇, то продолжение AE' перпендикуляра AE также будет параллельно продолжению DB линии DC; к этому еще заметим, что в отношении четырех прямых углов, которые при точке A образуют перпендикуляры AE и AD и их продолжения AE' и AD', каждая прямая линия, выходящая из точки A, либо сама, либо по крайней мере своим продолжением расположена в одном из тех двух прямых углов, которые обращены к линии BC, так что, кроме параллели EE', все другие [прямые] по достаточном продолжении в обе стороны должны пересекать линию BC.



Черт. 1

Если $\Pi(p)<\frac{1}{2}\pi$, то по другую сторону [перпендикуляра] AD, под тем же углом $DAK=\Pi(p)$, будет проходить еще одна линия AK, параллельная продолжению DB линии DC; таким образом, при этом допущении△ мы должны отличать еще *сторону параллельности*○. Все остальные линии или их продолжения внутри

* Это обозначение основано на том, что угол параллельности в неэвклидовой геометрии, как это будет ниже обнаружено представляет собой функцию расстояния p.

◇ Т. е. в случае геометрии Эвклида.

△ Т. е. в случае неэвклидовой геометрии Лобачевского.

○ Иными словами, прямая AH считается параллельной прямой BC в сторону DC, а прямая AK — параллельной той же прямой в сторону DB. Это получает еще более точное выражение, если говорить только о лучах, а не о прямых: *луч AH параллелен лучу BC* (черт. 1), а *луч AK параллелен лучу CB*; вместе с тем через точку A, лежащую вне луча BC, во всяком случае (т. е. как в эвклидовой, так и в неэвклидовой геометрии) проходит один и только один параллельный ему луч AH. Лобачевский этой терминологией не пользуется: он всегда пишет «линия AH параллельна линии DC» или же прямая «AH параллельна прямой DC». Но это всегда нужно понимать в том смысле, что луч AH параллелен лучу DC.

двух прямых углов, обращенных к BC, принадлежат к пересекающим, если они лежат внутри угла $HAK = 2\Pi(p)$ между параллелями; напротив того, они принадлежат к непересекающим AG, если они расположены по другую сторону параллелей AH и AK в отверстии двух углов $EAH = \frac{1}{2}\pi - \Pi(p)$, $E'AK = \frac{1}{2}\pi - \Pi(p)$ между параллелями и перпендикуляром EE' к AD. Подобным же образом по другую сторону перпендикуляра EE' продолжения AH' и AK' параллелей AH и AK также будут параллельны BC; остальные линии принадлежат в угле $K'AH'$ к пересекающим, а в углах $K'AE$ и $H'AE'$ — к непересекающим.

Сообразно этому при предположении $\Pi(p) = \frac{1}{2}\pi$ линии могут быть только пересекающими или параллельными; если же принять, что $\Pi(p) < \frac{1}{2}\pi$, то нужно допустить две параллели, одну по одну сторону [перпендикуляра], другую по другую [его] сторону; кроме того, между остальными линиями нужно различать пересекающие и непересекающие*. Как при одном, так и при другом предположении признаком параллелизма служит то, что линия становится пересекающей при малейшем отклонении в ту сторону, где лежит параллель; таким образом, если AH параллельна DC, то каждая линия AF, сколь бы мал ни был угол HAF, пересекает DC.

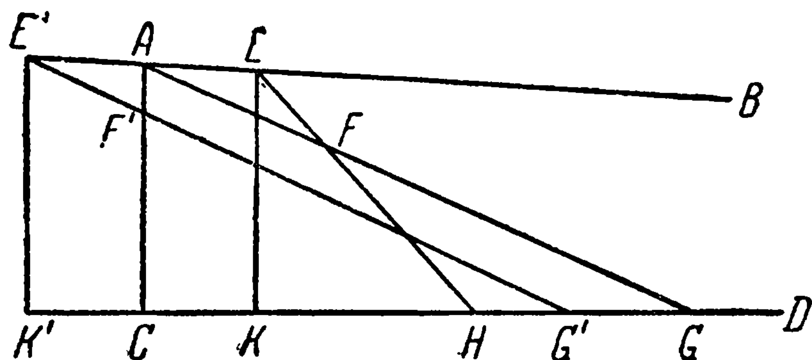
17) *Прямая линия сохраняет признак параллельности во всех своих точках*◊.

---

* Эти прямые, не пересекающие прямой CD и не являющиеся ей параллельными, называют *расходящимися* с прямой CD. Подробнее о расходящихся прямых см. в примечании [67].

◊ Содержащееся в предыдущем предложении определение параллели связывает ее с точкой, из которой она выходит: луч AB параллелен CD (черт. 2), если он не встречает CD и в точке A отделяет лучи, пересекающие CD, от непересекающих. Будет ли этот луч производить такое же отделение пересекающих лучей от непересекающих в другой своей точке, скажем, в точке E или E'? Этот именно вопрос получает разрешение в предложении 17.

Пусть [прямая] AB (черт. 2) будет параллельна CD* и пусть AC будет перпендикуляр к последней. Мы рассмотрим две точки, которые расположены произвольно: одна на линии AB и другая на ее продолжении по другую сторону перпендикуляра. Положим, что точка E лежит по ту сторону перпендикуляра, с которой AB рассматривается как параллельная CD. Из точки E опустим перпендикуляр EK на CD, затем проведем EF так, чтобы она проходила внутри угла BEK. Точки A и F соединим прямой линией, продолжение которой должно встретить CD где-либо в G (предложение 16)◊. Вместе с тем мы получим треугольник ACG, внутрь которого входит линия EF; так как эта последняя не может пересечь AC в силу самого построения, а также не может вторично встретить ни AG, ни EK (предложение 2), то она должна встретить CD в какой-либо точке H (предложение 3)△.



Черт. 2

Пусть теперь E' будет точка на продолжении [линии] AB и пусть $E'K'$ будет перпендикуляр на продолжении линии CD; проведем линию $E'F'$ под столь малым углом $AE'F'$, чтобы она пересекла AC где-либо в F'; затем из A проведем под тем же углом с AB линию AF, продолжение которой встретит CD в G (предложение 16). Таким образом мы получаем треугольник AGC, в который входит продолжение линии $E'F'$; так как эта линия не может вторично пересечь AC, а также не может пересечь AG, ибо угол $BAG = BE'G'$ (предложение 7), то она должна встретить CD где-либо в G'.

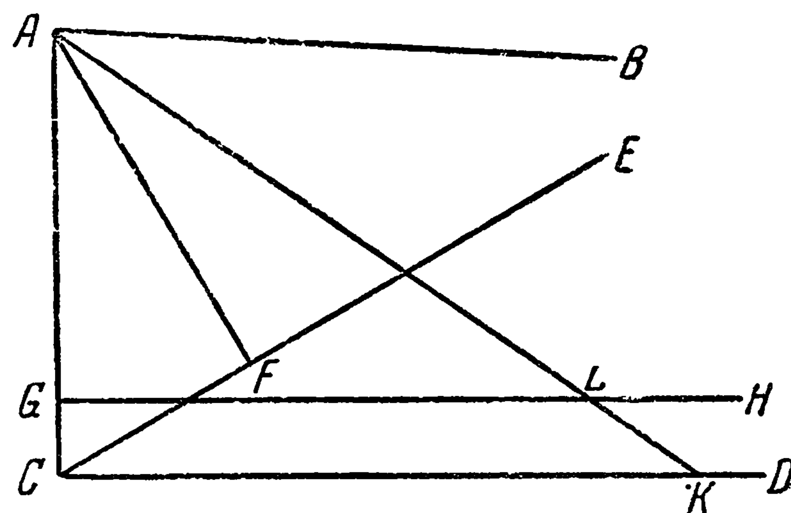
* Предполагается — в точке A.

◊ Ибо в точке A луч AB по условию отделяет встречающие CD лучи от невстречающих.

△ См. предложение 3 и к нему примечание [2].

Таким образом, из каких бы точек E и E' [прямой AB] ни выходили линии EF и $E'F'$ и как бы мало они ни отклонялись от линии AB, они всегда пересекут [линию] CD, которой AB параллельна*.

18) *Две линии всегда взаимно параллельны.*



Черт. 3

Пусть AC будет перпендикуляр к [линии] CD (черт. 3), которой AB параллельна◇; из C проведем линию CE под каким угодно острым углом ECD к CD и из A опустим перпендикуляр AF на CE; получим прямоугольный треугольник ACF, в котором гипотенуза AC больше катета AF (предложение 9). Отложим $AG=AF$ и наложим AF на AG; тогда AB и FE займут положение AK и GH, причем угол $BAK=FAC$△; следовательно, AK должна пересечь линию DC где-либо в [точке] K (предложение 16); таким образом получится треугольник AKC, внутрь которого [входит] перпендикуляр GH; он встречает линию AK в L (предложение 3) и тем определяет на линии AB расстояние AL точки пересечения линий AB и CE от точки A○.

---

* Иначе говоря, лучи EB и $E'B$ в точках E, E' производят отделение пересекающих лучей от непересекающих, т. е. как луч EB, так и луч $E'B$ параллельны лучу CD.

◇ Дано, таким образом, что луч AB параллелен лучу CD; нужно доказать, что и луч CD параллелен AB. Так как луч CD не встречает AB, то остается только обнаружить, что всякий луч CE, проходящий внутри угла DCA, встретит AB. Это доказательство Лобачевский и проводит.

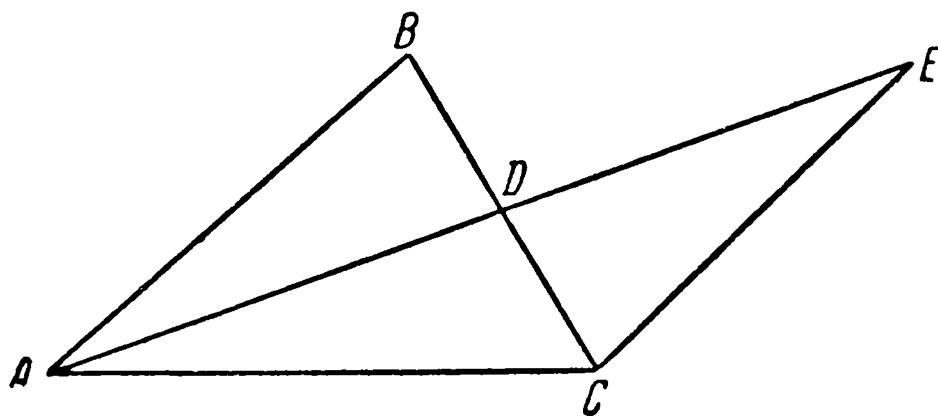
△ Полоса $BAFE$ повернута вокруг точки A таким образом, что линия AF совпадает с линией AG, FE с GH, а AB с AK. Поэтому углы поворота FAC и BAK равны.

○ Если произведем обратный поворот и возвратим отрезок AG в положение AF, то луч GL пойдет по FE, AL по AB и точка L совпадет с точкой пересечения лучей AB и CE.

Отсюда следует, что CE всегда встретит AB, сколь бы мал ни был угол ECD; поэтому CD параллельна AB (предложение 16).

19) *В прямолинейном треугольнике сумма трех углов не может превышать двух прямых**.

Допустим, что в треугольнике ABC (черт. 4) сумма трех углов равна $\pi + \alpha$; если его стороны не равны, возьмем наименьшую из них BC, разделим ее пополам в D, проведем из A через D линию AD и на ее продолжении сделаем DE равным AD; затем соединим точку E с точкой C прямой EC. В равных треугольниках ADB и CDE угол $ABD = DCE$ и $BAD = DEC$ (предложения 6 и 10); отсюда следует, что в треугольнике ACE сумма углов также должна быть равна $\pi + \alpha$; кроме того,



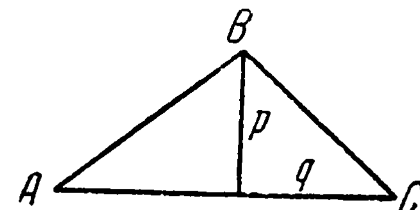
Черт. 4

* Это предложение часто формулируют иначе. Если α, β, γ — углы треугольника, то разность $\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$ называют *дефектом* рассматриваемого треугольника. Поэтому доказываемое предложение можно сформулировать так: *дефект всякого прямолинейного треугольника является величиной неотрицательной.*

Заметим, что дефект *аддитивен*: если треугольник ABC разбит на несколько треугольников (см., например, черт. 5 или 7), то дефект треугольника ABC равен сумме дефектов составляющих треугольников. Это доказывается (для каждого конкретного разбиения на треугольники) непосредственным подсчетом углов (см. также примечание [7], где это доказательство проведено в общем виде).

Из неотрицательности дефекта и его аддитивности вытекает следующее предложение: *если треугольник ABC, имеющий дефект, равный нулю, разбит на несколько треугольников, то дефект каждого из составляющих треугольников также равен нулю.* Иначе говоря, *если сумма углов треугольника ABC равна π, то и сумма углов каждого из составляющих треугольников равна π.* Этим предложением Лобачевский несколько раз пользуется далее (при доказательстве предложения 20).

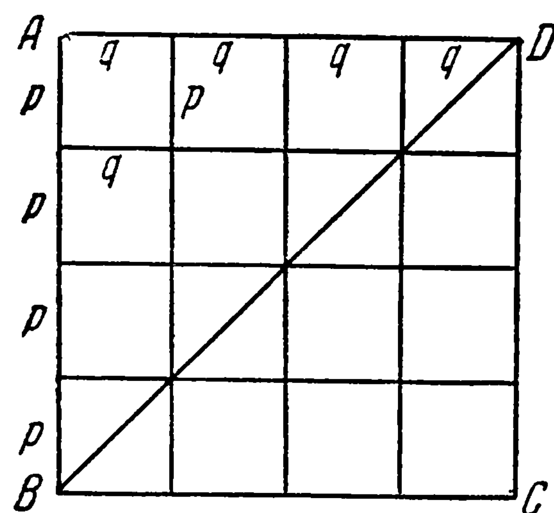
наименьший угол BAC треугольника ABC (предложение 9) перешел в новый треугольник ACE, причем он разбился на две части EAC и AEC. Продолжая таким же образом, разделяя при этом пополам каждый раз ту сторону, которая противолежит наименьшему углу, мы необходимо придем к треугольнику, сумма трех углов которого равна $\pi + \alpha$, но в котором окажутся два угла, каждый из которых по абсолютной величине меньше $\frac{1}{2}\alpha$; так как, однако, третий угол не может быть больше π, то α должно быть либо нулем, либо отрицательным.



Черт. 5

20) *Если в каком-либо прямолинейном треугольнике сумма трех углов равна двум прямым, то это имеет место и во всяком другом треугольнике*.*

Положим, что в прямолинейном треугольнике ABC (черт. 5) сумма трех углов $= \pi$; в таком случае по крайней мере два его угла должны быть острые. Из вершины B третьего угла опустим на противоположную сторону перпендикуляр p; тогда треугольник ABC разобьется на два прямоугольных треугольника, в каждом из которых сумма трех углов также должна быть равна π, ибо ни в одном из них она не может превышать π, а в составленном из них треугольнике$^\diamond$ она не должна быть меньше π. Таким образом, мы получаем



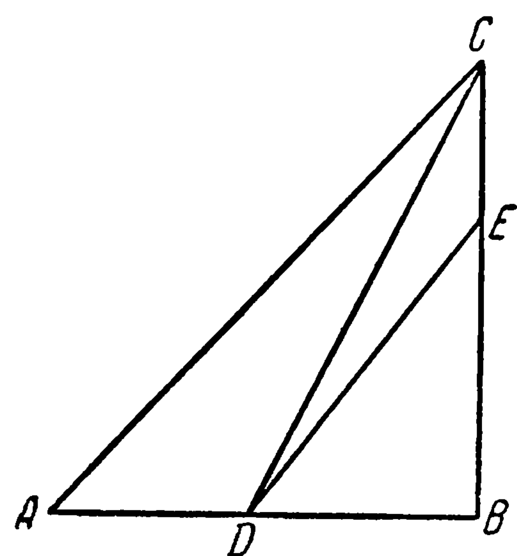
Черт. 6

---

* Иначе говоря, если дефект какого-либо треугольника равен нулю, то это же имеет место и во всяком другом треугольнике.

$^\diamond$ Так как угол BAC острый, то основание перпендикуляра, опущенного из точки B на сторону AC, должно в силу предыдущего предложения упасть на луч AC, а не на его продолжение; по той же причине оно должно упасть и на луч CA; основание перпендикуляра должно, следовательно,

прямоугольный треугольник с катетами p и q, а из него* получаем четырехугольник, в котором противоположные стороны равны, а прилежащие друг к другу стороны p и q взаимно перпендикулярны (черт. 6). Повторно прикладывая тот же четырехугольник, можно получить подобный же [четырехугольник] со сторонами np и q и, наконец, четырехугольник $ABCD$ со взаимно перпендикулярными сторонами, в котором $AB = np$, $AD = mq$, $DC = np$, $BC = mq$, где m и n суть произвольные целые числа. Такой четырехугольник делится диагональю BD на два равных прямоугольных треугольника BAD и BCD, в каждом из которых сумма трех углов равна π. Числа m и n могут быть выбраны так, чтобы прямоугольный треугольник ABC (черт. 7), катеты которого $AB = np$, $BC = mq$, охватил другой заданный [прямоугольный] треугольник DBE, коль скоро [их] прямые углы будут приведены в совмещение◇. Если проведем линию DC, то получим еще прямоугольные тре-



Черт. 7

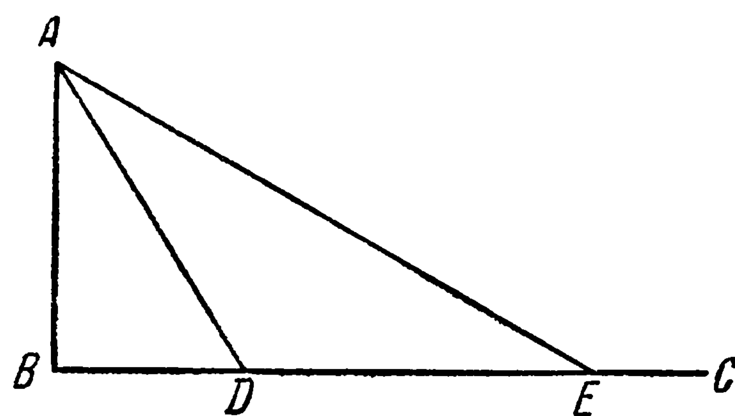
лежать *внутри* стороны AC. Треугольник разобьется поэтому на два составляющих треугольника.

Весь смысл этой части доказательства заключается в том, чтобы показать, что при существовании какого-либо треугольника, в котором сумма углов равна π, всегда возможно построить *прямоугольный* треугольник, в котором сумма внутренних углов также равна π.

* Прикладывая к нему конгруэнтный ему треугольник гипотенузой к гипотенузе, но повернув последнюю в обратную сторону так, чтобы точка C попала в B, а точка B — в C.

◇ Иначе говоря, располагая уже прямоугольным треугольником, в котором сумма углов равна π, можно при его помощи построить другой прямоугольный треугольник с той же суммой углов ($=\pi$), в котором катеты будут сколь угодно велики (соответственно больше любых двух заданных отрезков). Если поэтому возьмем произвольный прямоугольный треугольник DBE (черт. 7), то можно будет построить такой прямоугольный треугольник ABC с суммой углов, равной π, в котором треугольник DBE займет положение, указанное на черт. 7.

угольники, из которых каждые два последовательно имеют общую сторону. Треугольник ABC получается путем соединения двух треугольников ACD и DCB, ни в одном из которых сумма трех углов не может быть больше π; она должна быть поэтому равна π, поскольку в составленном треугольнике эта сумма должна быть равна π. Таким же образом треугольник BDC состоит из двух треугольников DEC и DBE; поэтому и в треугольнике DBE сумма трех углов должна быть равна π*; и вообще это должно иметь место во всяком треугольнике, так как всякий треугольник разбивается на два прямоугольных треугольника◊.



Черт. 8

Отсюда следует, что возможны только два допущения: либо сумма трех углов во всех прямолинейных треугольниках равна π, либо же она во всех треугольниках меньше π.

21) *Из данной точки всегда можно провести прямую линию таким образом, чтобы она образовала с данной прямой сколь угодно малый угол.*

Из данной точки A [черт. 8] опустим на данную прямую BC перпендикуляр AB; на BC возьмем произвольную точку D и проведем линию AD; далее, сделаем $DE = AD$ и проведем AE. Пусть в прямоугольном треугольнике ABD угол $ADB=\alpha$. В таком случае в равнобедренном треугольнике ADE угол AED должен быть либо равен $\frac{1}{2}\alpha$, либо меньше (предложения 8 и 20)△.

---

* Таким образом, доказано, что при сделанном предположении в любом *прямоугольном* треугольнике сумма углов равна π, т. е. дефект равен нулю.

◊ Произвольный треугольник ABC составляется из двух прямоугольных (черт. 5), в каждом из которых дефект равен нулю. Поэтому дефект треугольника ABC равен нулю, т. е. сумма углов равна π.

△ Здесь уместна ссылка на предложение 19; поскольку сумма внутренних углов треугольника не может превысить π, каждый из внешних углов треугольника не может быть меньше суммы двух внутренних уг-

Продолжая таким образом, мы, наконец, придем к такому углу AEB, который меньше любого заданного угла.

22) *Если два перпендикуляра к одной и той же прямой линии параллельны между собой, то в прямолинейных треугольниках сумма трех углов равна* π.

Положим, что линии AB и CD (черт. 9) параллельны между собой и перпендикулярны к AC. Из A проведем линии AE и AF к точкам E и F, взятым на линии CD на любых расстояниях $FC > EC$ от точки C. Допустим, что в прямоугольном треугольнике ACE сумма трех углов равна $\pi - \alpha$, а в треугольнике AEF она равна $\pi - \beta$; в таком случае в треугольнике ACF [сумма углов] будет равна $\pi - \alpha - \beta$, причем ни α, ни β не могут быть отрицательными. Пусть, далее, угол $BAF = a$, $AFC = b$; в таком случае $\alpha + \beta = a - b$*, теперь, удаляя линию AF от перпендикуляра AC, можно сделать угол a между AF и параллелью AB сколь угодно малым; так же можно уменьшать и угол b; следовательно, два угла α и β не могут иметь никакой другой величины, кроме $\alpha = 0$ и $\beta = 0$◇.

Отсюда следует, что во всех прямолинейных треугольниках сумма трех углов либо равна π, и тогда угол параллельности $\Pi(p) = \frac{1}{2}\pi$ для любой линии p; либо во всех треугольниках эта сумма $< \pi$, и тогда также $\Pi(p) < \frac{1}{2}\pi$ △.

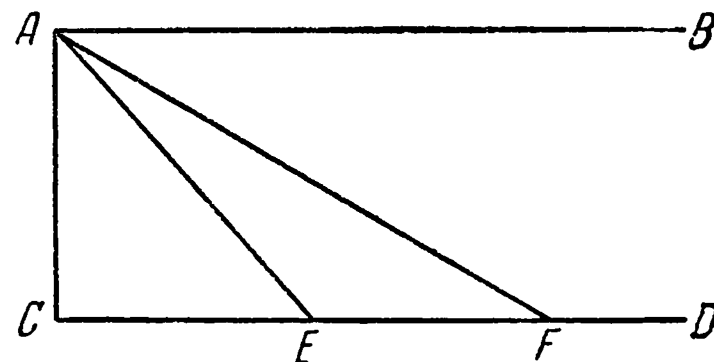
лов, с ним не смежных; поэтому $\angle DAE + \angle DEA = 2\angle DEA \leqslant \alpha$. Ссылка на предложение 20, по-видимому, представляет собой недосмотр.

* Так как $\angle CAF = \frac{1}{2}\pi - a$, $\angle AFC = b$, то сумма углов прямоугольного треугольника ACF равна $\pi + b - a$, откуда и вытекает равенство $\alpha + \beta = a - b$.

◇ Так как по условию луч AB параллелен CD, то луч AF будет пересекать CD, сколь бы малым мы ни взяли угол a. Что касается угла b, то он может быть сделан сколь угодно малым согласно предложению 21. Таким образом, в предыдущем равенстве $\alpha + \beta = a - b$ левая часть представляет сумму неотрицательных слагаемых α и β; правая же часть бесконечно мала; отсюда вывод автора.

△ Из этого ясно, что если угол параллельности $\Pi(p)$ меньше $\frac{1}{2}\pi$

Первое предположение служит основой *обыкновенной геометрии* и *плоской тригонометрии.* Второе предположение также может быть допущено, не приводя ни к какому противоречию в результатах; оно обосновывает новое геометрическое учение, которому я дал название «*воображаемая геометрия*» и которое я здесь намерен изложить вплоть до вывода уравнений между сторонами и углами прямолинейных и сферических треугольников *.



Черт. 9

23) *Для любого заданного угла* α *можно найти такую линию* p, *что* $\Pi(p) = \alpha$.

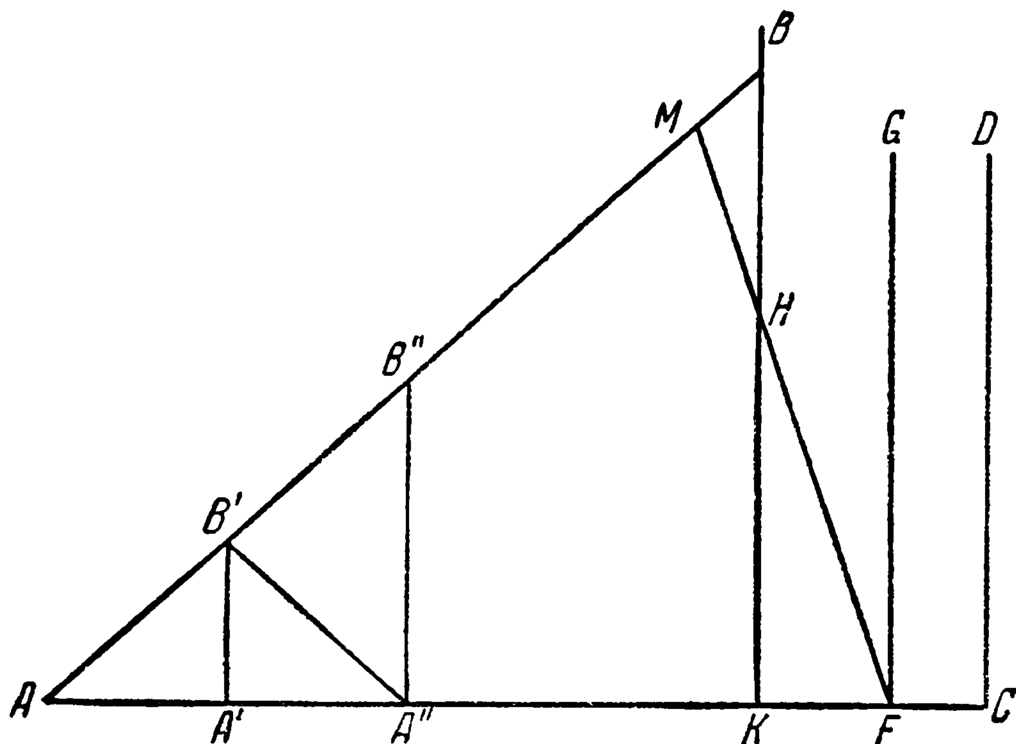
Пусть AB и AC (черт. 10) — две прямые линии, образующие при пересечении острый угол α; на AB возьмем произвольно точку B', из этой точки опустим на AC перпендикуляр $B'A'$, сделаем $A'A'' = AA'$, восставим в A'' перпендикуляр $A''B''$ и так будем продолжать до тех пор, пока придем к перпендику-

---

хотя бы для одного отрезка p, то он меньше $\frac{1}{2}\pi$ и для любого другого отрезка. Предложение: *через каждую точку вне прямой проходят по крайней мере две (и потому бесконечно много) прямых, не пересекающих данной* (или, что то же самое: *для каждого отрезка p угол параллельности* $\Pi(p)$ *меньше* $\frac{1}{2}\pi$), называется *аксиомой Лобачевского.* Доказанный в тексте факт позволяет ослабить требования этой аксиомы: достаточно предположить, что угол параллельности острый в *одной* точке по отношению к *одной* прямой. Таким образом, аксиома Лобачевского является *отрицанием* (логическим дополнением) эвклидова постулата о параллельных: если требование этого постулата не выполнено, то (при выполнении остальных аксиом геометрии) имеют место обстоятельства, высказываемые в аксиоме Лобачевского.

* С этого места Лобачевский, таким образом, твердо принимает второе возможное допущение, именно, что сумма углов треугольника меньше π, и в этом предположении развертывает все свои дальнейшие рассуждения. Это нужно постоянно помнить, следя за дальнейшим текстом.

ляру CD, который уже не встречает AB. Это необходимо должно иметь место, ибо если в треугольнике $AA'B'$ сумма всех трех углов равна $\pi - a$, то в треугольнике $AB'A''$ она равна $\pi - 2a$, в треугольнике $AA''B''$ она меньше $\pi - 2a$ (предложение 20)* и т. д., пока она, наконец, не станет отрицательной и этим обнаружит невозможность образования треугольника. Перпендикуляр CD может оказаться именно тем, до которого все перпендикуляры из точек, лежащих ближе к A, пересекают AB; во всяком случае при переходе от пересекающих к непересекающим такой перпендикуляр FG должен существовать◊. Теперь из точки F проведем линию FH, образующую с FG острый угол HFG и именно с той стороны, с которой лежит точка A. Из какой-либо точки H линии FH опустим на AC перпендикуляр HK, продолжение которого, следовательно, должно пересечь AB где-либо в B △;



Черт. 10

* Иначе говоря, дефект треугольника $AA'B'$ равен $a>0$, дефект треугольника $AB'A''$ равен $2a$, а дефект треугольника $AA''B''$ больше $2a$ (в силу аддитивности дефекта — см. сноску* на стр. 24). Ссылка на предложение 20, повидимому, представляет собой недосмотр.

◊ Это доказывается так же, как и существование параллели (см. предложение 16 и к нему примечание[6]). Принимая это, Лобачевский обнаруживает, что этот перпендикуляр FG действительно параллелен лучу AB, т. е. что всякий луч FH, проходящий внутри угла GFA, встречает AB.

△ Это следует из того, что перпендикуляр KH выходит из точки K, лежащей ближе к A, чем основание первого, не встречающего AB перпендикуляра FG.

он образует, таким образом, треугольник AKB, внутрь которого входит продолжение линии FH, и потому оно должно встретить гипотенузу AB где-либо в M. Так как GFH есть произвольный угол и может быть взят сколь угодно малым, то [линия] FG параллельна AB и $AF = p$ (предложения 16 и 18).

Легко усмотреть, что с уменьшением p угол α возрастает, приближаясь при $p=0$ к $\frac{1}{2}\pi$*; с возрастанием p угол α уменьшается, более приближаясь к нулю при $p = \infty$. Так как совершенно произвольно, какой угол разуметь под символом $\Pi(p)$, когда линия p выражается отрицательным числом, то мы примем [8]

$$\Pi(p) + \Pi(-p) = \pi,$$

каковое равенство должно иметь место для всех значений p, как положительных, так и отрицательных, а также для $p = 0$.

24) *Чем далее параллельные линии продолжаются в сторону параллельности, тем более они друг к другу приближаются.*

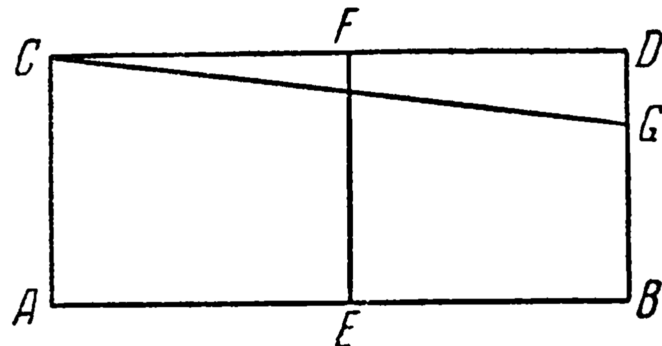
К прямой AB (черт. 11) восставим два перпендикуляра $AC = BD$ и конечные их точки соединим прямой линией CD. Тогда четырехугольник $CABD$ будет иметь два прямых угла при A и B, а при C и D — два острых угла (предложение 22)◊,

---

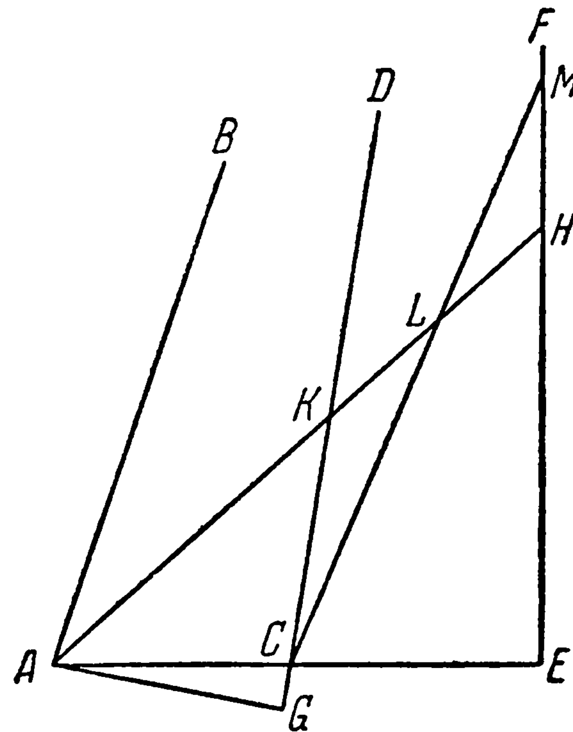
* Если, как на приведенном чертеже, AF есть тот отрезок p, для которого $\Pi(p) = \alpha(=\angle BAF)$, и мы возьмем $AF' < AF$, то луч AB будет встречать перпендикуляр $F'G'$, а потому луч, параллельный $F'G'$, будет проходить выше AB, т. е. при $AF' < AF$ имеем $\Pi(AF') > \Pi(AF)$. Итак, $\Pi(p)$ есть монотонная функция от p, убывающая с возрастанием p и, следовательно, возрастающая с убыванием p. Как было доказано выше (предложение 23), при этом возрастании функция $\Pi(p)$ должна проходить через все углы, меньшие $\frac{1}{2}\pi$; поэтому $\Pi(p)$ стремится к $\frac{1}{2}\pi$, когда p стремится к нулю. И обратно, убывая с возрастанием p, функция $\Pi(p)$ должна проходить через все сколь угодно малые углы; она стремится поэтому к нулю, когда p неограниченно возрастает.

◊ Ссылку на предложение 22 нужно относить к концу его, где устанавливается, что в дальнейшем исследование будет производиться на основе допущения, что сумма углов треугольника меньше π, а потому сумма углов в четырехугольнике меньше 2π.

которые равны между собой, как в этом легко убедиться, налагая этот четырехугольник на самого себя так, чтобы линия BD упала на AC, а AC — на BD. Разделим AB пополам и в точке деления E восставим перпендикуляр EF к AB. Он должен



Черт. 11



Черт. 12

быть также перпендикулярен к CD, потому что четырехугольники $CAEF$ и $FEBD$ покрывают друг друга, если наложим их друг на друга так, чтобы линия FE осталась в том же положении. Вследствие этого линия CD не может быть параллельна AB*, параллель же к последней в точке C, именно CG, должна быть наклонена в сторону AB (предложение 16) и отсечет от перпендикуляра BD часть $BG < CA$. Так как точка C на линии CG произвольна, то отсюда следует, что CG тем более приближается к AB, чем далее мы ее продолжаем◊.

---

* По предложению 22.

◊ Заметим, что в сторону параллельности расстояние одной параллели от другой убывает неограниченно; в противоположную же сторону (как говорит Лобачевский — «в сторону развода») оно неограниченно возрастает (см. «Новые начала», стр. 235 настоящего издания). Обзор всех возможных случаев расположения двух прямых на плоскости Лобачевского дан в примечании [67] к тексту «Новых начал».

25) *Две прямые линии, параллельные третьей, параллельны между собой.*

Примем сначала, что три линии AB, CD и EF (черт. 12) лежат в одной плоскости. Если две из них по порядку AB и CD параллельны крайней* линии EF, то AB и CD также параллельны между собой. Чтобы это обнаружить◇, опустим из произвольной точки A крайней линии AB на другую крайнюю FE перпендикуляр AE, который пересечет среднюю линию CD в некоторой точке C (предложение 3)△ под углом $DCE < \frac{1}{2}\pi$ со стороны параллели CD к EF (предложение 22)○. Перпендикуляр AG, опущенный из той же точки A на CD, должен упасть внутри отверстия острого угла ACG (предложение 9); всякая другая линия AH, проведенная из A внутри угла BAC, должна пересечь [линию] EF, параллельную AB, где-либо в H, сколь бы мал ни был угол BAH; следовательно, CD пересечет в треугольнике AEH линию AH где-либо в K, так как она не может встретиться с EF. Если бы AH проходила из точки A внутри угла CAG, то она должна была бы в треугольнике CAG пересечь продолжение CD где-либо между точками C и G. Отсюда следует, что AB и CD параллельны (предложения 16 и 18).

Если примем, что обе внешние линии AB и EF параллельны средней CD, то каждая линия AK, проведенная из точки A внутри угла BAE, пересечет линию CD где-либо в точке K, сколь бы мал ни был угол BAK. На продолжении AK возьмем произвольно точку L и соединим ее с C линией CL, которая

* Т. е. лежащей вне полосы, ограничиваемой первыми двумя прямыми.

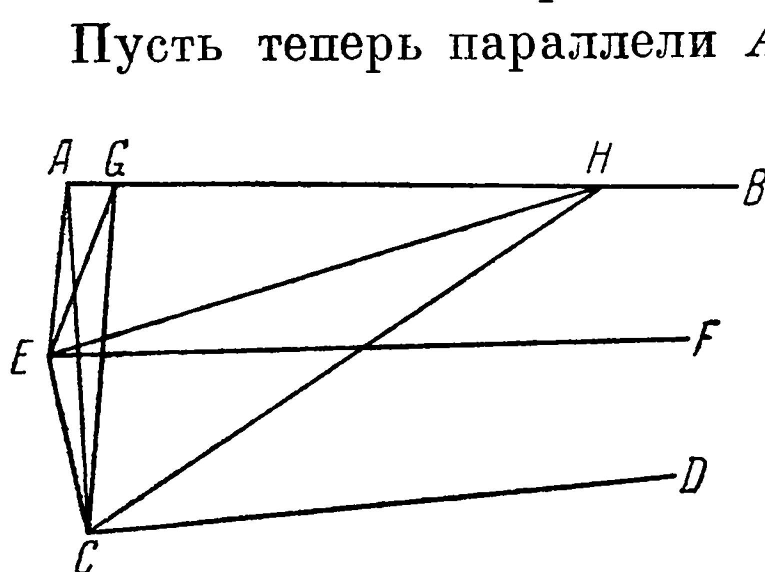
◇ Обращаясь к доказательству этого предложения, нужно прежде всего заметить, что прямые AB и CD встретиться не могут, потому что из точки их пересечения, если бы таковая существовала, выходили бы два луча, параллельные EF, что не может иметь места (см. сноску○ на стр. 20). Остается, таким образом, обнаружить, что AB есть граничный луч, не встречающий CD; это автор и выполняет.

△ Более уместна ссылка на предложение 5.

○ Угол DCE есть угол параллельности, соответствующий расстоянию CE, а потому он меньше прямого.

пересечет EF где-либо в M, вследствие чего образуется треугольник MCE. Продолжение линии AL внутрь треугольника MCE не может вторично пересечь ни AC, ни CM; следовательно, оно должно встретить EF где-либо в H; поэтому AB и EF взаимно параллельны.

Пусть теперь параллели AB и CD (черт. 13) лежат в двух плоскостях, пересечение которых есть линия EF*. Из произвольной точки E последней опустим перпендикуляр EA на одну из двух параллелей, например, на AB; затем из основания A перпендикуляра EA опустим вновь перпендикуляр AC на вторую параллель CD и соединим концы E и C обоих перпендикуляров линией EC. Угол BAC должен быть острым (предложение 22); следовательно, перпендикуляр CG, опущенный из C на AB, падает в точку G по ту сторону от CA, в которой считаем линии AB и CD параллельными. Каждая линия EH, сколь бы мало она ни отклонялась от EF, лежит с EC в плоскости, которая должна пересечь плоскость двух параллелей AB и CD вдоль некоторой линии CH. Эта последняя линия пересекает где-либо AB и именно в той же точке H, которая принадлежит всем трем плоскостям и через которую необходимо проходит также линия EH; следовательно, EF параллельна AB. Подобным же образом можно обнаружить параллельность линий EF и CD.



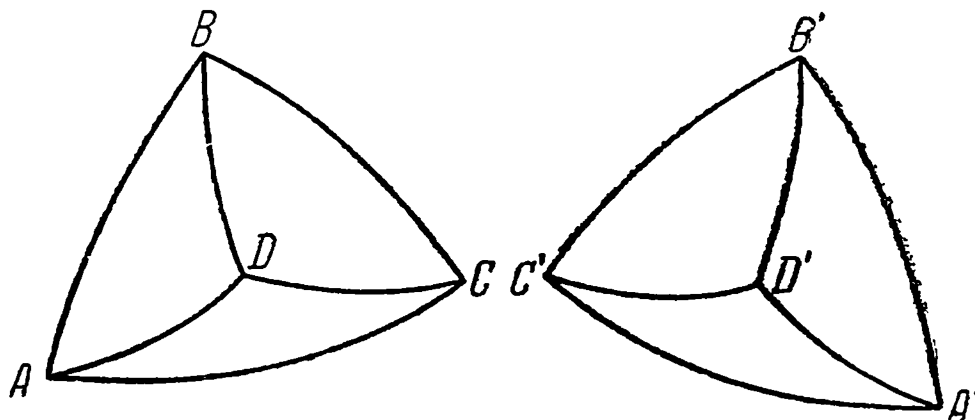
Черт. 13

Сообразно этому предположение, что линия EF параллельна одной из двух других параллельных между собой [линий]

---

* Отсюда уже следует, что линии AB и EF не пересекаются: через общую их точку, если бы таковая существовала, необходимо проходила бы прямая CD, потому что три прямые AB, CD и EF лежат попарно в одной плоскости; но это не может иметь места, так как линии AB и CD параллельны.

AB и CD, означает не что иное, как то, что EF рассматривается как пересечение двух плоскостей, в которых лежат параллели AB и CD*. Поэтому две линии параллельны между собой, если они параллельны одной и той же третьей линии, хотя бы они лежали и в различных плоскостях. Последнее предложение можно выразить также следующим образом: *три плоскости пересекаются по линиям, которые все между собой параллельны, поскольку предполагается параллельность двух из них.*



Черт. 14

26) *На поверхности шара противолежащие друг другу треугольники имеют одинаковую площадь.*

Под противолежащими друг другу треугольниками мы разумеем здесь такие, которые образуются пересечением поверхности шара [теми же] плоскостями по обе стороны центра; в таких треугольниках стороны и углы имеют поэтому противоположные направления.

В противолежащих друг другу треугольниках ABC и $A'B'C'$ (черт. 14, на котором один из треугольников нужно себе представить изображенным в повернутом виде) стороны $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $CA = C'A'$ и их углы при точках A, B, C также равны соответствующим углам в другом треугольнике при точках A', B', C'. Представим себе плоскость, проходящую через три точки A, B, C, и перпендикуляр, опущенный на эту

* Действительно, проведем через точку E (лежащую на прямой EF) две плоскости, одна из которых содержит прямую AB, параллельную EF, а другая — прямую CD. Тогда по доказанному линия пересечения этих плоскостей параллельна обеим прямым AB и CD, а так как через точку E проходит единственная прямая, параллельная AB, то эта линия пересечения совпадает с EF.

плоскость из центра шара; продолжения этого перпендикуляра в обе стороны пересекут противолежащие друг другу треугольники в точках D и D' шаровой поверхности. Расстояния точки D от точек A, B, C на сфере в дугах больших кругов должны быть равны (предложение 12) как между собой, так и расстояниям $D'A'$, $D'B'$, $D'C'$ в другом треугольнике (предложение 6); следовательно, равнобедренные треугольники вокруг точек D и D' в обоих сферических треугольниках ABC и $A'B'C'$ конгруэнтны друг другу.

Чтобы вообще судить о равенстве двух поверхностей*, принимают за основу следующее предложение: *две поверхности равны, если они образуются составлением или отделением равных частей*◊.

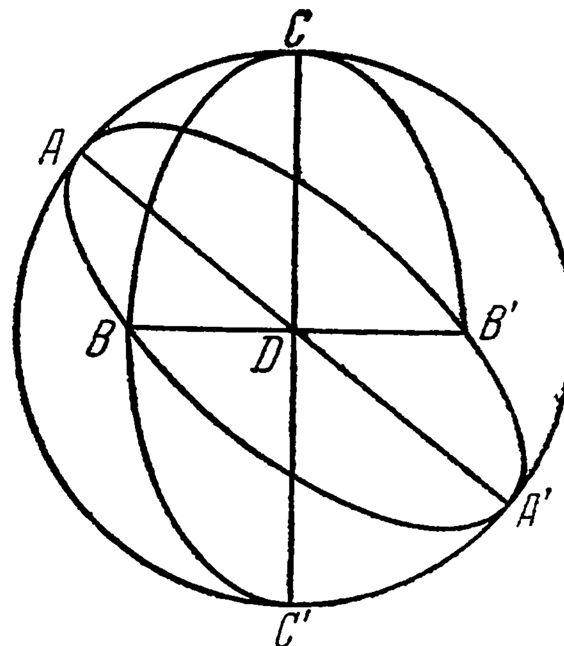
27) *Трехгранный телесный угол равен полусумме его двугранных углов без прямого*△.

* В оригинале сказано «Oberflächen» (поверхностей); в действительности здесь идет речь о равенстве площадей (т. е. о равновеликости) двух фигур. Во всех своих сочинениях Лобачевский называет две фигуры или два тела равными, когда они по современной терминологии равновелики. Напротив того, когда они конгруэнтны, он на немецком языке называет их «Congruent», на русском — «одинаковыми» (ср. примечание [4]).

◊ На это предложение не следует смотреть как на *определение* равновеликих фигур. Лобачевский им пользуется только в точном соответствии с его выражением, приведенным в тексте: показав в каждом случае, что две фигуры могут быть получены составлением или отделением одинаковых частей, Лобачевский отсюда заключает, что эти фигуры равновелики. Обратное предложение в таком общем виде вовсе несправедливо, т. е. не всякие две равновеликие фигуры могут быть составлены из конечного числа конгруэнтных частей. Впрочем, равновеликие прямолинейные фигуры (многоугольники) всегда допускают разбиение на конгруэнтные фигуры. Об этом см. В. Ф. Каган. О преобразовании многогранников, изд. 2, М.—Л., 1933. Следует заметить, что в цитированной книге В. Ф. Кагана доказательства являются существенно эвклидовыми. Аналогичное предложение для равновеликих многоугольников в плоскости Лобачевского доказано, например, в книге Я. Успенского «Введение в неэвклидову геометрию Лобачевского — Болиаи», Петроград, 1922 (см. стр. 130—136).

△ Трехгранный угол, как и всякий телесный угол, измеряется площадью той части сферы единичного радиуса, которую он на ней вырезы-

В сферическом треугольнике ABC (черт. 15), в котором каждая сторона $<\pi$, обозначим углы через A, B, C, продолжим сторону AB так, что образуется полный круг $ABA'B'A$, который разделит сферу на две равные части. В той половине, в которой находится треугольник ABC, продолжим еще две другие стороны за точку их взаимного пересечения C до их пересечений с кругом в A' и B'. Этим полусфера разобьется на четыре треугольника ABC, ACB', $B'CA'$, $A'CB$, величины которых пусть будут P, X, Y, Z. Ясно, что здесь*



Черт. 15

$$P + X = B,$$
$$P + Z = A.$$

Величина сферического треугольника Y равна величине противолежащего ему треугольника ABC', в котором сторона AB общая с треугольником P, а третий угол C' лежит при конечной точке диаметра сферы, идущего от C через центр сферы D (предложение 26). Отсюда следует, что $P + Y = C$; а так

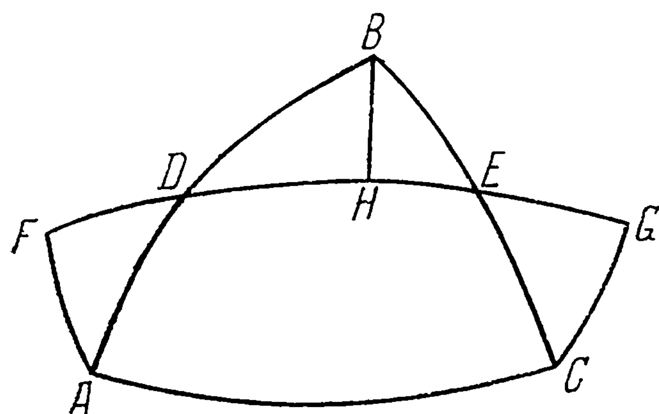
вает. Площадь сферического треугольника выражается его *избытком*, т. е. числом $A + B + C - \pi$, где A, B, C суть углы треугольника. Сообразно этому предложение, о котором идет речь, должно было бы гласить: «трехгранный телесный угол равен *сумме* его двугранных углов без *двух прямых*». Расхождение обусловлено тем, что Лобачевский выражает площадь сферы не числом 4π, а числом 2π в особого рода единицах. Именно: часть сферы, которую на ней вырезывает двугранный угол α, имеющий ребро на каком-либо диаметре сферы, Лобачевский всегда выражает числом α. Если линейные и двугранные углы измеряются в радианах, то вся сфера выражается числом 2π. См. также примечание [53] к тексту «Новых начал».

* Треугольники P и X образуют сферический «вырезок», который Лобачевский (как выяснено в сноске△ на предыдущей странице) выражает тем же числом, что и угол B.

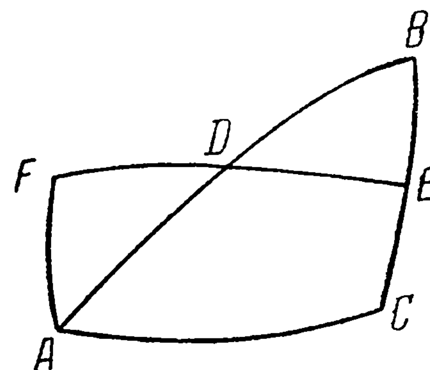
как $P + X + Y + Z = \pi$, то мы получаем также

$$P = \frac{1}{2}(A + B + C - \pi).$$

К тому же результату можно придти также и другим путем, опираясь только на предложение, приведенное выше относительно равенства площадей (предложение 26).

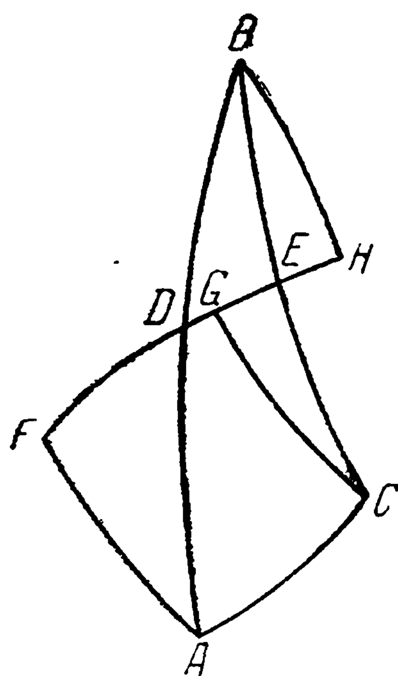


Черт. 16



Черт. 17

В сферическом треугольнике ABC (черт. 16) разделим стороны AB и BC пополам и через точки деления D и E проведем большой круг DE; из точек A, B, C опустим на этот круг перпендикуляры AF, BH и CG*. Если перпендикуляр из B падает в H между D и E, то образующийся таким образом треугольник BDH равен AFD, а BHE равен EGC (предложения 6 и 15); отсюда следует, что площадь треугольника ABC равна площади четырехугольника $AFGC$ (предложение 26)◇. Если точка H совпадает с серединой E стороны BC (черт. 17), то образуются только два равных прямоугольных треугольника AFD и BDE, замещая которые друг другом, докажем равенство площадей треугольника ABC и четырехугольника $AFEC$.



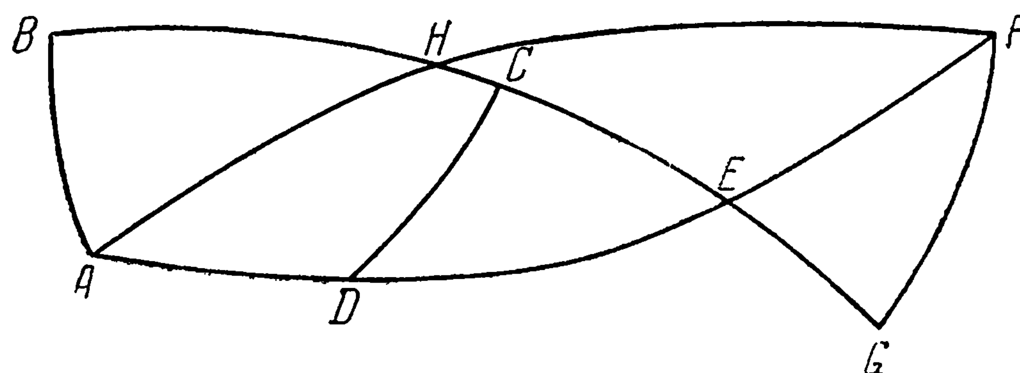
Черт. 18

* Точнее, дуги окружностей больших кругов, перпендикулярные к DE.

◇ Ссылка на предложение 26 ошибочна: сферические треугольники AFD и BDH могут быть совмещены движением сферы; достаточно повернуть сферу на угол π вокруг диаметра, проходящего через точку D.

Если, наконец, точка H падает вне треугольника ABC (черт.18), то мы перейдем от треугольника ABC к четырехугольнику $AFGC$, присоединяя треугольник $FAD = DBH$ и отнимая затем треугольник $CGE = EBH$.

Если в сферическом четырехугольнике $AFGC$ представим себе большие круги, проходящие через точки A и G и через



Черт. 19

F и C, то дуги последних между AG и FC равны (предложение 15); поэтому конгруэнтны также треугольники FAC и ACG (предложение 15), и угол FAC равен углу ACG.

Отсюда следует, что во всех предыдущих случаях сумма всех трех углов сферического треугольника равна сумме обоих равных углов в четырехугольнике по исключении обоих прямых углов. Таким образом, для каждого сферического треугольника, в котором сумма трех углов есть S, можно найти четырехугольник с той же площадью, в котором имеются два прямых угла, две равные перпендикулярные [к основанию] стороны, а каждый из двух остальных углов равен $\frac{1}{2}S$.

Пусть теперь $ABCD$ (черт. 19) будет сферический четырехугольник, в котором стороны $AB = DC$ перпендикулярны к BC и каждый из углов при A и D равен $\frac{1}{2}S$. Продолжим стороны AD и BC до их пересечения в E и далее за точку E, сделаем $DE = EF$ и на продолжение BC опустим перпендикуляр FG. Всю дугу BG разделим пополам и точку деления H соединим дугами больших кругов с A и F. Треугольники EFG и

DCE конгруэнтны (предложение 15)*; следовательно, $FG = DC = AB$. Треугольники ABH и HGF также конгруэнтны, так как они прямоугольные и имеют равные катеты; следовательно, [дуги] AH и HF принадлежат *одному* кругу, дуга AHF равна π ◊, $ADEF$ также $= \pi$, угол $HAD = HFE = \frac{1}{2}S - BAH = \frac{1}{2}S - HFG = \frac{1}{2}S - HFE - EFG = \frac{1}{2}S - HAD - \pi + \frac{1}{2}S$△; следовательно, угол $HFE = \frac{1}{2}(S - \pi)$, или, что то же, равен величине вырезка $AHFDA$, который в свою очередь равен четырехугольнику $ABCD$; это легко усмотреть, если перейти от одного к другому, прибавляя сначала [к вырезку] треугольник EFG, а затем [треугольник] BAH и отнимая после этого равные им треугольники DCE и HFG. Сообразно этому $\frac{1}{2}(S - \pi)$ есть величина четырехугольника $ABCD$, а вместе с тем и величина сферического треугольника, в котором сумма трех углов равна S [9].

28) *Если три плоскости пересекаются по параллельным линиям, то сумма трех двугранных углов [ими образуемых] равна двум прямым* ○.

Пусть AA', BB', CC' (черт. 20) будут параллельные линии, образованные пересечением плоскостей (предложение 25). Возьмем на них произвольно три точки A, B, C и представим себе проходящую через них плоскость, которая, следовательно, пересекает плоскости параллелей по прямым линиям AB, AC

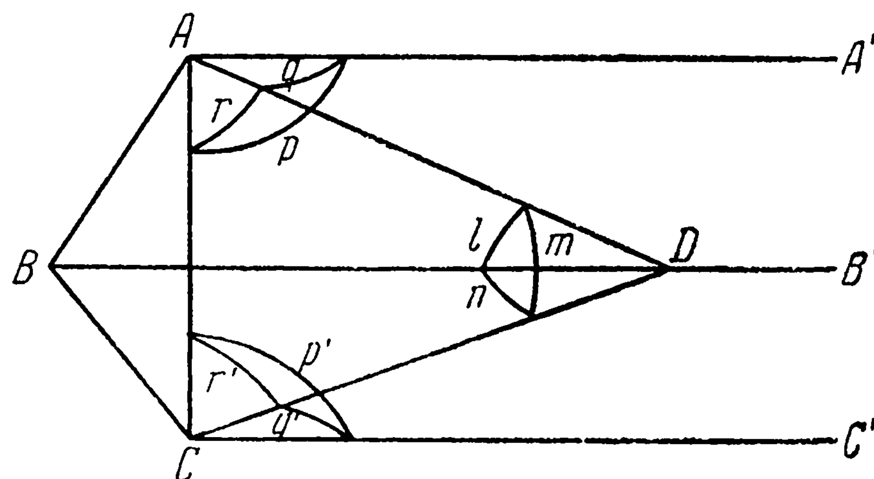
* Ссылка на предложение 15 неточна. Следует воспользоваться признаком равенства прямоугольных сферических треугольников по гипотенузе и острому углу, см. «Новые начала», ст. 88 (стр. 206).

◊ Так как большие круги AHF и ADF пересекаются в противоположных точках A и F сферы.

△ $EFG = EDC = \pi - ADC = \pi - \frac{1}{2}S$.

○ Таким образом, это предложение справедливо как в эвклидовой геометрии, так и в геометрии Лобачевского, т. е. принадлежит *абсолютной геометрии* (включающей все теоремы, справедливые независимо от аксиомы о параллельных). В геометрии Лобачевского это предложение играет особо важную роль.

и BC. Затем через прямую AC и какую-либо точку D на линии BB' проведем еще одну плоскость, которая пересечет две плоскости параллелей AA' и BB', CC' и BB' по линиям AD и DC; наклонение этой плоскости к третьей плоскости параллелей AA' и CC' обозначим через w. Углы между плоскостями, в которых лежат параллели, обозначим через X, Y, Z соответственно линиям AA', BB', CC'; пусть, далее, прямолинейные углы $BDC = a$, $ADC = b$, $ADB = c$. Представим себе описанную вокруг точки A как центра шаровую поверхность; ее пересечения с



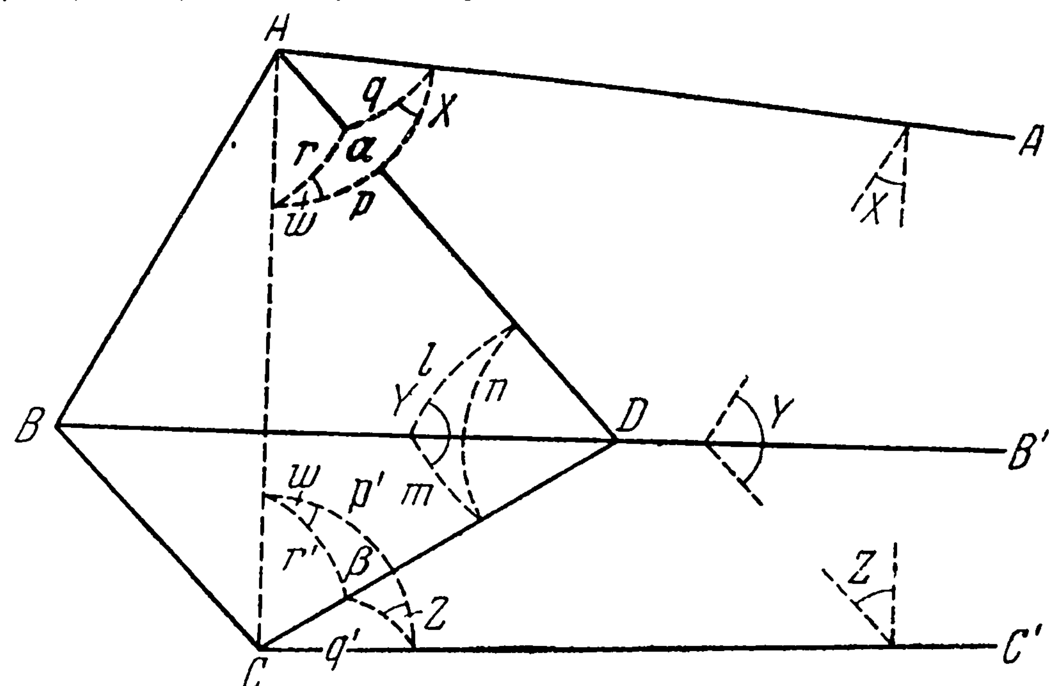
Черт. 20

прямыми AC, AD, AA' определят сферический треугольник со сторонами p, q и r, величина которого* пусть будет α ◇; в нем противолежат стороне q угол w, стороне r угол X, а следовательно, стороне p [противолежит угол] $\pi + 2\alpha - w - X$△ (предложение 27). Таким же образом [прямые] CA, CD, CC', пересекая шаровую

* Т. е. площадь.

◇ Читателю удобнее будет следить не по черт. 20 в тексте Лобачевского, а по прилагаемому чертежу 20а, где добавлены обозначения, вводимые в тексте.

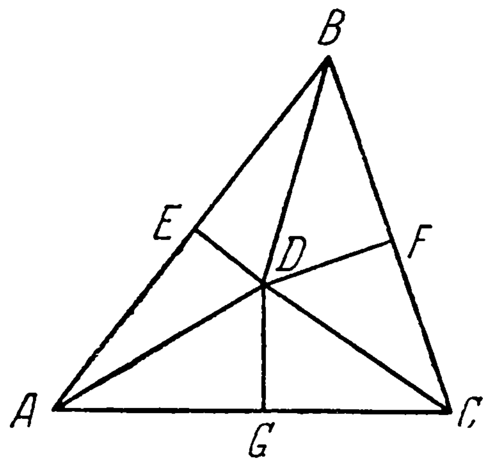
△ Если искомый третий угол обозначим через ξ, то, в силу предложения 27, $\alpha = \frac{1}{2}(w + X + \xi - \pi)$, откуда $\xi = \pi + 2\alpha - w - X$.



Черт. 20а

поверхность вокруг центра C, определяют [на ней] треугольник величины β со сторонами p', q', r' и углами: w против q', Z против r' и, следовательно, $\pi + 2\beta - w - Z$ против p'. Наконец, пересечениями шаровой поверхности вокруг D с линиями DA, DB, DC определяется сферический треугольник со сторонами l, m, n, которым противолежат углы $w + Z - 2\beta$, $w + X - 2\alpha$* и Y; следовательно, величина этого треугольника $\delta = \frac{1}{2}(X+Y+Z-\pi) - \alpha - \beta + w$. С уменьшением w уменьшается также величина треугольников α и β, так что $\alpha + \beta - w$ может быть сделано меньше любого данного числа. В треугольнике δ стороны l и m также могут быть уменьшаемы до уничтожения (предложение 21). Следовательно, треугольник δ может быть отложен одной из своих сторон l и m по большому кругу сферы сколько угодно раз и все-таки не заполнит полусферы; поэтому δ исчезает вместе с w◊: отсюда следует, что необходимо должно быть $X + Y + Z = \pi$.

29) *В прямолинейном треугольнике перпендикуляры, восставленные из середин сторон, либо* [*вовсе*] *не встречаются, либо все три пересекаются в одной точке.*



Черт. 21

Предположим, что в треугольнике ABC (черт. 21) перпендикуляры ED и DF, восставленные к сторонам AB и BC из середин E и F, пересекаются в точке D; внутри углов треугольника проведем линии DA, DB, DC.

В равных треугольниках ADE и BDE (предложение 10) $AD = BD$; также заключаем, что $BD = CD$; следовательно, ADC есть равнобедренный треугольник, а пото-

* Легко видеть, что стороне l противолежит угол, смежный с тем, который на сфере C противолежит стороне p'. Точно так же стороне m противолежит угол, смежный с тем, который на сфере A противолежит стороне p.

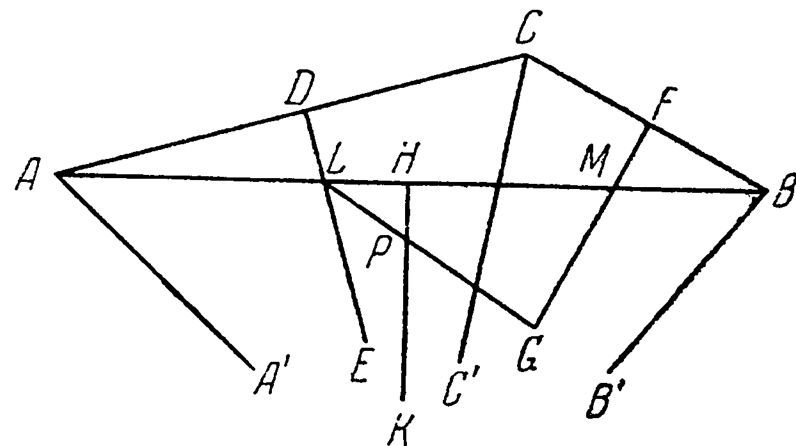
◊ Лобачевский хочет сказать, что при неограниченном убывании двух сторон l и m сферического треугольника, которое имеет место, когда точ-

му перпендикуляр, опущенный из вершины D на основание AC, падает в середину последнего G.

Доказательство не меняется и в том случае, если точка пересечения D двух перпендикуляров ED и FD падает на самую линию AC или вне треугольника.

Если поэтому примем, что два из этих перпендикуляров не пересекаются, то и третий не может с ними встретиться [10].

30) *Перпендикуляры, восставленные к сторонам прямолинейного треугольника из их середин, должны быть все три друг другу параллельны, если предположим параллельность двух из них**.



Черт. 22

Пусть в треугольнике ABC (черт. 22) линии DE, FG, HK будут перпендикуляры, восставленные к его сторонам в их серединах D, F, H. Примем первоначально, что параллельны перпендикуляры DE и FG, которые пересекают линию AB в L и M◊. Из точки L внутри угла BLE проведем произвольно прямую линию LG, которая должна встретить FG где-либо в G, как бы мал ни был угол отклонения GLE (предложение 16). Так как в треугольнике LGM перпендикуляр HK не может встретиться с MG (предложение 29), то он должен встретить LG где-либо в P; отсюда следует, что HK должна быть параллельна DE (предложение 16) и MG (предложения 18 и 25).

ка D беспредельно удаляется по параллели BB', его площадь δ стремится к нулю (неограниченно убывает отношение величины δ к площади полусферы). В равенстве $\frac{1}{2}(X+Y+Z-\pi)=\alpha+\beta+\delta-w$ правая часть стремится к нулю, а левая сохраняет постоянное значение, которое поэтому не может быть отличным от нуля.

* Это предложение дополнено в примечании [68] к тексту «Новых начал».

◊ Правильность этой конфигурации, на которой построено все дальнейшее доказательство предложения 30, разъяснена в примечании [11].

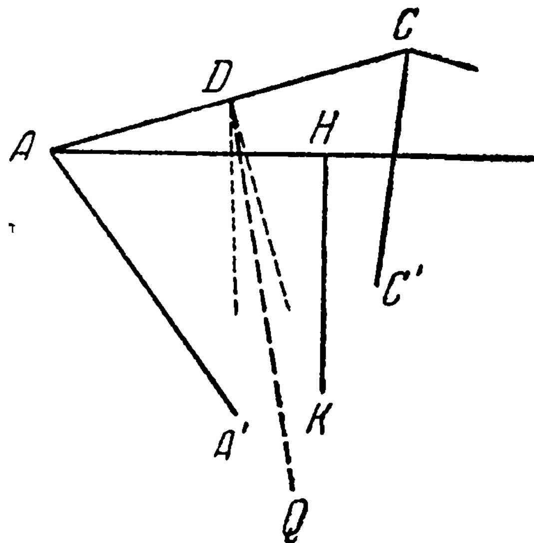
Если положим стороны $BC = 2a$, $AC = 2b$, $AB = 2c$, а противолежащие этим сторонам углы обозначим через A, B, C, то в рассмотренном сейчас случае

$$A = \Pi(b) - \Pi(c),$$
$$B = \Pi(a) - \Pi(c),$$
$$C = \Pi(a) + \Pi(b),$$

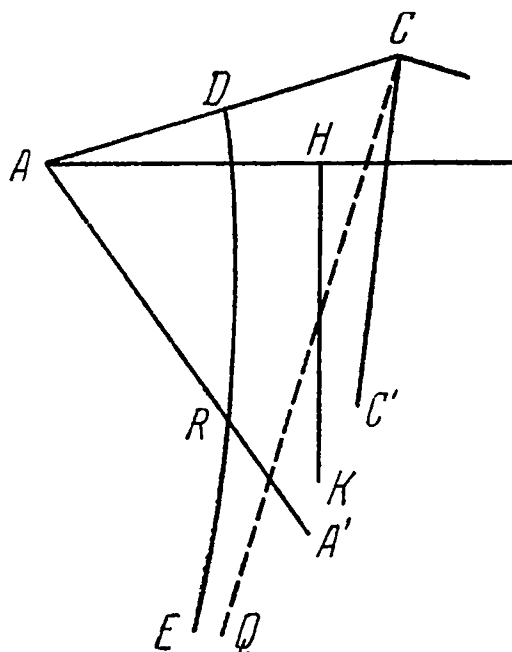
как в этом легко убедиться с помощью линий AA', BB', CC', которые проведены из точек A, B, C параллельно перпендикуляру HK, а следовательно, и двум другим перпендикулярам DE и FG (предложения 23 и 25)*.

Положим теперь, что параллельны перпендикуляры HK и FG; в таком случае третий перпендикуляр DE не может их пересечь (предложение 29); следовательно, он либо параллелен им, либо пересекает AA'◇. Последнее допущение означает не что иное, как то, что угол $C > \Pi(a) + \Pi(b)$△. Если мы этот угол

* Вряд ли здесь уместна ссылка на предложение 23. Ясно, что $\angle A'AD = \Pi(b)$ и $\angle A'AH = \Pi(c)$, откуда и вытекает первое из трех равенств; совершенно таким же образом устанавливаются и два других.



Черт. 22а

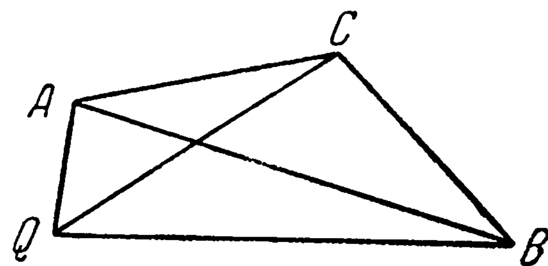


Черт. 22б

◇ Проведя через точку D прямую DQ, параллельную HK (и, значит, параллельную AA'), мы получим две следующие возможности: либо DE совпадет с DQ, т. е. $DE \parallel HK$, либо DE пересекает одну из прямых AA', HK [черт. 22а]. Но пересечь HK прямая DE по условию не может.

△ Если перпендикуляр DE встречает луч AA' в некоторой точке R (см. черт. 22б), то луч RE расположен по другую сторону прямой AA', чем прямая CC', параллельная AA'. Поэтому RE (а значит, и луч DE)

уменьшим так, чтобы он стал равен $\Pi(a) + \Pi(b)$ *, сообщая для этого линии AC новое положение CQ (черт. 23), и величину третьей стороны BQ обозначим через $2c'$, то угол CBQ при точке B, который возрос, должен, согласно доказанному выше, быть равен $\Pi(a) - \Pi(c') > \Pi(a) - \Pi(c)$, откуда следует $c' > c$ (предложение 23). Однако в треугольнике ACQ углы при A и Q равны: поэтому в треугольнике ABQ угол при Q должен быть больше, чем при точке A, следовательно, $AB > BQ$ (предложение 9); это значит $c > c'$.



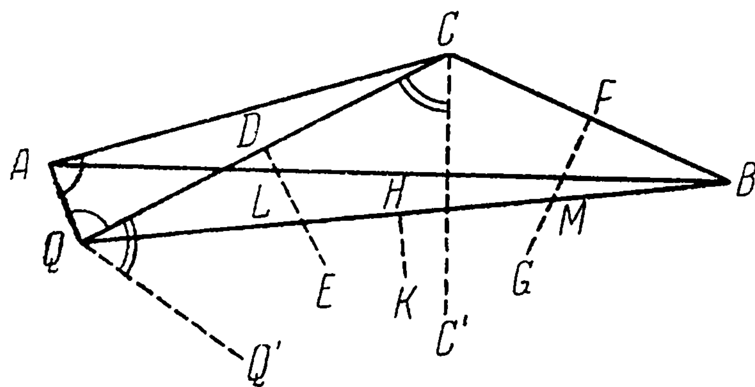
Черт. 23

31) *Предельной линией (орициклом) мы называем такую расположенную в плоскости кривую линию, у которой все перпендикуляры, восставленные из середин ее хорд, параллельны между собой.*

В согласии с этим определением можно представить себе образование предельной линии, если будем проводить к данной

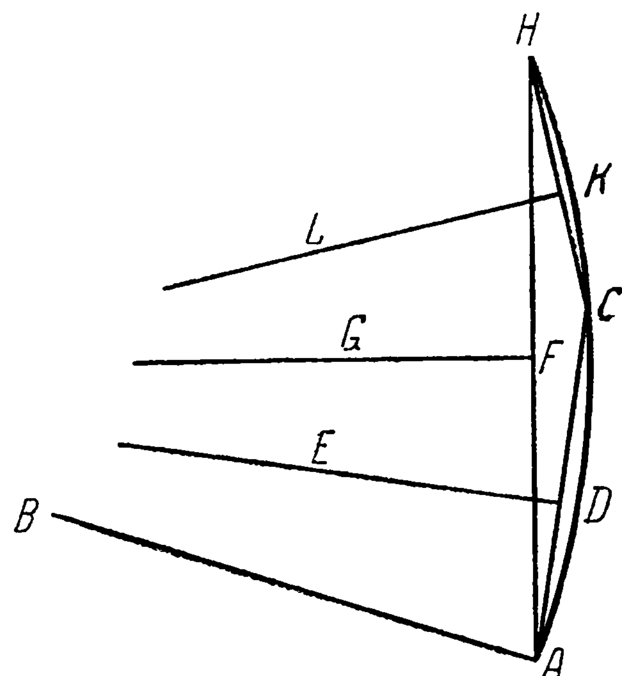
не пересекается с прямой CC' и не параллелен ей. Таким образом, параллель CQ к прямой DE идет ближе к ней, чем CC', т. е. $\angle DCC' > \Pi(b)$. Угол же FCC' попрежнему равен $\Pi(a)$. Таким образом, $\angle C > \Pi(a) + \Pi(b)$.

* Установив предыдущее неравенство, автор вращает сторону $CA = 2b$ вокруг точки C по направлению к CB. Длины a и b остаются при этом без изменения, вместе с тем сохраняет свое значение и сумма $\Pi(a) + \Pi(b)$; угол же C уменьшается. Поэтому наступит момент, в который $C = \Pi(a) + \Pi(b)$. Этот момент и изображен на черт. 23, который мы здесь для ясности пополняем (черт. 23а). Если теперь разделим угол QCB лучом CC' так, чтобы $\angle DCC' = \Pi(b)$, $\angle FCC' = \Pi(a)$, то оба луча DE и FG будут параллельны CC', а потому будут параллельны между собой. С другой стороны, $\angle Q'QD = \angle C'CD = \Pi(b)$. Поэтому $\angle BQD < \angle QCC' < \angle QCB$; отсюда следует $BQ > CB$. Совершенно аналогичным образом докажем, что $BQ > QC$, т. е. $BQ = c$ остается наибольшей стороной в треугольнике BCQ. Мы находимся поэтому в условиях уже рассмотренного случая. Перпендикуляры DE и FG пересекают сторону QB в точках L и M, причем середина H сторо-



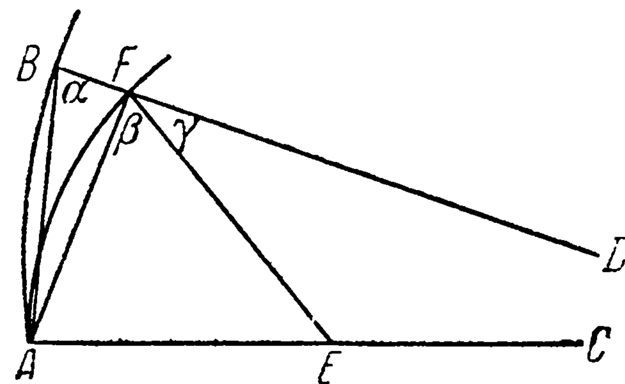
Черт. 23а

прямой AB (черт. 24) из данной на ней точки A под различными углами $CAB = \Pi(a)$ отрезки $AC = 2a$; конец C такого отрезка будет лежать на предельной линии, точки которой можно, таким образом, постепенно определять. Перпендикуляр DE к хорде AC, восставленный из ее середины D, будет параллелен линии AB, которую мы будем называть *осью предельной линии*. Таким же образом каждый перпендикуляр FG, восставленный из середины какой-либо хорды AH, будет параллелен AB; поэтому это свойство должно принадлежать также каждому перпендикуляру KL, восставленному из середины K хорды CH, между какими бы двумя точками C и H предельной линии она ни была проведена (предложение 30)*. Этого рода перпендикуляры должны поэтому без отличия от AB называться *осями предельной линии* [12], [13].



Черт. 24

32) *Круг, радиус которого возрастает, переходит в предельную линию.*



Черт. 25

Пусть AB (черт. 25) будет хорда предельной линии; из ее концов A и B проведем две оси AC и BD, которые, следовательно, образуют с хордой два равных угла $BAC = ABD = \alpha$

ны BQ лежит между ними. А так как перпендикуляры DE и FG между собой параллельны, то им параллелен и третий перпендикуляр HK, причем имеют место три равенства, установленные выше.

* Ввиду исключительной важности всех соображений, содержащихся в настоящем предложении, они подробнее изложены с различных точек зрения в примечании [12], которое полезно прочесть уже при первом ознакомлении с текстом.

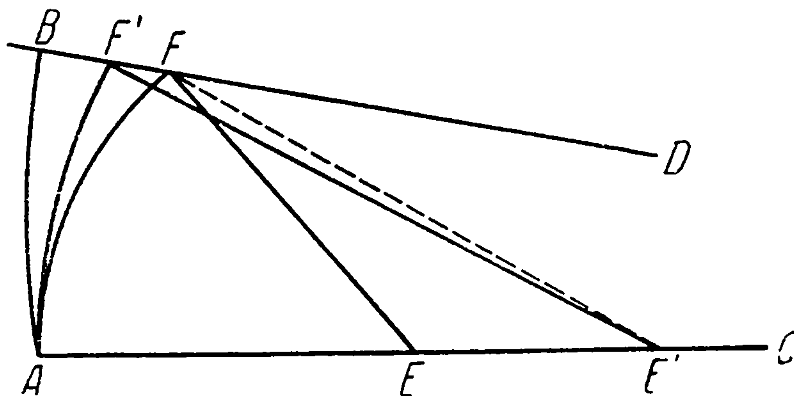
(предложение 31). На одной из этих осей AC возьмем где-либо точку E, примем ее за центр круга AF от начальной точки A оси AC до ее пересечения с другой осью BD в точке F*. Соответствующий точке F радиус круга FE образует по одну сторону угол $AFE = \beta$ с хордой AF, а по другую сторону угол $EFD = \gamma$ с осью BD. Отсюда вытекает, что содержащийся между двумя хордами угол $BAF = \alpha - \beta < \beta + \gamma - \alpha$° (предложение 22); следовательно, $\alpha - \beta < \frac{1}{2}\gamma$. Однако угол γ уменьшается до нуля как вследствие движения центра E при неизменном положении точки F (предложение 21), так и вследствие приближения точки F к B по оси BF при неизменном положении центра E (предложение 22)△, отсюда следует, что при таком

---

* Точка F лежит на луче BD, т. е. расположена относительно B со стороны точки D. Из этого следует, что угол AFD является внешним углом треугольника ABF. В самом деле, $\angle AFD > \angle AFE = \angle FAE$; между тем, если бы точка F лежала по другую сторону от B, чем точка D, то было бы $\angle AFD < \angle ABD = \angle BAD < \angle FAE$.

° Оси AC и BD, проведенные через концы хорды AB предельной линии, образуют с этой хордой равные углы (теорема 4 в примечании [12]) Поэтому $\angle BAF = \angle BAC - \angle FAE = \alpha - \beta$. С другой стороны, внешний угол AFD треугольника ABF больше суммы внутренних с ним не смежных углов $BAF + ABF$, т. е. $\beta + \gamma > \alpha - \beta + \alpha$, что совпадает с неравенством, приведенным в тексте. Самое же предложение о том, что внешний угол больше суммы внутренних с ним не смежных, вытекает из заключительных соображений предложения 22, на которое Лобачевский ссылается.

△ Возьмем произвольно малый угол ε и из точки F проведем луч FE', образующий с FD угол $DFE' < \varepsilon$. Тогда (черт. 25а) $FE' < FE + EE' = AE +$

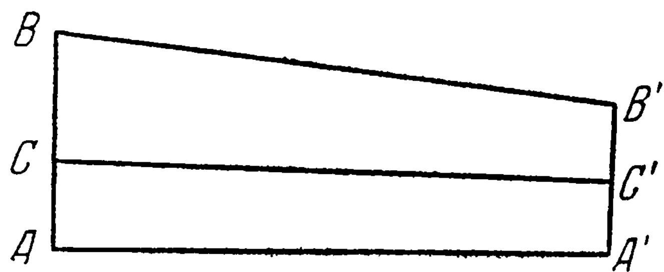


Черт. 25а

уменьшении угла γ исчезает также и угол $\alpha - \beta$, т. е. взаимное наклонение двух хорд AB и AF, а вместе с тем [исчезает] и расстояние точки B на предельной линии от точки F на круге.

Поэтому предельная линия может называться также *кругом с бесконечно большим радиусом.*

33) Пусть $AA' = BB' = x$ (черт. 26) будут две линии, параллельные в сторону от A к A', а их параллели служат осями двух предельных дуг (дуг на двух предельных линиях) $AB = s$, $A'B' = s'$; тогда



Черт. 26

$$s' = se^{-x},$$

где e не зависит ни от дуг s и s', ни от прямой x, т. е. от расстояния дуги s' от s.

Чтобы это доказать, примем, что отношение дуги s к s' равно отношению двух целых чисел n и m. Между двумя осями AA', BB' проведем еще третью ось CC', которая, таким образом, отсекает от дуги AB часть $AC = t$, а от дуги $A'B'$ с той же стороны — часть $A'C' = t'$. Пусть теперь отношение t к s равно отношению двух целых чисел p и q, так что

$$s = \frac{n}{m} s'; \quad t = \frac{p}{q} s.$$

Разделим теперь s осями на nq равных частей; тогда таких частей окажется mp на s' и np на t. Между тем эти равные части на s и t соответствуют также равным частям на s' и t';

$+EE' = AE'$, т. е. точка F будет находиться внутри окружности с центром E' и радиусом $E'A$. Точка же B находится (см. предыдущую сноску) вне этой окружности. Поэтому последняя пересечет прямую BD в точке F', лежащей между B и F. Отсюда следует, что $\angle DF'E' < \angle DFE' < \varepsilon$. Таким образом, если точка E переместится в положение E' и будет двигаться далее вправо, то угол γ станет меньше ε. В силу произвольной малости ε отсюда следует, что при удалении точки E в бесконечность (в сторону точки C) угол γ стремится к нулю.

следовательно [14],

$$\frac{t'}{t} = \frac{s'}{s}.$$

Таким образом, где бы мы ни взяли две дуги t и t' между двумя осями AA' и BB', отношение t к t' остается то же, пока между ними остается то же расстояние x. Если поэтому для $x = 1$ положим $s = es'$, то для любого x должно быть [15]

$$s' = se^{-x}.$$

Так как e есть неизвестное число, подчиненное только условию $e > 1$, а, с другой стороны, единица для измерения длины x может быть выбрана произвольно, то последнюю можно для упрощения вычислений выбрать так, что под e можно будет разуметь основание неперовых логарифмов.

Здесь можно еще отметить, что $s' = 0$ для $x = \infty$; поэтому расстояние между двумя параллелями (предложение 24) не только уменьшается, но при продолжении их в сторону параллелизма в конце концов (zuletzt) совершенно исчезает. Параллельные линии имеют, таким образом, характер асимптот.

34) *Предельной поверхностью* (орисферой) называется поверхность, которая получается вращением предельной линии вокруг одной из своих осей, каковая вместе со всеми другими осями предельной линии будет также осью поверхности*.

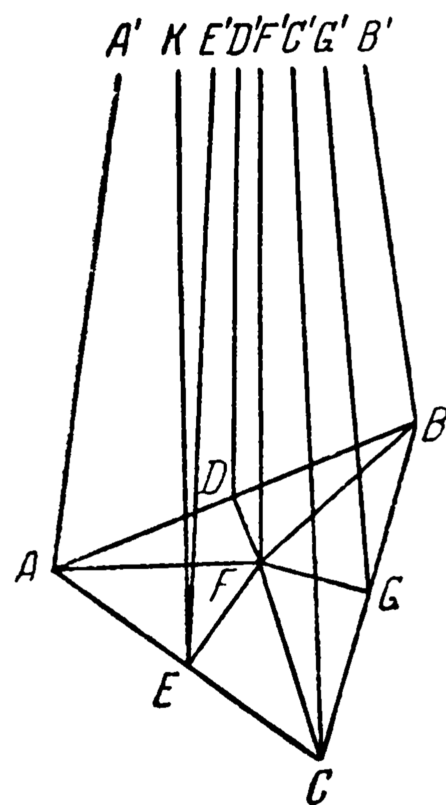
Хорда [предельной поверхности] *наклонена под равными углами к осям, проведенным через ее конечные точки, где бы на поверхности эти две точки ни были взяты.*

Пусть A, B, C (черт. 27) будут три точки на предельной поверхности, AA' пусть будет ось вращения, BB' и CC' — две другие оси; следовательно, AB и AC суть хорды, к которым оси наклонены под равными углами $A'AB = B'BA$, $A'AC = C'CA$ (предложение 31)◊; две оси BB' и CC', проведенные через концы

* Предложение 34 составляет главную основу всего дальнейшего развития неэвклидовой геометрии. Примечание [16] содержит тщательный его анализ и ряд указаний для уяснения дальнейшего текста.

◊ См. также теорему 4 в примечании [12] на стр. 480.

третьей хорды BC, также параллельны и лежат в одной плоскости (предложение 25). Перпендикуляр DD', восставленный из середины D хорды AB в плоскости двух параллелей, должен быть параллелен трем осям AA', BB', CC' (предложения 23 и 25)*, такой же перпендикуляр EE' к хорде AC в плоскости параллелей AA', CC' будет параллелен трем осям AA', BB', CC' и перпендикуляру DD'. Угол между плоскостью, в которой расположены параллели AA' и BB', и плоскостью треугольника ABC обозначим через $\Pi(a)$, где a может быть [числом] положительным, отрицательным или нулем◇. Если a положительно, то проведем $FD = a$ внутрь треугольника ABC в его плоскости перпендикулярно к хорде AB в ее середине D. Если a будет числом отрицательным, то нужно провести $FD = a$ вне треугольника по другую сторону хорды AB; если $a = 0$, то точка F совпадает с D. Во всех случаях получаем два равных прямоугольных треугольника AFD и DBF; следовательно, $FA = FB$. Теперь из точки F восставим перпендикуляр FF' к плоскости треугольника ABC.



Черт. 27

Так как угол $D'DF = \Pi(a)$, $DF = a$, то [линия] FF' параллельна DD' и линии EE', с которой она [поэтому] также лежит в одной плоскости, перпендикулярной к плоскости треугольника ABC△. Если теперь представим себе перпендикуляр EK,

* Ссылка на предложение 23 вряд ли обоснована. Первое утверждение, что перпендикуляр DD' параллелен осям AA' и BB', основано на самом определении предельной линии (предложение 31); вследствие предложения 25 он параллелен также оси CC'.

◇ Определение угла $\Pi(a)$ для отрицательных значений a см. на стр. 31 и в примечании [8].

△ Плоскость $D'DF$ перпендикулярна к прямой AB, а потому перпендикулярна и к плоскости ABC [это предложение не фигурирует среди основ-

восставленный к EF в плоскости параллелей EE' и FF', то он будет также перпендикулярен к плоскости треугольника ABC (предложение 13) и к лежащей в этой плоскости прямой AE (предложение 11); поэтому [линия] AE, перпендикулярная к EK и EE', будет также перпендикулярна к FE (предложение 11)*.

Треугольники AEF и FEC равны, как прямоугольные с равными катетами; поэтому $AF = FC = FB$. Перпендикуляр из вершины F равнобедренного треугольника BFC на основание BC проходит через середину последнего G; плоскость, проходящая через этот перпендикуляр FG и линию FF', должна быть перпендикулярна к плоскости треугольника ABC и пересекать плоскость параллелей BB', CC' по линии GG', которая также параллельна AA' и BB' (предложение 25); так как теперь CG перпендикулярна к FG, а потому и к GG', то угол $C'CG = B'BG$ (предложение 23).

Отсюда следует, что для предельной поверхности каждая из ее осей может быть рассматриваема как ось поверхности [16].

Главной плоскостью мы будем называть каждую плоскость, проведенную через ось предельной поверхности. Сообразно этому, каждая *главная плоскость* сечет предельную поверхность

ных 15 предложений (см. сноску ◊ на стр. 16), но явно не зависит от постулата о параллельных линиях]. Перпендикуляр FF', восставленный к прямой DF в плоскости $D'DF$, будет перпендикулярен и к плоскости ABC (предложение 13), или, иначе, перпендикуляр FF', восставленный из точки F к плоскости ABC, лежит в плоскости $D'DF$. А так как $\angle D'DF = \Pi(DF)$, то луч DD' параллелен лучу FF'.

* Прямая AE перпендикулярна к линии EE'; EF есть проекция линии EE' на плоскость ABC; поэтому прямая AE перпендикулярна к EE. Казалось бы, можно было непосредственно сослаться на предложение о перпендикуляре к проекции и к проектируемой линии (теорема о трех перпендикулярах). Но обычное доказательство этого предложения существенно предполагает, что наклонная EE' и проектирующий перпендикуляр FF' пересекаются. Вследствие этого Лобачевский восполняет это доказательство для того случая, когда луч EE' параллелен лучу FF'.

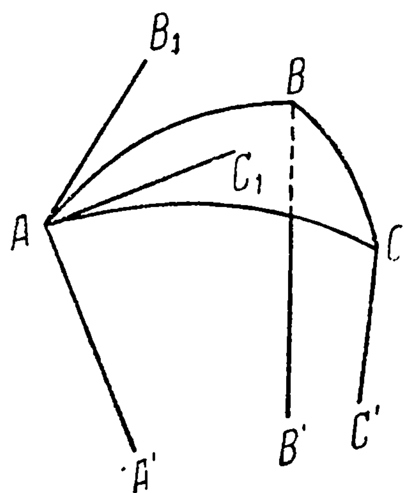
по предельной линии*, между тем как при другом положении секущей плоскости это пересечение есть круг◊. Три главные плоскости, пересекающие друг друга, образуют друг с другом углы, сумма которых равна π (предложение 28). Эти углы мы будем рассматривать как углы в предельном треугольнике, сторонами которых служат дуги предельных линий, образуемых пересечением предельной поверхности этими тремя главными плоскостями△.

---

* Это особенно легко доказать, если исходить из другого определения предельной линии и поверхности (примечание [13] к предложению 31 и примечание [16] к настоящему предложению).

◊ Если A, B, C — три точки сечения, не лежащие в одной главной плоскости, то, как доказано выше (стр. 50, черт. 27), в плоскости треугольника ABC существует такая точка F, что $AF = BF = CF$. Иначе говоря, через точки A, B, C можно провести окружность. Перпендикуляр FF' из центра F этой окружности представляет собой ось поверхности. Плоскость $A'AFF'$ рассекает предельную поверхность по предельной линии, проходящей через A и пересекающей ось FF' в некоторой точке F''. Эта же плоскость $A'AFF'$ пересекается с плоскостью треугольника ABC по прямой FA. При вращении вокруг прямой FF' предельная линия AF'' даст предельную поверхность, прямая AF даст секущую плоскость, а точка A пересечения линий AF и AF'' даст окружность ABC. По этой окружности и пересекает предельную поверхность плоскость треугольника ABC.

△ Пусть ABC будет *предельный треугольник*, т. е. треугольник, составленный на предельной поверхности отрезками AB, BC, CA предельных линий (черт. 27а). Плоскости этих предельных линий пересекаются по осям AA', BB', CC'. Согласно предложению 28, сумма двугранных углов, этими плоскостями образуемых, равна π. Если в вершине Aпроведем касательные AB_1 и AC_1 к предельным линиям AB и AC, то они образуют линейный угол B_1AC_1 двугранного угла AA' (см. теорему 5 в примечании [12], стр. 480); с другой стороны, угол B_1AC_1 между касательными AB_1 и AC_1 естественно принять (что и делает Лобачевский) за величину угла A предельного треугольника; то же относится к углам B и C. Поэтому в предельном треугольнике ABC сумма углов $A + B + C = \pi$.



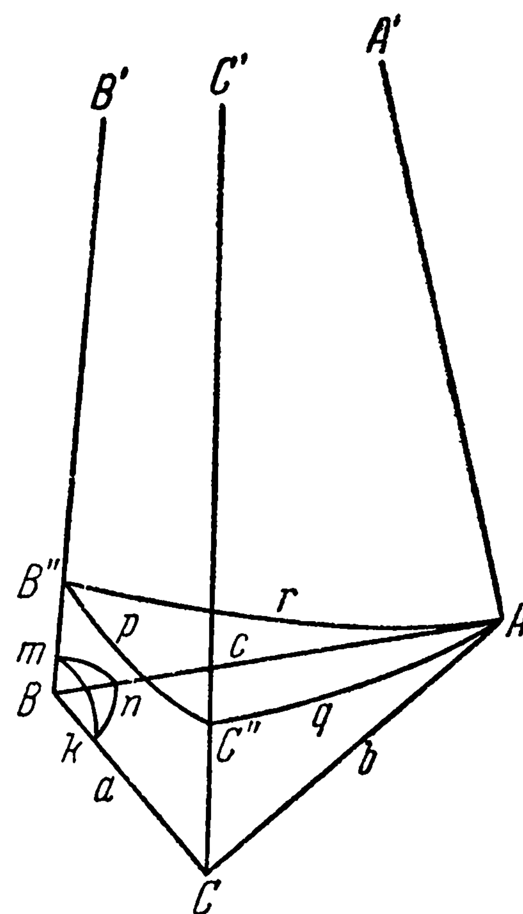
Черт. 27а

В предельных треугольниках стороны и углы связаны поэтому теми же зависимостями, которые устанавливаются в обыкновенной геометрии для прямолинейных треугольников [17], [18]*.

35) В дальнейшем мы будем обозначать величину линий буквой со штрихом, например x', чтобы указать, что таковая находится к другой линии, обозначаемой той же буквой без штриха, в соотношении, выраженном уравнением [19]

$$\Pi(x) + \Pi(x') = \frac{1}{2}\pi.$$

Пусть теперь ABC (черт. 28) будет прямолинейный прямоугольный треугольник, в котором гипотенуза $AB = c$, катеты $AC = b$, $BC = a$, а противолежащие им углы суть $BAC = \Pi(\alpha)$, $ABC = \Pi(\beta)$◇. В точке A восстановим перпендикуляр AA' к плоскости треугольника ABC и из точек B и C проведем BB' и CC' параллельно AA'. Плоскости, в которых эти три параллели лежат, образуют между собой углы $\Pi(\alpha)$ при AA', прямой при CC' (предложения 11 и 13) и, следовательно, $\Pi(\alpha')$ при BB' (предложение 28)△.



Черт. 28

---

* Последнее соображение устанавливает факт весьма большой важности, обстоятельному выяснению которого посвящены примечания [17], [18].

◇ Иными словами, каждый из острых углов прямоугольного треугольника ABC задается его гиперболическим значением α и β. О гиперболическом значении углов см. примечание [19].

△ Двугранный угол (AA') измеряется углом A треугольника ABC', гиперболическое значение которого обозначено через α; следовательно, $(AA') = \Pi(\alpha)$. Плоскость $A'ACC'$, проходящая через перпендикуляр AA' к плоскости ABC, перпендикулярна к последней. Прямая BC, перпендикулярная к линии пересечения взаимно перпендикулярных плоскостей ACB и $A'ACC'$ и лежащая в первой из них, перпендикулярна ко второй (ссылка на предложение 13 в тексте). Поэтому плоскость $B'BCC'$, про-

Пересечения линий BA, BC, BB' с шаровой поверхностью, описанной вокруг точки B как центра, определяют сферический треугольник mnk, в котором стороны $mn = \Pi(c)$, $kn = \Pi(\beta)$, $mk = \Pi(a)$; противолежащие им углы суть $\Pi(b)$, $\Pi(\alpha')$, $\frac{1}{2}\pi$*.

Поэтому вместе с существованием прямолинейного треугольника со сторонами a, b, c и противолежащими им углами $\Pi(\alpha)$, $\Pi(\beta)$, $\frac{1}{2}\pi$ нужно допустить также существование сферического треугольника (черт. 29) со сторонами $\Pi(c)$, $\Pi(\beta)$, $\Pi(a)$ и противолежащими углами

$$\Pi(b),\ \Pi(\alpha'),\ \frac{1}{2}\pi.$$

Но и, обратно, для этих двух треугольников существование сферического треугольника влечет за собой существование прямолинейного, который поэтому также может иметь стороны a, α', β и противолежащие им углы $\Pi(b')$, $\Pi(c)$, $\frac{1}{2}\pi$ ◊.

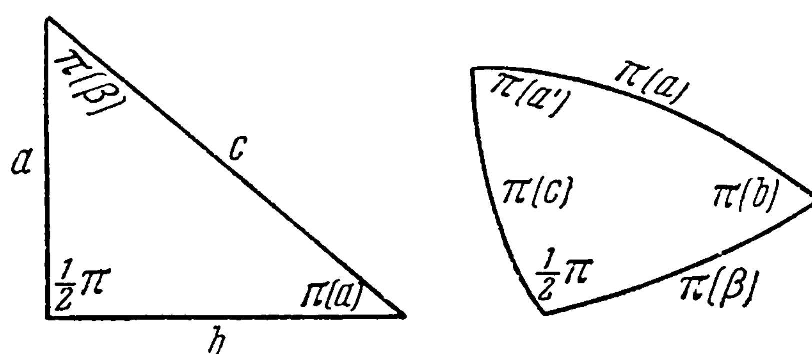
Поэтому от a, b, c, α, β можно перейти к b, a, c, β, α, а также к a, α', β, b', c [20].

ходящая через BC, перпендикулярна к плоскости $A'ACC'$, двугранный угол (CC') прямой. Сумма двугранных углов (AA'), (BB'), (CC') равна π (ссылка на предложение 28 в тексте); поэтому угол (BB') дополняется углом (AA') до прямого; его гиперболическое значение есть α'.

* Вершины m, n, k сферического треугольника на чертеже Лобачевского не обозначены; вершина m лежит на прямой BB', n — на BA, k — на BC. Сторона mn сферического треугольника измеряется углом $B'BA$; так как луч BB' параллелен AA', а AA' перпендикулярен к AB, то этот угол есть $\Pi(c)$; сторона mk таким же образом измеряется углом $B'BC = \Pi(a)$; сторона же kn измеряется углом B прямолинейного треугольника ABC, гиперболическое значение которого обозначено через β. Угол m сферического треугольника измеряется двугранным углом BB' и поэтому равен, как было показано, $\Pi(\alpha')$; угол k измеряется двугранным углом BC или его линейным углом $C'CA$, а потому равен $\Pi(b)$. Плоскость $B'BAA'$, проходящая через AA', перпендикулярна к плоскости ABC; поэтому двугранный угол (BA), которым измеряется угол n сферического треугольника, прямой.

◊ Доказательство этого факта изложено в примечании [20], с которым рекомендуется ознакомиться уже при первом чтении.

Представим себе предельную поверхность, проходящую через точку A и имеющую осью [линию] AA' (черт. 28); [эта поверхность] пересечет две другие оси BB' и CC' в B'' и C'', а пересечения ее с плоскостями параллелей образуют предельный треугольник, стороны которого $B''C''=r$, $C''A=q$, $B''A=r$, противолежащие же им углы суть $\Pi(\alpha), \Pi(\alpha')$, $\frac{1}{2}\pi$, следовательно*, $p=r\sin\Pi(\alpha)$, $q=r\cos\Pi(\alpha)$.



Черт. 29

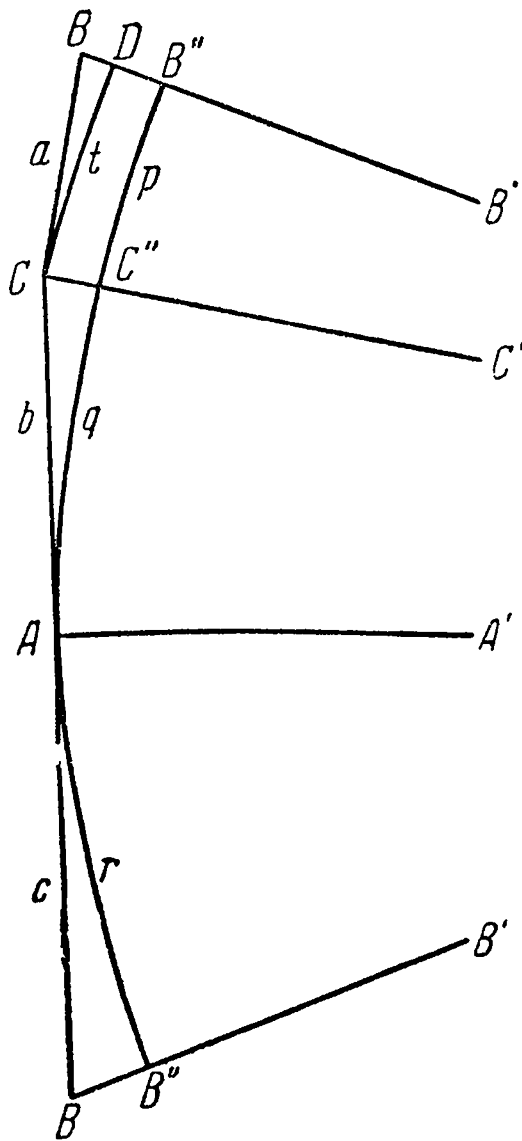
Теперь нарушим соединение трех главных плоскостей по линии BB' и развернем их таким образом, чтобы они вместе со всеми находящимися в них линиями расположились в одной плоскости; в этой плоскости дуги p, r, s соединятся в одну дугу предельной линии, проходящей через точку A и имеющей AA' своей осью (черт. 30)◊; при этом по одну сторону [оси AA'] расположатся дуги q и p; сторона b треугольника, которая в точке A перпендикулярна к AA'; ось CC', идущая от конца стороны b параллельно AA' и проходящая через точку соединения C'' [дуг] p и q; сторона a, перпендикулярная к CC' в точке C, а также выходящая из конца этой стороны ось BB', параллельная AA' и проходящая через конец B'' дуги p.

---

* В прямоугольном предельном треугольнике стороны и углы связаны уравнениями обыкновенной (т. е. эвклидовой) тригонометрии.

◊ Потому что это будут предельные линии на плоскости, имеющие в каждой из точек схождения A и C'' общую ось.

По другую сторону AA' будут лежать: сторона c, перпендикулярная к AA' в точке A, и ось BB', параллельная AA' и идущая от конца [стороны] c через конечную точку B'' дуги r.



Черт. 30

Величина линии CC'' зависит от b, каковую зависимость мы выразим через $CC'' = f(b)$. Таким же образом будет $BB'' = f(c)$*.

Если, принимая CC' за ось, проведем из точки C новую предельную линию до пересечения D с осью BB' и обозначим дугу CD через t, то

$$BD = f(a),$$

$$BB'' = BD + DB'' = BD + CC''$$

и, следовательно,

$$f(c) = f(a) + f(b).$$

Кроме того, мы замечаем (предложение 33), что

$$t = pe^{f(b)} = r \sin \Pi(\alpha)\, e^{f(b)}.$$

Если бы перпендикуляр к плоскости треугольника ABC (черт. 28) был восставлен не в точке A, а в B, то линии c и r остались бы те же, дуги q и t перешли бы в t и q, прямые a и b в b и a, а угол $\Pi(\alpha)$ заменился бы углом $\Pi(\beta)$◊; следовательно, мы

* Если в какой-либо точке A предельной линии проведем к ней касательную $AC = b$ и из точки C проведем ось CC', параллельную AA', которая встретит предельную линию в точке C'', то длина отрезка CC'' будет функцией от b, которую Лобачевский и обозначает через $f(b)$. Соответственно (по другую сторону) $BB'' = f(c)$.

◊ Иначе говоря, если мы здесь поменяем ролями вершины A и B острых углов (а значит, поменяем ролями и катеты a, b), то черт. 30 примет указанный здесь вид (черт. 30а). Из сравнения этого чертежа с черт. 30 мы легко найдем

$$BC'' = t,\ CE = q,\ BA'' = r.$$

имели бы

$$q = r \sin \Pi(\beta) e^{f(a)};$$

подставляя вместо q его значение *, находим

$$\cos \Pi(\alpha) = \sin \Pi(\beta) e^{f(a)},$$

заменяя же α и β через b' и c, получим◇

$$\sin \Pi(b) = \sin \Pi(c) e^{f(a)},$$

и, умножая на $e^{f(b)}$:

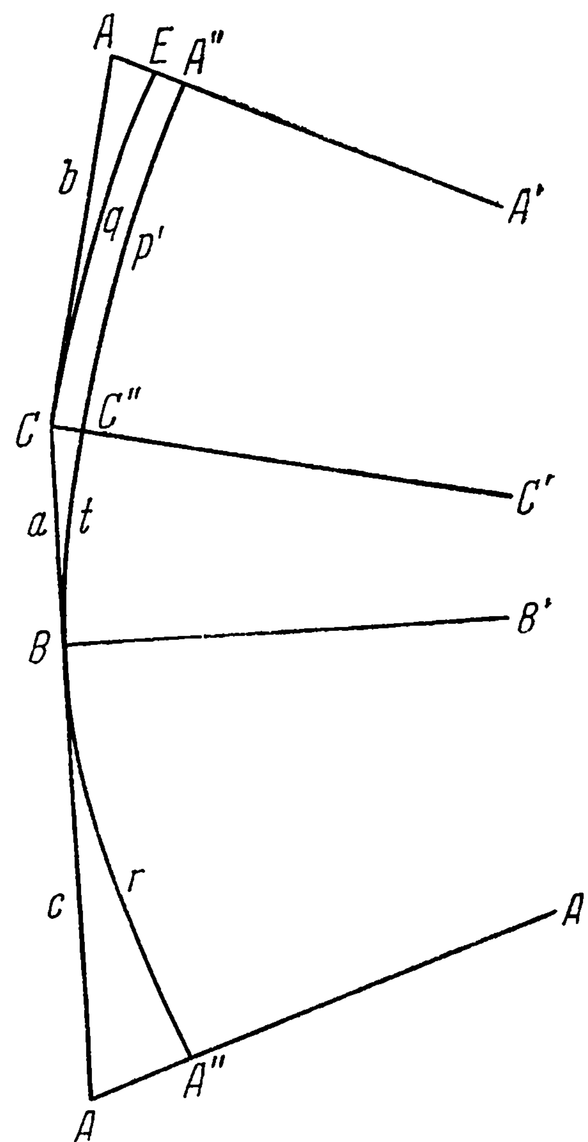
$$\sin \Pi(b) e^{f(b)} = \sin \Pi(c) e^{f(c)}.$$

Отсюда следует также△

$$\sin \Pi(a) e^{f(a)} = \sin \Pi(b) e^{f(b)}.$$

Отрезок $A''C''$ обозначим через p'; тогда (предложение 33)

$$q = p'e^{CC''} = p'e^{f(a)}.$$



Черт. 30а

Соотношение $p' = r \sin \Pi(\beta)$ легко следует из ранее имевшегося соотношения $p = r \sin \Pi(\alpha)$ заменой p на p', а $\Pi(\alpha)$ — на $\Pi(\beta)$. Таким образом,

$$q = p'e^{f(a)} = r \sin \Pi(\beta) e^{f(a)}.$$

* Подстановка производится из найденной выше формулы $q = r \cos \Pi(\alpha)$.

◇ Согласно установленной выше возможности перейти от элементов a, b, c, α, β к элементам a, α', β, b', c; при этом

$$\cos \Pi(b') = \cos\left[\frac{1}{2}\pi - \Pi(b)\right] = \sin \Pi(b)$$

△ В силу равноправия катетов a и b имеем из предыдущего соотношения:

$$\sin \Pi(a) e^{f(a)} = \sin \Pi(c) e^{f(c)},$$

т. е. $\sin \Pi(a) e^{f(a)} = \sin \Pi(b) e^{f(b)}$. Так как катетам a и b можно придавать произвольные, друг от друга не зависящие значения, то

$$\sin \Pi(a) e^{f(a)} = \text{const}.$$

Полагая в этом соотношении аргумент равным нулю, Лобачевский находит, что эта константа равна единице, т. е.

$$\sin \Pi(a) = e^{-f(a)}.$$

Так как, однако, прямые a и b друг от друга не зависят, а, с другой стороны, при $b = 0$, $f(b) = 0$, $\Pi(b) = \frac{1}{2}\pi$, то для любой прямой линии a

$$e^{-f(a)} = \sin \Pi(a);$$

сообразно этому*

$$\sin \Pi(c) = \sin \Pi(a) \sin \Pi(b)^{\diamond},$$
$$\sin \Pi(\beta) = \cos \Pi(\alpha) \sin \Pi(a).$$

Отсюда изменением букв получаем

$$\sin \Pi(\alpha) = \cos \Pi(\beta) \sin \Pi(b),$$
$$\cos \Pi(b) = \cos \Pi(c) \cos \Pi(\alpha),$$
$$\cos \Pi(a) = \cos \Pi(c) \cos \Pi(\beta)^{\triangle}.$$

Если в сферическом прямоугольном треугольнике (черт. 29) обозначим стороны $\Pi(c)$, $\Pi(\beta)$, $\Pi(a)$ с противолежащими им углами $\Pi(b)$, $\Pi(\alpha')$ буквами a, b, c, A, B, то найденные уравнения принимают форму, которая, как известно, устанавливается для прямоугольного треугольника в сферической тригонометрии, именно:

$$\sin a = \sin c \sin A,$$
$$\sin b = \sin c \sin B,$$
$$\cos A = \cos a \sin B,$$
$$\cos B = \cos b \sin A,$$
$$\cos c = \cos a \cos b;$$

---

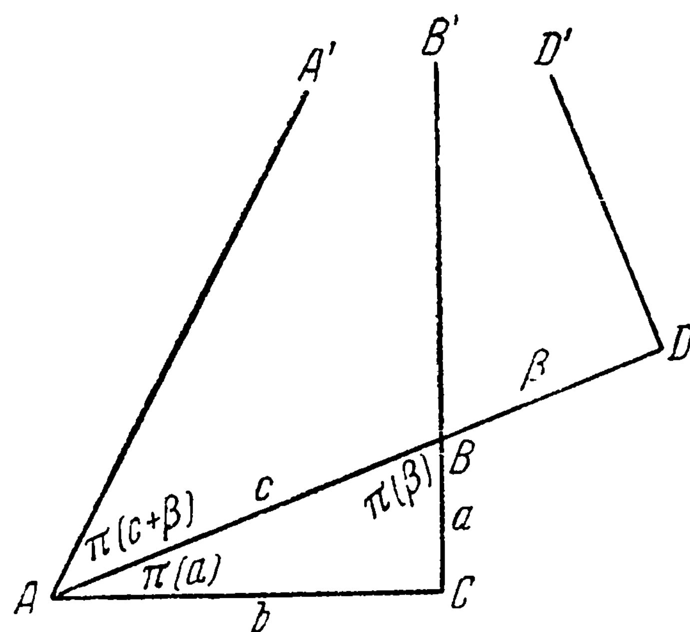
* Из соотношения $f(c) = f(a) + f(b)$ получаем $e^{-f(c)} = e^{-f(a)} e^{-f(b)}$ или $\sin \Pi(c) = \sin \Pi(a) \sin \Pi(b)$.

◇ Это соотношение получается из предыдущего при помощи той же замены, которая указана в сноске ◇ на предыдущей странице.

△ Первое из этих трех уравнений получаем из предыдущего, заменяя друг другом катеты a и b, а вместе с тем и противолежащие им углы $\Pi(\alpha)$ и $\Pi(\beta)$; второе получим из первого при помощи подстановки, указанной в сноске ◇ на предыдущей странице; третье получим из второго вновь транспозицией катетов и прилежащих им острых углов.

от этих уравнений можно перейти к уравнениям любых сферических треугольников. Таким образом, сферическая тригонометрия не зависит от того, равна ли в прямолинейном треугольнике сумма трех углов двум прямым или нет.

36) Теперь рассмотрим снова прямолинейный прямоугольный треугольник ABC (черт. 31), стороны которого суть a, b, c, а противолежащие углы суть $\Pi(\alpha)$, $\Pi(\beta)$, $\frac{1}{2}\pi$. Продолжим гипотенузу c за точку B и сделаем $BD = \beta$; из точки D восстановим к BD перпендикуляр DD', который, следовательно, будет параллелен BB', т. е. продолжению стороны a за точку B. Из точки A проведем еще к DD' параллель AA', которая в то же время будет параллельна CB' (предложение 25). Поэтому угол $A'AD = \Pi(c + \beta)$, $A'AC = \Pi(b)$; следовательно,



Черт. 31

$$\Pi(b) = \Pi(\alpha) + \Pi(c + \beta).$$

Если отложим β на гипотенузе c от точки B, затем из конечной точки D (черт. 32)* восставим к AB внутрь треугольника перпендикуляр DD' и из точки A проведем AA' параллельно DD', то BC с ее продолжением CC' будет третьей параллелью; тогда угол $CAA' = \Pi(b)$, $DAA' = \Pi(c - \beta)$; следовательно,

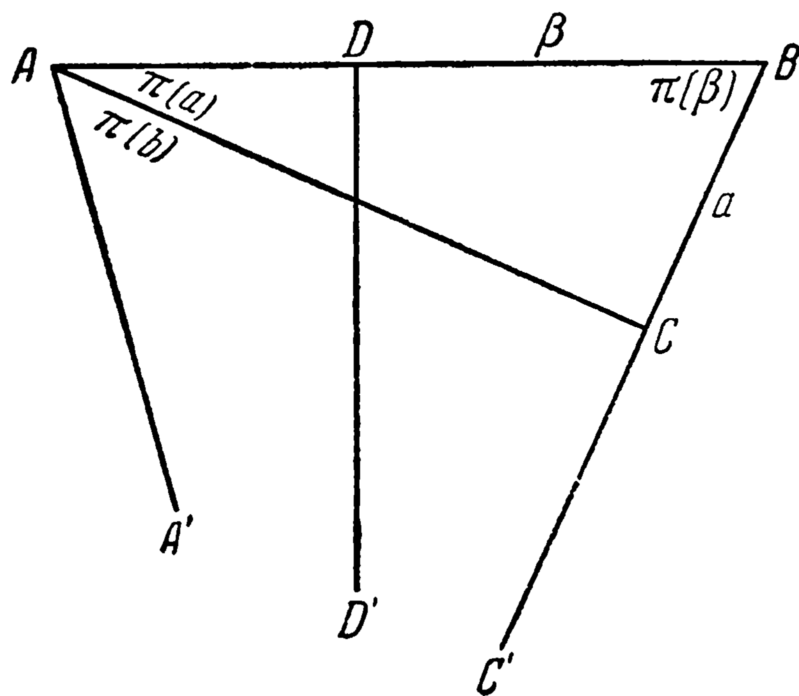
$$\Pi(c - \beta) = \Pi(\alpha) + \Pi(b).$$

Последнее уравнение остается в силе и в том случае, когда $c = \beta$ или $c < \beta$. Если $c = \beta$ (черт. 33), то перпендикуляр AA', восставленный к AB из точки A, параллелен стороне $BC = a$

---

* Чертеж сделан в предположении $c > \beta$; случаи $c = \beta$ и $c < \beta$ Лобачевский рассматривает ниже.

с ее продолжением CC'; следовательно, $\Pi(\alpha) + \Pi(b) = \frac{1}{2}\pi$ и в то же время $\Pi(c - \beta) = \frac{1}{2}\pi$ (предложение 23)*. Если $c < \beta$ (черт. 34), то конец отрезка β падает по другую сторону точки A, в D, на продолжении гипотенузы AB. Восставленный отсюда перпендикуляр DD' к AD и параллельная ему линия AA' из [точки] A будут также параллельны стороне $BC = a$ с ее продолжением CC'. Здесь угол $DAA' = \Pi(\beta - c)$, следовательно, $\Pi(\alpha) + \Pi(b) = \pi - \Pi(\beta - c) = \Pi(c - \beta)$ (предложение 23).



Черт. 32

Приведя в связь оба найденных уравнения, получаем

$$2\Pi(b) = \Pi(c - \beta) + \Pi(c + \beta),$$

$$2\Pi(\alpha) = \Pi(c - \beta) - \Pi(c + \beta),$$

откуда

$$\frac{\cos \Pi(b)}{\cos \Pi(\alpha)} = \frac{\cos\left[\frac{1}{2}\Pi(c - \beta) + \frac{1}{2}\Pi(c + \beta)\right]}{\cos\left[\frac{1}{2}\Pi(c - \beta) - \frac{1}{2}\Pi(c + \beta)\right]}.$$

Если сюда поставим значение (предложение 35)

$$\frac{\cos \Pi(b)}{\cos \Pi(\alpha)} = \cos \Pi(c),$$

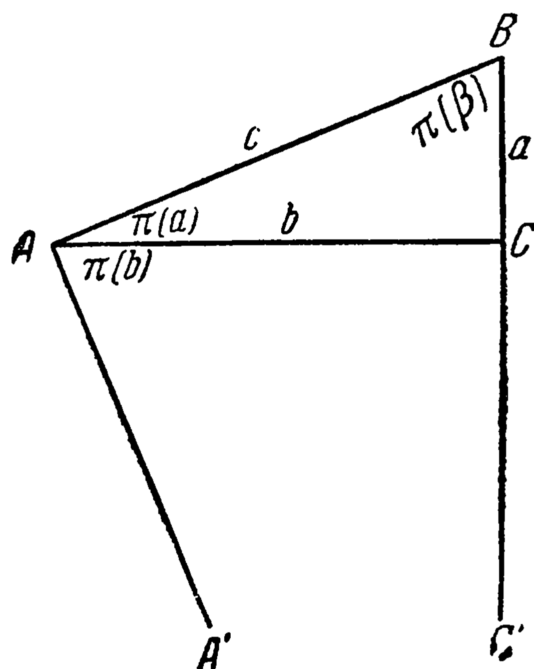
---

* См. заключительный абзац предложения 23: $\Pi(0) = \frac{1}{2}\pi$.

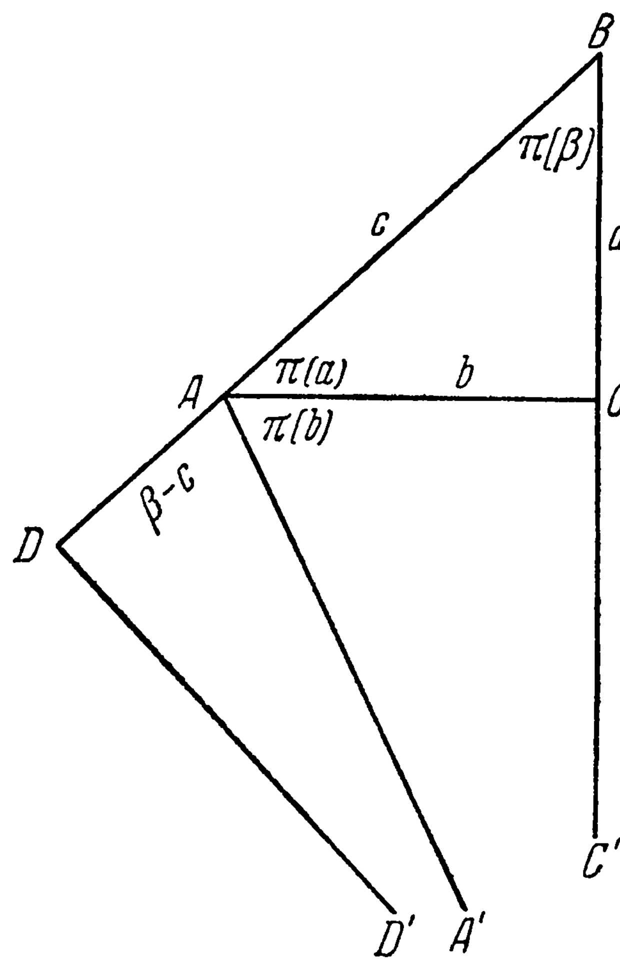
то получим

$$\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\Pi(c)=\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(c-\beta)\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(c+\beta)^{*}.$$

Здесь β есть произвольное число, так как угол $\Pi(\beta)$ с одной стороны [гипотенузы] c может быть выбран произвольно в пределах от 0 до $\frac{1}{2}\pi$; следовательно, β [может быть выбрано] произвольно между 0 и ∞; полагая здесь по порядку $\beta=c$, $2c$, $3c$ и т. д., для любого положительного числа n



Черт. 33



Черт. 34

* Написав предыдущее равенство в виде пропорции

$$\frac{\cos\Pi(c)}{1}=\frac{\cos\left[\frac{1}{2}\Pi(c-\beta)+\frac{1}{2}\Pi(c+\beta)\right]}{\cos\left[\frac{1}{2}\Pi(c-\beta)-\frac{1}{2}\Pi(c+\beta)\right]},$$

составляем производную пропорцию

$$\frac{1-\cos\Pi(c)}{1+\cos\Pi(c)}=$$

$$=\frac{\cos\left[\frac{1}{2}\Pi(c-\beta)-\frac{1}{2}\Pi(c+\beta)\right]-\cos\left[\frac{1}{2}\Pi(c-\beta)+\frac{1}{2}\Pi(c+\beta)\right]}{\cos\left[\frac{1}{2}\Pi(c-\beta)-\frac{1}{2}\Pi(c+\beta)\right]+\cos\left[\frac{1}{2}\Pi(c-\beta)+\frac{1}{2}\Pi(c+\beta)\right]}=$$

$$=\frac{\sin\frac{1}{2}\Pi(c-\beta)\sin\frac{1}{2}\Pi(c+\beta)}{\cos\frac{1}{2}\Pi(c-\beta)\cos\frac{1}{2}\Pi\ c+}.$$

получим

$$\left[\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(c)\right]^n = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(nc)^*.$$

Если будем здесь рассматривать n как отношение двух линий x и c и примем, что

$$\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\Pi(c) = e^c,$$

---

* При $\beta = c$ имеем $\Pi(c-\beta) = \frac{1}{2}\pi$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(c-\beta) = 1$, и равенство принимает вид:

$$\left[\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(c)\right]^2 = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(2c). \qquad (*)$$

При $\beta = 2c$

$$\Pi(c-\beta) = \Pi(-c) = \pi - \Pi(c);\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(c-\beta) = \operatorname{ctg}\frac{1}{2}\Pi(c),$$

а потому предыдущее равенство дает:

$$\left[\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(c)\right]^3 = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(3c).$$

Далее, при $\beta = 3c$

$$\Pi(c-\beta) = \Pi(-2c) = \pi - \Pi(2c);\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(c-\beta) = \operatorname{ctg}\frac{1}{2}\Pi(2c),$$

и, таким образом, в силу соотношения (*) при $\beta = 3c$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(c-\beta) = \left[\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(c)\right]^{-2}.$$

Вместе с тем основное уравнение, установленное в тексте, дает

$$\left[\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(c)\right]^4 = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(4c).$$

Продолжая таким образом, найдем

$$\left[\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(c)\right]^n = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(nc); \qquad (**)$$

здесь c — произвольный отрезок, а n — целое положительное число. Отсюда легко следует, что эта формула справедлива и для любого действительного значения n. В самом деле, из (**) получаем

$$\left[\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(c)\right]^{\frac{1}{n}} = \left[\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi\left(n\cdot\frac{c}{n}\right)\right]^{\frac{1}{n}} = \left[\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi\left(\frac{c}{n}\right)\right]^{n\cdot\frac{1}{n}} = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi\left(\frac{c}{n}\right),$$

то получим вообще для любой линии x, как положительной, так и отрицательной,

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(x) = e^{-x}\,*,$$

где e может быть любое число, большее единицы, ибо $\Pi(x) = 0$ при $x = \infty$.

Так как единица, которой измеряются линии, произвольна, то за e можно также принять основание неперовых логарифмов [21].

37) Из найденных выше уравнений достаточно знать два следующих:

$$\sin\Pi(c) = \sin\Pi(a)\sin\Pi(b),$$

$$\sin\Pi(\alpha) = \sin\Pi(b)\cos\Pi(\beta),$$

после чего

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi\left(\frac{m}{n}\,c\right) = \left[\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi\left(\frac{c}{n}\right)\right]^m = \left[\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(c)\right]^{\frac{1}{n}\cdot m} = \left[\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(c)\right]^{\frac{m}{n}},$$

т. е. соотношение (**) справедливо для любого рационального значения n. По непрерывности заключаем, что оно справедливо для всех действительных n.

* Если фиксируем c и положим $n = \frac{x}{c}$, то предыдущее основное соотношение примет вид

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(x) = \left[\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(c)\right]^n = \left[\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(c)\right]^{\frac{x}{c}}.$$

Если c есть положительное число, то $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(c)$ есть правильная дробь. Поэтому всегда можно найти такое число $e > 1$, при котором

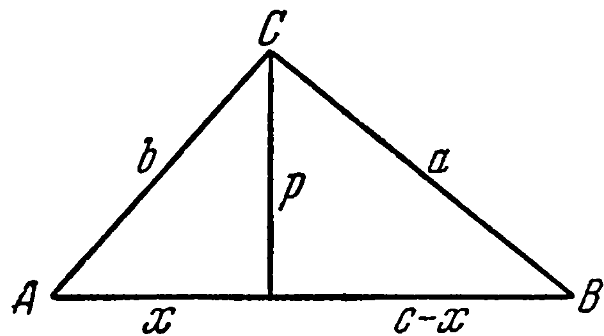
$$\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\Pi(c) = e^{c}.$$

Предыдущее равенство примет вид

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(x) = e^{-x}.$$

Этим сделан следующий важный шаг: установлена функция $\Pi(x)$. Другой вывод этой формулы см. в примечании [71].

относя последнее к обоим катетам a и b, чтобы из их соединения вывести два остальных (предложение 35) и притом без двузначности относительно алгебраических знаков, ибо углы здесь острые *.



Черт. 35

Аналогичным образом приходим к двум уравнениям

1. $\operatorname{tg} \Pi(c) = \sin \Pi(\alpha) \operatorname{tg} \Pi(a)$
2. $\cos \Pi(a) = \cos \Pi(c) \cos \Pi(\beta)$ ◊.

Рассмотрим теперь прямолинейный треугольник со сторонами a, b, c и противолежащими углами A, B, C (черт. 35). Если A и B суть острые углы, то перпендикуляр p из вершины угла C падает внутрь треугольника и делит сторону c на две части, именно: на часть x со стороны угла A и $c - x$ со стороны угла B. Таким образом, получаются два прямоугольных треугольника, применяя к которым уравнение (1), получаем

$$\operatorname{tg} \Pi(a) = \sin B \operatorname{tg} \Pi(p),$$
$$\operatorname{tg} \Pi(b) = \sin A \operatorname{tg} \Pi(p),$$

* Стороны и углы прямолинейного треугольника — в неэвклидовой геометрии даже прямоугольного — связаны *тремя независимыми уравнениями*. Лобачевский указывает, что за такие три уравнения могут быть приняты те два уравнения, которые приведены в тексте в связи с третьим, которое получается из второго транспозицией катетов и противолежащих им острых углов. Из этих трех уравнений путем исключения то одних, то других элементов треугольника могут быть получены не только два дополнительных уравнения, приведенные в предложении 35, но и еще пять уравнений, которые совместно с приведенными пятью дают возможность по любым двум элементам вычислить любой третий элемент. Эти десять уравнений (соответствующие числу сочетаний из 5 элементов по 3) Лобачевский то отдельными группами, то совместно приводит, можно сказать, во всех своих сочинениях. Они все сгруппированы в ст. 141 «Новых начал». В примечании [22] приведены все эти десять уравнений прямоугольного треугольника, и дан их вывод из тех трех, которые Лобачевский принимает за исходные.

◊ Эти уравнения выведены в примечании [22]. Они там приведены под номерами (8) и (6).

каковые уравнения остаются без изменения, даже если бы один из углов, например B, был прямым (черт. 36) или тупым (черт. 37). Таким образом, получаем общее для всех треугольников соотношение

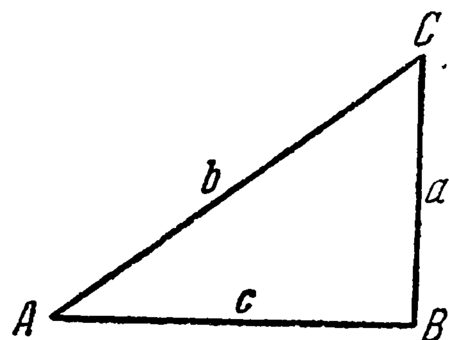
$$3.\ \sin A \operatorname{tg} \Pi(a) = \sin B \operatorname{tg} \Pi(b)\,^{*}.$$

Для треугольника с острыми углами A, B (черт. 35) получаем еще [уравнение (2)]

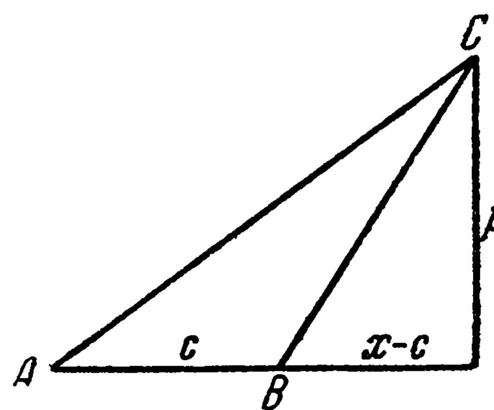
$$\cos \Pi(x) = \cos A \cos \Pi(b),$$

$$\cos \Pi(c - x) = \cos B \cos \Pi(a),$$

каковые уравнения относятся также к треугольникам, в которых угол A или B прямой или тупой. Например, при $B = \frac{1}{2}\pi$



Черт. 36



Черт. 37

(черт. 36) нужно взять $x = c$; первое уравнение переходит тогда в то, которое мы получили выше [уравнение (2)], а второе удовлетворяется само по себе. При $B > \frac{1}{2}\pi$ (черт. 37) первое уравнение остается без изменения, вместо же второго нужно написать соотношение

$$\cos \Pi(x - c) = \cos(\pi - B) \cos \Pi(a);$$

---

* Если это соотношение написать в виде

$$\frac{\operatorname{ctg} \Pi(a)}{\sin A} = \frac{\operatorname{ctg} \Pi(b)}{\sin B},$$

то оно наиболее напоминает так называемую «теорему синусов» эвклидовой тригонометрии.

но $\cos \Pi (x - c) = -\cos \Pi (c - x)$ (предложение 23), а также

$$\cos(\pi - B) = -\cos B.$$

Если A есть прямой или тупой угол, то вместо x и $c - x$ нужно взять $c - x$ и x, и этот случай приведется к предыдущим.

Чтобы из этих двух уравнений исключить x, заметим, что (предложение 36)*

$$\cos \Pi (c - x) = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \Pi (c - x)}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \Pi (c - x)} = \frac{1 - e^{2x-2c}}{1 + e^{2x-2c}} =$$

$$= \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \Pi (c) \operatorname{ctg}^2 \frac{1}{2} \Pi (x)}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \Pi (c) \operatorname{ctg}^2 \frac{1}{2} \Pi (x)} = \frac{\cos \Pi (c) - \cos \Pi (x)}{1 - \cos \Pi (c) \cos \Pi (x)} {}^{\diamond}.$$

Если подставим сюда выражения для $\cos \Pi (x)$, $\cos \Pi (c - x)$, то получим

$$\cos \Pi (c) = \frac{\cos \Pi (a) \cos B + \cos \Pi (b) \cos A}{1 + \cos \Pi (a) \cos \Pi (b) \cos A \cos B},$$

откуда следует

$$\cos \Pi (a) \cos B = \frac{\cos \Pi (c) - \cos A \cos \Pi (b)}{1 - \cos A \cos \Pi (b) \cos \Pi (c)};$$

---

* Лобачевский ссылается на заключительную часть предложения 36, а именно на формулу $\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi (x) = e^{-x}$.

◇ Доказанная формула

$$\cos \Pi (c - x) = \frac{\cos \Pi (c) - \cos \Pi (x)}{1 - \cos \Pi (c) \cos \Pi (x)}$$

устанавливает для функции $\Pi (x)$ теорему сложения. Она остается в силе и для отрицательных значений x, что дает:

$$\cos \Pi (c + x) = \frac{\cos \Pi (c) + \cos \Pi (x)}{1 + \cos \Pi (c) \cos \Pi (x)}$$

[см. «Новые начала», ст. 137, формула (64)].

и, наконец,

$$\sin \Pi(c)^2 =$$

$$= [1 - \cos B \cos \Pi(c) \cos \Pi(a)] \cdot [1 - \cos A \cos \Pi(b) \cos \Pi(c)]\ ^*.$$

Таким же образом должно быть:

$$4.\ \sin^2 \Pi(a) =$$

$$= [1 - \cos C \cos \Pi(a) \cos \Pi(b)] \cdot [1 - \cos B \cos \Pi(c) \cos \Pi(a)],$$

$$\sin^2 \Pi(b) =$$

$$= [1 - \cos A \cos \Pi(b) \cos \Pi(c)] \cdot [1 - \cos C \cos \Pi(a) \cos \Pi(b)].$$

Из этих трех уравнений получаем еще

$$\frac{\sin^2 \Pi(b) \sin^2 \Pi(c)}{\sin^2 \Pi(a)} = [1 - \cos A \cos \Pi(b) \cos \Pi(c)]^2.$$

Отсюда без двузначности по отношению к знакам ◊ имеем:

$$5.\ \cos A \cos \Pi(b) \cos \Pi(c) + \frac{\sin \Pi(b) \sin \Pi(c)}{\sin \Pi(a)} = 1.$$

Если сюда в согласии с уравнением (3) подставим значение $\sin \Pi(c)$

$$\sin \Pi(c) = \frac{\sin A}{\sin C} \operatorname{tg} \Pi(a) \cos \Pi(c)\ ^\triangle,$$

то получим:

$$\cos \Pi(c) = \frac{\cos \Pi(a) \sin C}{\sin A \sin \Pi(b) + \cos A \sin C \cos \Pi(a) \cos \Pi(b)},$$

---

* Выкладки подробно проведены в «Новых началах», ст. 142 (стр. 296 настоящего издания).

◊ Извлечение корня не приводит к двузначности потому, что оба выражения

$$\frac{\sin \Pi(b) \sin \Pi(c)}{\sin \Pi(a)} \text{ и } 1 - \cos A \cos \Pi(b) \cos \Pi(c)$$

имеют положительные значения.

△ Это есть уравнение (3):

$$\sin A \operatorname{tg} \Pi(a) = \sin C \operatorname{tg} \Pi(c),$$

взятое для сторон a и c и противолежащих углов A и C.

или же, подставляя это выражение для $\cos \Pi(c)$ в уравнение (4),

$$6.\ \operatorname{ctg} A \sin C \sin \Pi(b) + \cos C = \frac{\cos \Pi(b)}{\cos \Pi(a)}\ *.$$

Исключая отсюда $\sin \Pi(b)$ с помощью уравнения (3), получаем:

$$\frac{\cos \Pi(a)}{\cos \Pi(b)} \cos C = 1 - \frac{\cos A}{\sin B} \sin C \sin \Pi(a)\ \diamond.$$

Между тем уравнение (6) изменением букв△ дает

$$\frac{\cos \Pi(a)}{\cos \Pi(b)} = \operatorname{ctg} B \sin C \sin \Pi(a) + \cos C.$$

Из двух последних уравнений следует ○

$$7.\ \cos A + \cos B \cos C = \frac{\sin B \sin C}{\sin \Pi(a)}.$$

---

* Подстановку эту нужно сделать не в первое уравнение (4), а в следующее, выражающее $\sin^2 \Pi(b)$. Выкладки проведены подробно в «Новых началах», ст. 142 (стр. 297 настоящего издания).

◇ Иначе говоря, мы подставляем в предыдущее уравнение вместо $\sin \Pi(b)$ выражение, которое дает уравнение (3):

$$\sin \Pi(b) = \frac{\sin A \operatorname{tg} \Pi(a) \cos \Pi(b)}{\sin B}.$$

Это дает непосредственно

$$\frac{\cos A \operatorname{tg} \Pi(a) \cos \Pi(b) \sin C}{\sin B} + \cos C = \frac{\cos \Pi(b)}{\cos \Pi(a)}.$$

Умножая обе части на $\frac{\cos \Pi(a)}{\cos \Pi(b)}$, получим уравнение, приведенное в тексте.

△ Т. е. транспонированием сторон a и b, а соответственно этому и углов A и B.

○ По исключении из этих уравнений отношения $\frac{\cos \Pi(a)}{\cos \Pi(b)}$.

Все четыре уравнения, выражающие зависимости между сторонами a, b, c и противолежащими углами A, B, C, согласно этому [уравнения (3), (5), (6), (7)]* будут:

$$
8. \quad \begin{cases}
\sin A \operatorname{tg} \Pi(a) = \sin B \operatorname{tg} \Pi(b), \\
\cos A \cos \Pi(b) \cos \Pi(c) + \dfrac{\sin \Pi(b) \sin \Pi(c)}{\sin \Pi(a)} = 1. \\
\operatorname{ctg} A \sin C \sin \Pi(b) + \cos C = \dfrac{\cos \Pi(b)}{\cos \Pi(a)}, \\
\cos A + \cos B \cos C = \dfrac{\sin B \sin C}{\sin \Pi(a)} {}^{\diamond}.
\end{cases}
$$

Если стороны треугольника a, b, c очень малы, то можно удовольствоваться приближенными значениями (предложение 36):

$$\operatorname{ctg} \Pi(a) = a,$$
$$\sin \Pi(a) = 1 - \frac{1}{2} a^2,$$

---

* Квадратные скобки здесь принадлежат Лобачевскому.

◇ Было бы точнее сказать не «четыре уравнения», а четыре группы уравнений. Выкладки уже проведены выше. Уравнений первой группы имеется три (из них два независимых). Каждое из этих уравнений дает возможность по двум сторонам и углу, противолежащему одной из них, определить угол, противолежащий второй стороне, или же по двум углам и стороне, противолежащей одному из них, определить сторону, противолежащую второму углу.

Три уравнения второй группы определяют углы треугольника по трем его сторонам. Каждое из уравнений этой группы может также служить для определения третьей стороны по двум сторонам и одному углу.

Уравнений третьей группы имеется шесть; каждое из них служит для определения по стороне и двум прилежащим к ней углам стороны, противолежащей одному из этих углов, или же по углу и двум содержащим его сторонам — угла, противолежащего одной из этих сторон.

Четвертая группа содержит три уравнения и служит для определения сторон треугольника по его углам.

Все три группы содержат, таким образом, 15 уравнений, исчерпывающих тригонометрию прямолинейного треугольника.

$$\cos \Pi(a) = a\ ^{\star},$$

и аналогично для других сторон b и c. Уравнения (8) переходят для таких треугольников в следующие:

$$b \sin A = a \sin B,$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

$$a \sin(A + C) = b \sin A,$$

$$\cos A + \cos(B + C) = 0\ ^{\diamond}.$$

Из этих уравнений первые два приняты в обыкновенной геометрии; последние же с помощью двух первых приводят к заключению, что

$$A + B + C = \pi\ ^{\triangle}.$$

Таким образом, воображаемая геометрия переходит в обыкновенную, если предположим, что стороны прямолинейного треугольника очень малы [23].

★ Установленное в предложении 36 соотношение $\operatorname{ctg} \frac{1}{2} \Pi(x) = e^x$ дает

$$\operatorname{ctg} \Pi(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \sin \Pi(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}}, \quad \cos \Pi(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Выражая правые части в гиперболических функциях, представим эти уравнения в следующем виде:

$$\operatorname{ctg} \Pi(x) = \operatorname{sh} x, \quad \sin \Pi(x) = \frac{1}{\operatorname{ch} x}, \quad \cos \Pi(x) = \operatorname{th} x.$$

Гиперболические функции играют, таким образом, в неэвклидовой геометрии Лобачевского такую же роль, какую в обыкновенной геометрии играют тригонометрические функции. Поэтому построенную Лобачевским систему геометрии, как уже упомянуто выше, называют *гиперболической геометрией* (см. сноску*, стр. 19).

Разлагая гиперболические функции в ряд Маклорена и сохраняя для малых значений x только члены не выше второго порядка, получим выражения, приведенные в тексте.

◇ Лобачевский отбрасывает малые высших порядков.

△ Это легко вытекает даже из одного только последнего уравнения: так как углы A и $B + C$ заключены между 0 и π, то соотношение $\cos A + \cos(B + C) = 0$ означает, что $B + C = \pi - A$.

Об измерении кривых линий, площадей плоских фигур, поверхностей и объемов тел, равно как и о применении воображаемой геометрии к анализу я опубликовал некоторые исследования в «Ученых записках Казанского университета» [24].

Уравнения (8) уже сами по себе предсгавляют достаточную основу для того, чтобы рассматривать предположения воображаемой геометрии как возможные. Сообразно этому мы не располагаем никаким другим средством, кроме астрономических наблюдений, чтобы судить о точности, которую дают вычисления обыкновенной геометрии. Как я показал в одной из моих работ, эта точность простирается далеко, так что, например, в треугольниках, стороны которых доступны нашим измерениям, сумма углов не отличается от двух прямых даже на сотую долю секунды [25].

Замечательно также, что уравнения (8) в плоской геометрии переходят в уравнения сферических треугольников, если вместо сторон a, b, c подставим $a\sqrt{-1}, b\sqrt{-1}, c\sqrt{-1}$; при таком изменении, однако, нужно будет также положить

$$\sin \Pi(a) = \frac{1}{\cos a},$$

$$\cos \Pi(a) = \sqrt{-1}\, \operatorname{tg} a,$$

$$\operatorname{tg} \Pi(a) = \frac{1}{\sin a \sqrt{-1}};$$

подобные же изменения нужно сделать и для сторон b, c; этим путем мы придем от уравнений (8) к следующим [26]:

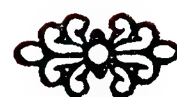
$$\sin A \sin b = \sin B \sin a,$$

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

$$\operatorname{ctg} A \sin C + \cos C \cos b = \sin b \operatorname{ctg} a,$$

$$\cos A = \cos a \sin B \sin C - \cos B \cos C.$$

НОВЫЕ НАЧАЛА ГЕОМЕТРИИ С ПОЛНОЙ ТЕОРИЕЙ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ



ВСТУПЛЕНИЕ

Всем известно, что в Геометрии теория параллельных до сих пор оставалась несовершенной. Напрасное старание со времен Евклида, в продолжении двух тысяч лет, заставили меня подозревать, что в самых понятиях еще не заключается той истины, которую хотели доказывать и которую проверить, подобно другим физическим законам, могут лишь опыты, каковы, например, Астрономические наблюдения. В справедливости моей догадки будучи, наконец, убежден и почитая затруднительный вопрос решенным вполне, писал об этом я рассуждение в 1826 году *. Применение новой теории к аналитике находится также в статьях под названием *О началах Геометрии*, помещенных в Казанском Вестнике за 1829 и 1830 годы. Главное заключение, к которому пришел я с предположением зависимости линий от углов, допускает существование Геометрии более в обширном смысле, нежели как ее представил нам первый Евклид. В этом пространном виде дал я науке название *Воображаемой Геометрии*, где как частный случай входит *Употребительная Геометрия* с тем ограничением в общем положении, какого требуют измерения на самом деле◊. Достаточность

---

* Exposition succincte des principes de la Géometrie avec une démonstration riguoreuse du théorème des paralleles, читано в заседании Физико-математического Отделения при Казанском университете 12 февраля 1826 года, но не было нигде напечатано. [*Примечание Лобачевского*] [27].

◊ Т. е. эвклидова геометрия является частным, точнее, предельным случаем геометрии Лобачевского. Эвклидова геометрия получится из

новых начал предпринимал я доказывать в сочинении, которое было недавно напечатано в ученых Записках Казанского Университета *. Желая достигнуть этой цели хотя не прямым, но самым кратким обратным путем, я предпочел в тот раз от оснований предположительных идти к уравнениям для всех отношений и к выражениям для всякой Геометрической величины. Если б открытие мое не принесло другой пользы, кроме пополнения недостатка в начальном учении, то, по крайней мере, внимание, какое постоянно заслуживал этот предмет, обязывает уже меня к изложению подробному. Начну разбором прежних теорий.

Легко доказать, что две прямые, наклоненные под одним углом к третьей, никогда не встречаются, делаясь, таким образом, перпендикулярны к одной. Евклид полагал обратно, что две линии, наклоненные неодинаково к третьей, должны всегда пересекаться. Чтоб увериться в справедливости последнего предложения ◇, прибегали к различным способам, то стараясь наперед отыскать сумму углов в треугольнике, то сравнивая бесконечные плоскости в отверстии углов и между перпендикулярами, то допуская зависимость углов только с содержанием сторон △ или, наконец, придавая новые свойства прямой линии в дополнение к определению. Из всех этих доказательств можно некоторые назвать остроумными, но все вообще ложными, недостаточными в своих основаниях и без должной строгости в суждении; между ними даже нет такого, которое бы, соединяя с простотой убедительность, могло быть одобрено для начинающих.

общей теории, если ввести некоторые упрощающие ограничения, не противоречащие практике обычных пространственных измерений.

* В книжке I Ученых записок 1835 года под названием *Воображаемая Геометрия* [*Примечание Лобачевского*]. В настоящем издании см. стр. 313 и сл.

◇ Т. е. чтобы доказать его, исходя из прочих аксиом.

△ С отношением сторон. Лобачевский всегда применяет слово «содержание» в смысле «отношение».

Лежандр в 1800 году напечатал третьим изданием свою Геометрию, где поместил предложение, что сумма углов треугольника не может быть более π, двух прямых. Тут же доказывал, что такая сумма не должна быть $<\pi$, выпустив, однако ж, из внимания то, что линии могут не составлять более треугольника вместе с тем, когда значение суммы, выведенное по другому способу, представляло бы какую-нибудь несообразность. Не почитаю нужным распространяться здесь об этой ошибке, в которой сознался после сам Лежандр, говоря, что хотя в основание взятые начала не подлежат сомнению, но встречает, однако ж, затруднения, не будучи в состоянии победить их*. В Записках Французской Академии 1833 года прибавил он еще предложение, что сумма углов должна быть π во всех треугольниках, если такова в одном только. То же мне надобно было доказывать и в моей теории, которую писал я в 1826 году◊. Даже нахожу, что Лежандр несколько раз попадал на ту дорогу, которую выбрал я так удачно; но, вероятно, предубеждения в пользу принятого всеми положения заставляли на каждом шагу спешить заключением или дополнять тем, чего бы нельзя было допускать еще в новом предположении. Рассмотрим все то, что напечатал он об этом предмете в Записках Французской Академии 1833 года.

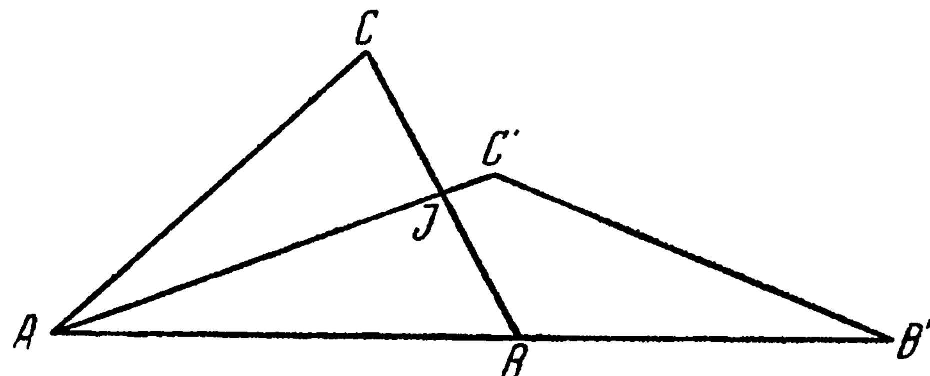
В треугольнике ABC (чер. 1) ведем из A, чрез средину J стороны BC, линию $AC' = AB$; продолжаем AB, покуда сделается $AB' = 2AJ$. Произойдет треугольник $AB'C'$, где $B'C' = AC$ и где сумма S углов та же, что в первом треугольнике ABC, откуда угол CAB переходит в $\triangle AB'C'$, разделяясь на два при

---

* Вот собственные слова Лежандра: «Nous devons avouer que cette seconde proposition, quoique le principe de la démonstration fût bien connu, nous a présenté des difficultés que nous n'avons pu entièrement resoudre». (Mémoires de l'Acad. d. sc. de l'inst. de France, Tome XII, 1833, p. 371) [*Примечание Лобачевского*].

◊ Это предложение Лобачевский доказывал еще в лекциях по геометрии, читанных в 1817 г. студентам физико-математического отделения Казанского университета.

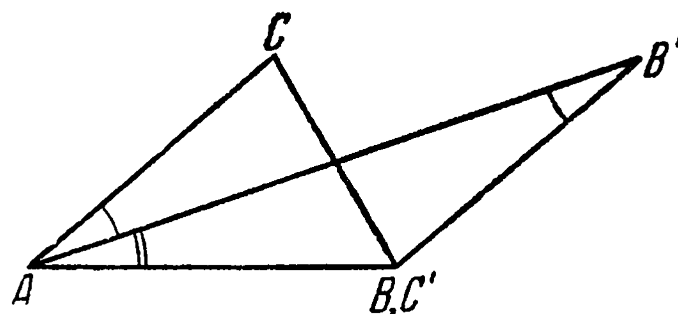
точках A, B' *. Если к тому AB самая большая сторона или не менее двух других в $\triangle ABC$, также [если] $BC \leqslant AC$, то $AC' \geqslant C'B'$, угол против $B'C'$ в $\triangle AB'C'$ по крайней мере вдвое меньше



Чер. 1

угла CAB. Так продолжая, можем прийти к треугольнику, где два угла как угодно малы, а сумма всех трех та же S, что в первом треугольнике ABC. Лежандр думал заключить отсюда, что с уменьшением двух углов, приближение противоположных сторон к третьей оканчивается необходимо превращением остального угла в два прямые, а потому $S = \pi$ в начальном и, следовательно, во всяком треугольнике (Réflexions sur la théorie des parallèles. Mémoires de l'Acad. d. sc. Tome XII. 1833, p. 390). Однако ж это рассуждение неверно, потому что здесь стороны в треугольнике растут бесконечно, а следовательно,

* Это рассуждение лишь несущественно отличается от того, которое приведено Лобачевским на стр. 24. Действительно, если расположить треугольник $AB'C'$ иначе, именно, чтобы сторона AC' совпала с AB,



Черт. 1а

а сторона AB' прошла через точку J, то мы получим чертеж 1а, совпадающий с чертежом 4 (на стр. 24) Лобачевского. То, что в треугольниках ABC и $AB'C'$ одинаковы суммы углов, подробно доказано в тексте Лобачевского (стр. 24).

можем предполагать и границу приближения, покуда угол $AC'B' < S, < \pi$*. Называем A, B, C углы в $\triangle ABC$ при точках

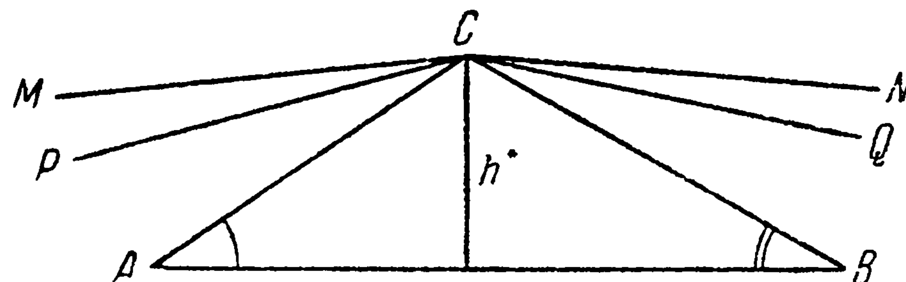
---

* Т. е. если два угла треугольника стремятся к нулю, а стороны треугольника при этом возрастают бесконечно, то при условии сохранения суммы углов, которая предположена меньшей π, нет оснований утверждать, что третья вершина упадет на противоположную сторону, а следует допустить возможность, что она только приближается к ней на определенное предельное расстояние. Далее Лобачевский вычисляет этот предел, пользуясь формулами своей геометрии.

Можно дать вывод соотношения

$$h = \log \operatorname{ctg} \frac{1}{4} S,$$

совсем не требующий вычислений и более простой, чем вывод, намеченный у Лобачевского (и подробно изложенный в примечании [28]). Пусть ABC — треугольник с острыми углами A и B и суммой углов, равной S (черт. 16). Расстояние вершины C от прямой AB обозначим через h^*.



Черт. 16

Проведем прямые CM и CN таким образом, чтобы

$$\angle MCA = \angle CAB; \quad \angle NCB = \angle CBA.$$

Тогда CM и CN не встречают прямой AB и потому параллели CP и CQ, проведенные из точки C к прямой AB, лежат соответственно в углах ACM и BCN. Вместе с тем угол PCQ, равный $2\Pi(h^*)$, заключен между углом MCN, который, как легко видеть, равен S, и углом ACB, т.е. $S - A - B$:

$$S - A - B < 2\Pi(h^*) < S. \qquad (*)$$

Если углы A и B будут уменьшаться до нуля, то, как видно из (*), величина h^* будет, изменяясь, приближаться к такому пределу h, для которого выполнено соотношение

$$2\Pi(h) = S.$$

Отсюда, в силу соотношения $\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\Pi(h) = e^h$ (см. стр. 63 или 280), получаем $e^h = \operatorname{ctg}\frac{S}{4}$, т. е. $h = \log \operatorname{ctg}\frac{S}{4}$.

с теми же буквами; называем еще A', B', C' углы в $\triangle AB'C'$ при точках A, B', C'; наконец, пусть h перпендикул из C' на сторону AB'. По способу Воображаемой Геометрии, в предположении $S<\pi$, и разумея под e основание Непперовых логарифмов, находим [28]:

$$\cot A' = \cot A + \frac{\sin C}{\sin A \sin B},$$

$$\cot B' = \cot A + \frac{\sin B}{\sin A \sin C},$$

$$e^h - e^{-h} = \frac{4}{\sin C}\sqrt{\cos\frac{1}{2}S \cdot \cos\left(\frac{1}{2}S - A\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{2}S - B\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{2}S - C\right)}.$$

Из первых двух уравнений видно, что A', B' всегда возможны и с превращением треугольников уменьшаются до нуля. Последнее уравнение дает всякий раз высоту h и назначает границу приближения

$$h = \log\cot\frac{1}{4}S,$$

где логарифм берется Непперов.

Лежандр хотя назвал свое доказательство совершенно строгим, но сам, вероятно, думал иначе, прибавив оговорку, что затруднение, если б какое встретилось, всегда может быть отклонено. С этой целию прибегает он к вычислениям, основанным, впрочем, на первых известных уравнениях прямолинейной Тригонометрии, которые бы следовало наперед еще поверить и которые в этом уже случае ни к чему не служат и ни к какому заключению не ведут*.

---

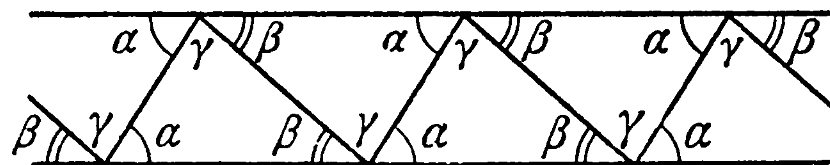
* Допуская обычные уравнения прямолинейной тригонометрии, мы этим самым скрыто вводим эвклидов постулат, так как не только их вывод основан на теории подобных фигур, опирающейся на эвклидову теорию параллелей, но и, обратно,— из формул тригонометрии можно получить эвклидов постулат.

Желая все сказать в подтверждение своего предложения, Лежандр * замечает, что равные треугольники, будучи сомкнуты везде различными углами, по три к точке, представляют полосу, которую можно продолжать до бесконечности ◊, тогда как ее граничат две ломаные линии: вогнутые друг к другу, если $S < \pi$, выпуклые для $S > \pi$. Между тем, доказанная невозможность последнего случая заставляет отвергать и первый, где линии как две дуги круга, одна к другой обращенные, должны необходимо пересекаться. Кажется, не нужно много разбирать и ценить такое суждение, где нет и тени строгого доказательства. К тому скажем, что вогнутые друг к другу линии сближаются только по принятому понятию в Употребительной Геометрии, тогда как с предположением $S<\pi$ ничто не мешает допускать их продолжение с сохранением одинаковости в расстояниях△.

Бертран○ и по примеру его Лежандр хотели сравнивать бесконечные плоскости в углах и между перпендикулами. Этого рода доказательствам должно бы предшествовать определение величины, которую в Геометрии можно понимать только вместе с измерением, притом условясь наперед, по каким призна-

* Это доказательство Лежандра помещено во 2-м изд. его «Eléments» (1796 г.).

◊ Поясним это смыкание чертежом 1в.

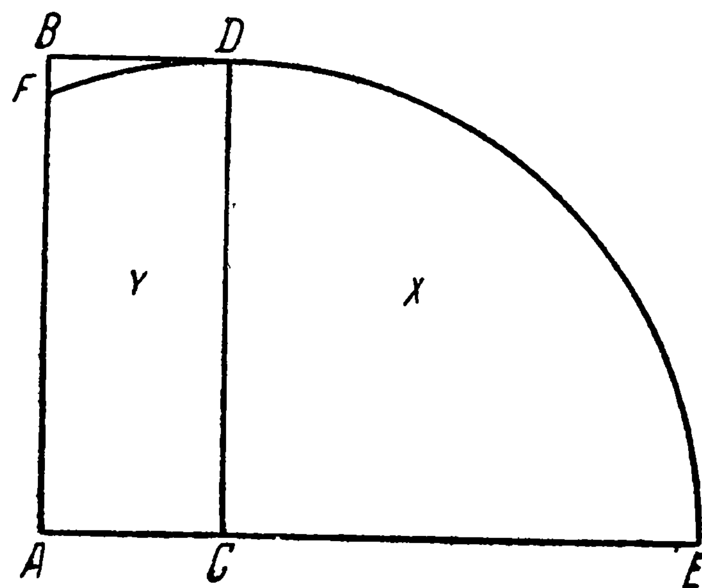


Черт. 1в

△ Лобачевский говорит здесь о двух линиях равных расстояний (эквидистантах), имеющих общий базис и лежащих по разные стороны от него.

○ Лобачевский переходит к рассмотрению и критике доказательства Луи Бертрана (1731—1812 гг.), которое помещено в книге L. Bertrand Développement nouveau de la partie élémentaire des mathématiques prise dans toute son étendue, v. 11, Genève, 1778, стр. 646 (предложения 8, 9, стр. 19—20).

кам различаются большое с меньшим. Например, площадь, ограниченная кривою линией, почитается больше того многоугольника, который весь помещается внутри; менее — когда, наоборот, площадь заключается вся в многоугольнике, хотя бы средство вымерять эту площадь еще было неизвестно. Что же касается до беспредельных плоскостей, то здесь, как и везде в математике, за содержание двух бесконечно великих чисел должно почитать границу, к которой оно приходит с непрестанным возрастанием числителя и знаменателя в дроби. Сверх того, здесь надобно разуметь под Геометрической величиной по крайней мере ту, какую можно назначать приблизительно, судя по признакам неравенства. В этом отношении доказательство Бертрана, как и все подобные, далеко не удовлетворяют требованиям, потому что в них не видим даже способа мерить плоскости, не говоря о том уже, как плоскости должны быть ограничены наперед с расширением границ расти до бесконечности [29].



Чер. 2

Пусть надобно сравнивать плоскость X (чер. 2) в отверстии угла DCE с плоскостью Y, которая простирается от линии $AC=a$ между двух перпендикулов AB, CD к AC. Содержание двух площадей X, Y будет выходить различное, хотя б они возрастали до бесконечности, смотря по тому, каким образом придумаем их ограничивать вначале. Полагаем, например, что во всяком треугольнике сумма углов $S=\pi$. Делаем $AB=CD=na$, где n — целое, потом ведем прямую DB, а плоскость в отверстии угла DCE ограничиваем другой, описанной из центра C полупоперечником $CD=na$. Получим

$$Y = na^2, \qquad X = \frac{1}{4}\pi n^2 a^2.$$

Отсюда

$$\frac{Y}{X}=\frac{4}{\pi n}$$

— такое содержание, которое с возрастанием плоскостей Y, X, для $n=\infty$ исчезает, как принимал и Бертран. Если же вместо того, чтобы полагать $AB=na$, делаем $AB=nCD=$ $=n^2a$ *, то в этот раз уже находим содержание

$$\frac{Y}{X}=\frac{4}{\pi}$$

постоянным для всякого n, а следовательно, также для $n=\infty$, когда две плоскости бесконечно велики. Итак, содержание $Y:X$ всякий раз выходит различное, смотря по тому, как ограничиваем плоскости в начале и как они растут затем до бесконечности.

Обрезываем теперь обе плоскости X, Y дугой FDE, описанной из центра C полупоперечником $CD=na$. Полагая во всяком треугольнике сумму углов $S>\pi$ или $S=\pi$, нетрудно видеть, что содержание $Y:X$ обращается в нуль для $n=\infty$ ◊. Это значит, что в обоих случаях Y бывает бесконечно великое первого, X — второго порядка, как разумел и Бертран.

Напротив, с предположением $S<\pi$ находим содержание △

* AB рассматривается как одна из сторон прямоугольника $ABB'C$, в котором $AB=CB'\neq CD$.

◊ Действительно, при $S=\pi$ площадь $AFDC$ составляет часть $ABDC$, а площадь $ABDC$ равна na^2, тогда как площадь четверти круга равна $\frac{1}{4}\pi n^2a^2$.

△ Если под e разумеем основание непперовых логарифмов, оставляя неизвестной линию, принятую единицей, и полагаем *

$$\sin r'=\frac{2}{e^r+e^{-r}},\qquad \sin\psi=\operatorname{tang} r'\cot x',$$

$$\operatorname{tang} r'=\frac{2}{e^r-e^{-r}},\qquad \operatorname{tang} x'=\frac{2}{e^x-e^{-x}},$$

* r' является сокращенным обозначением угла параллельности для r, т. е. $\Pi(r)$. См. главу X, формулу (62) на стр. 280.

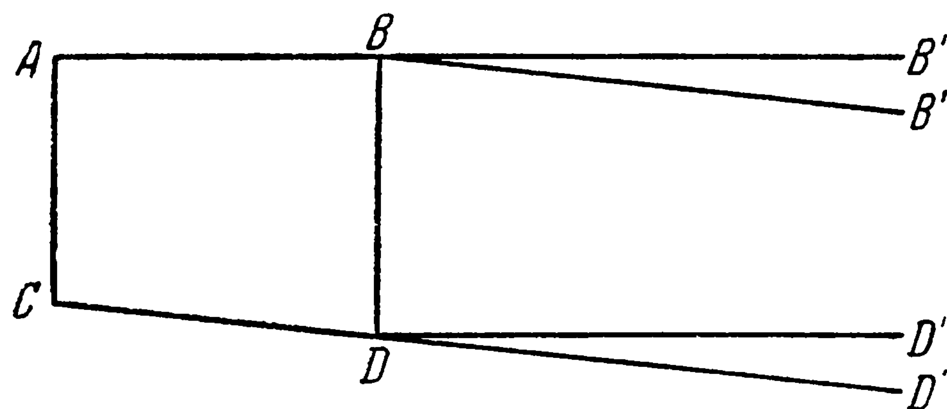
$$\frac{Y}{X} = \frac{2(e^{na}+e^{-na})\arcsin\left(\frac{e^{2a}-1}{e^{2a}+1}\cdot\frac{e^{2na}+1}{e^{2na}-1}\right) - 4\arcsin\left(\frac{e^{a}-e^{-a}}{e^{na}-e^{-na}}\right)}{\pi(e^{na}+e^{-na}-2)},$$

где число $e>1$ не зависит от n, а следовательно, для $n=\infty$

$$\frac{Y}{X} = \frac{2}{\pi}\arcsin\left(\frac{e^{2a}-1}{e^{2a}+1}\right)$$

не будет нулем, покуда $a>0$, и может быть пренебрежено только за чрезвычайною малостью a [30].

С другой стороны, в том увериться нетрудно, что содержание $Y:X$ не должно почитать нулем для $Y=\infty$ и допуская $S<\pi$. Пусть AB, CD (чер. 3) перпендикулы к AC; берем произ-



Чер. 3

вольно $AB=CD$. В предположении $S<\pi$ углы ABD, CDB острые; перпендикулы BB'', DD'' к BD отклоняются внутри плоскости $B'BDD'$, не встречаясь друг с другом и составляя с BB', DD' углы $B'BB''$, $D'DD''$, которых бесконечные плоскости менее такой же плоскости $B'ACD'$, в противность того, что Бертран хотел утверждать о всех углах без исключения.

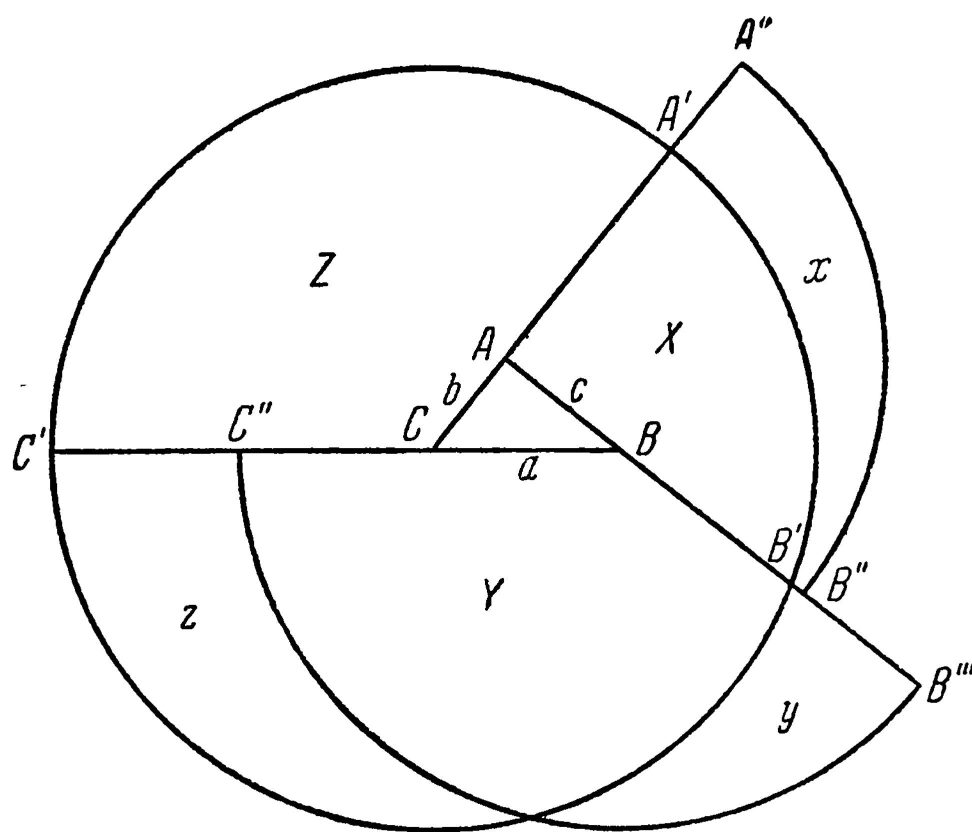
то находим площадь, вырезанную в круге перпендикулами к полупоперечнику r из центра и на расстоянии x от центра (Воображаемая Геометрия, стр. 339)

$$\frac{1}{\sin r'}\operatorname{arc\,cot}(\sin r' \cot\psi) - \psi$$

[*Примечание Лобачевского*].

Другой вид дает Бертран своему доказательству, рассматривая бесконечные плоскости в одних углах. В треугольнике ABC (чер. 4) называем A, B, C углы против сторон a, b, c, которые продолжаем: AC чрез A до A'', AB чрез B до B'', BC чрез C до C''. В отверстии внешних углов $\pi - A$, $\pi - B$, $\pi - C$ плоскости $X + x$, $Y + y$, Z, простираясь беспредельно, составляют такую же плоскость около точки C во все стороны, за исключением площади ABC, которую дозволяется пренебречь за малостию. Это значит, что $\pi - A + \pi - B + \pi - C = 2\pi$, откуда $A + B + C = \pi$.

Поверим теперь это суждение, наперед ограничив плоскости дугами круга с полупоперечником $CC' = r$ и принимая



Чер. 4

точки A, B, C за центры. Окружность около C может пересекать бока угла $\pi - A$ в A', B', так что разделит плоскость в отверстии $\pi - A$ на две части: одну X внутри, другую x вне полного круга, которого C — центр. Бока угла $\pi - B$ могут быть пересечены тем же полным кругом в B', C', так что плоскость в отверстии $\pi - B$ разделится на две части: Y внутри, y вне круга, да кроме того, часть z из полного

круга не будет принадлежать к углу $\pi - B$. Вот все возможные случаи, которые представляет чертеж, предполагая $r > a$, $r > b$, $r > c$, $a > c$. Означая к тому Δ площадь треугольника ABC, R площадь круга с полупоперечником r, получим

$$\frac{R}{2\pi}(\pi - A) = X + x,$$

$$\frac{R}{2\pi}(\pi - B) = Y + y,$$

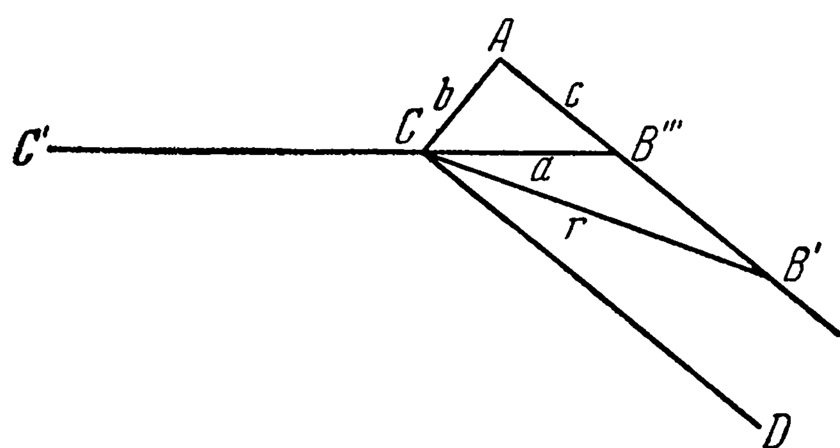
$$\frac{R}{2\pi}(\pi - C) = Z,$$

$$R = X + Y + Z + z + \Delta.$$

Отсюда находим

$$A + B + C = \pi + \frac{2\pi}{R}(\Delta - x - y + z). \qquad (1)$$

Оставалось бы теперь доказывать, что $\Delta = x + y - z$ в предположении суммы углов треугольника $S < \pi$ для всякого r, или по крайней мере для $r = \infty$; но предпринимать этот труд было бы напрасно. Напротив, с условием $S < \pi$ находим постоянно $\Delta < x + y - z$, как сейчас увидим. Возрастание $CC' = r$ удаляет точки B', B'', B''' от точки B по направлению AB, приближая линии CB', CB'', CB''' к известной границе CD (чер. 5), которую в новой теории назвал я *параллельной* с AB и которая с CA, CB делает углы



Чер. 5

$$ACD = \pi - A - \alpha, \qquad BCD = B - \beta,$$

так, что α, β — какие-нибудь положительные числа. Притом

$CB' = r$ всегда можно взять довольно большую линию, чтоб углы $B'CD$, $B''CD$, $B'''CD$ выходили как угодно малыми. Называя P площадь треугольника ACB', получим, следовательно, для весьма большого r (чер. 4) без приметной разности

$$\frac{1}{2\pi}(\pi - A - \alpha) R = \frac{1}{2\pi}(\pi - A) R + P - x \; [^{31}];$$

отсюда

$$x = P + \frac{1}{2\pi}\alpha R. \qquad (2)$$

Если на время полагаем угол $C'CD = M$ (черт. 5), то данное выше уравнение

$$(\pi - B) R = 2\pi (Y + y)$$

теперь может быть написано:

$$\frac{1}{2\pi}(\pi - B) R = \frac{1}{2\pi} MR + P - \Delta + y - z, \qquad (3)$$

куда вставляя значение

$$M = A + C + \alpha,$$

получим уравнение, которое в соединении с уравнением (2) снова приводит к уравнению (1) и таким образом его поверяет. Если ж берем

$$M = \pi - B + \beta,$$

то находим из уравнения (3)

$$\beta = \frac{2\pi}{R}(\Delta - P - y + z),$$

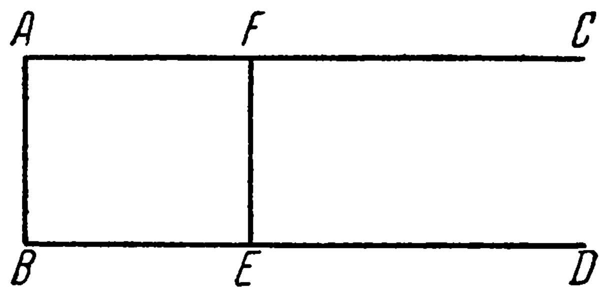
что в соединении с уравнениями (1), (2) дает

$$A + B + C = \pi - \alpha + \beta.$$

Итак, в доказательстве Бертрана подразумевалось уже $\alpha = 0$, $\beta = 0$, — то самое, что надобно было доказывать.

Подобно тому как Бертран довольствовался сравнением бесконечных плоскостей в углах треугольника, Лежандр хотел

обойтись с *двуугольниками* (biangles), разумея под этим названием бесконечные плоскости между двух перпендикулов [32]. Собственно, доказал он только то, что бесконечная плоскость $CABD$ (чер. 6) между перпендикулами AC, BD к AB равна бесконечной плоскости $DEFC$, которая происходит из первой с отделением от нее четыреугольника $ABEF$ помощию перпендикула EF к BD. Это само по себе, впрочем, ясно; но Лежандр еще выпустил здесь из внимания то, что FE может не встречаться с AC. Чтоб избежать этого небольшого затруднения, стоит только принимать EF перпендикулом из F к BD; но далее каким образом отсюда будет следовать $FE = AB$ и угол $EFC = \frac{1}{2}\pi$ уже нельзя более поправить ложное суждение, в котором неосмотрительность Лежандра была так велика, что, не примечая грубой ошибки, почитал он свое доказательство весьма простым и совершенно строгим.



Чер. 6

В теории параллельных думали принять еще за основание, что в треугольниках углы должны зависеть от содержания сторон *. С первого раза такое положение кажется столько же простым, сколько необходимым; но когда вникаем в наши понятия, откуда берет оно свое начало, то принуждены называть его так же произвольным, как и все другие, к которым до сих пор прибегали. В природе мы познаем собственно только движение, без которого чувственные впечатления невозможны. Итак, все прочие понятия, например Геометрические, произведены нашим умом искусственно, будучи взяты в свойствах движения; а потому пространство, само собой, отдельно для нас не существует. После чего в нашем уме не может быть никакого противоречия, когда мы допускаем, что некоторые силы в природе следуют одной, другие своей особой Геометрии. Чтобы пояснить эту

* Примером, непосредственно опровергающим эти соображения, является геометрия на сфере.

мысль, полагаем, как и многие в этом уверены, что силы притягательные слабеют от распространения своего действия по сфере. В употребительной Геометрии величину сферы принимают $4\pi r^2$ для полупоперечника r, от чего сила должна уменьшаться в содержании к квадрату расстояния. В Воображаемой Геометрии нашел я поверхность шара

$$\pi (e^r - e^{-r})^2,$$

и такой Геометрии, может быть, следуют молекулярные силы, которых за тем все разнообразие будет зависеть от числа e, всегда весьма большого *. Впрочем, пусть это чистое предположение только, для подтверждения которого надобно поискать других убедительнее доводов, но в том, однако ж, нельзя сомневаться, что силы все производят одни: движение, скорость, время, массу, даже расстояния и углы. С силами все находится в тесной связи, которую, не постигая в сущности, не можем утверждать, будто в отношение разнородных величин между собою должны только входить их содержания. Допуская зависимость от содержания, почему не предполагать и зависимости прямой? Некоторые случаи говорят уже в пользу такого мнения: величина притягательной силы, например, выражается массою, разделенной на квадрат расстояния. Для расстояния нуль это выражение, собственно, ничего не представляет. Надобно начинать с какого-нибудь, большого или малого, но всегда действительного расстояния, и тогда только сила появляется. Теперь спрашивается, как же расстояние производит эту силу? Как эта связь между двумя столько разнородными пред-

* Здесь предполагается, что за единицу измерения расстояний принят радиус кривизны пространства Лобачевского, а $e = 2{,}718\ldots$ — неперово число. Если же за единицу длины принять отрезок, в k раз больший радиуса кривизны, то e заменится числом e^k, а перед указанным выражением для поверхности шара появится множитель $\frac{1}{k^2}$. Следовательно, при большой единице длины число e будет весьма большим.

метами существует в природе? Этого, вероятно, мы никогда не постигнем; но когда верно, что силы зависят от расстояния, то линии могут быть также в зависимости с углами. По крайней мере разнородность одинакова в обоих случаях, которых различие не заключается собственно в понятии, но только в том, что мы познаем одну зависимость из опытов, а другую при недостатке наблюдений должны предполагать умственно, либо за пределами видимого мира, либо в тесной сфере молекулярных притяжений.

Как бы то ни было, но предположение, что содержание только расстояний может определять углы, будет частный случай, к которому всякий раз переходим, принимая линии бесконечно малыми*. Способ употребительной Геометрии приводит, следовательно, всегда к заключениям верным, однако ж не в таком обширном виде, в каком дает их общая Геометрическая система, которую назвал я *Воображаемая Геометрия*. Разность в уравнениях той и другой происходит от прибавления нового постоянного, которое должны бы давать уже наблюдения, но которое без чувствительной разности находим отсюда таково, что в измерениях на самом деле принятая всеми Геометрия более нежели достаточна, хотя б она сама по себе не была строго верной. Это значит, что в природе такая система либо находится случайно, либо все доступные для нас расстояния в ней еще бесконечно малы. Вообще, всякое положение, которое Воображаемая Геометрия допускает в элементах величины, будучи принято для линий в большом размере, должно необходимо приводить к правилам обыкновенной Геометрии, потому что с таким предположением удерживаются только первые степени тех чисел, которые представляют собою линии, а следовательно, везде в уравнениях войдут их содержания. Таковы положения, например, что расстояния между двумя перпендикулами◇ везде равны, что перпендикул описывает вершиной

---

* См. стр. 70 и примечание [23].

◇ К одной прямой.

прямую линию *, что круг с возрастанием поперечника переходит в прямую линию. Из всех известных подобных положений отдать надобно преимущество тому, которое принимает зависимость содержания линий от углов; по крайней мере здесь простота в понятии близка даже к первой нашей опытности; но вот и все, что можно сказать в защищение: всякое другое суждение будет либо ложно, либо неосновательно. Так, нельзя затрудняться тем, что с непосредственной зависимостью линий от углов войдет одна величина, столько же произвольная, как и выбор единицы. Против этого можем отвечать, что ничто не мешает представлять себе в уравнениях содержание линий не к одной из тех, которые тут рассматриваются, но к такой, которая каким-нибудь образом определена в природе. Это показал я в Воображаемой Геометрии, дав уравнения, где все линии входят в содержании к одной только, которую бы требовалось найти из наблюдений, если б они были к тому достаточны. Почитаю не нужным подробно разбирать другие положения, слишком искусственные, либо произвольные. Из них одно только заслуживает еще некоторое внимание: это переход круга в прямую линию. Недостаток виден здесь, впрочем, с первого раза в нарушении постепенности, когда кривая, которая не перестает замыкаться, как бы ни была велика, должна грубо превратиться в бесконечную прямую, потеряв, таким образом, существенное свойство. В этом отношении Воображаемая Геометрия гораздо лучше пополняет промежуток. В ней, увеличивая круг, которого все полупоперечники сходятся в одну точку, приходим, наконец, к такой линии, где нормальные [прямые] сближаются в бесконечности, хотя не могут уже пересекаться. Такое свойство не принадлежит, однако ж, прямой, но той кривой линии, которую назвал я *предельной круга* в сочинении моем *о началах Геометрии*.

Наконец, если затруднительную задачу параллелизма надобно решить опытом, то предложенный Лежандром, уклацы-

* Если другой конец отрезка перемещается по прямой, к которой отрезок перпендикулярен.

вать шесть раз полупоперечник по кругу без сомнения должен почитаться слишком недостаточным. В моих *началах Геометрии*, пользуясь Астрономическими наблюдениями, показал я, что в треугольнике, которого бока равняются почти с расстоянием земли до солнца, сумма углов не может разниться с двумя прямыми более 0,0003 секунды градуса*. Эта разность увеличивается в геометрическом содержании к бокам треугольника, а следовательно, до сих пор употребительная Геометрия, как я заметил выше, более нежели достаточна в измерениях на самом деле. К такому заключению можно даже прийти с помощью предложений довольно простых и приличных началам науки, хотя полная теория требует уже совершенно переменить порядок в преподавании, с присоединением сюда Тригонометрии.

К несовершенству в теории параллельных надобно было причислять определение самой параллельности. Однако ж это несовершенство нисколько не зависело, как подозревал Лежандр, от недостатка в определении прямой линии, ни даже от тех недостатков, прибавлю, которые скрывались в первых понятиях и которые намерен я здесь указать и попытаться, сколько могу сам, их исправить.

Геометрию начинают обыкновенно, придавая телам три протяжения, поверхностям два, линиям одно, в точке не допуская никакого. Называя три протяжения: длина, ширина, высота и разумея под этими названиями собственно три координаты, спешат, таким образом, преждевременные понятия сообщить словами, к которым разговорный язык придает уже какое-то, хотя для точной науки еще неопределенное значение. В самом деле, как можно с ясностью себе представлять измерение в длину, когда не знаем еще, что такое прямая линия? Как можно говорить о ширине, высоте, ничего не сказав наперед о перпендикулах, о плоскости, как бывают перпенди-

* См. Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. I, Гостехиздат, 1946, стр. 207—210.

кулы в одной и в разных плоскостях? Наконец, если в точке нет ни одного протяжения, то что же в ней остается затем, чтоб она могла быть предметом суждения? Пусть и так, что прямую линию всякий ясно себе представляет, хотя не может еще дать отчета в своем понятии, но спрашивается, каким образом помощию прямой должен он назначать теперь одно протяжение в кривой линии, два в кривой поверхности?

Правда, нет необходимости требовать, чтобы длина, ширина, высота были друг к другу перпендикулярны: довольно, когда для них взяты линии в различных направлениях. Однако ж и в этом случае встречаются своего рода затруднения. Принимая за правило преждевременно не заимствовать из тех понятий, которые должно раскрыть еще в последствии, как, спрашивается, выразить теперь условие, чтобы три размера в телах принадлежали трем прямым в разных плоскостях? Потом, различное направление двух частей от точки перелома на линии не должно смешивать с двойным протяжением в плоскости, и, наконец, определить вполне, что такое надобно разуметь под направлением и под углом. Короче: пространство, протяжение, место, тело, поверхность, линия, точка, направление, угол — слова, которыми начинают Геометрию, но с которыми никогда не соединяют ясного понятия.

Между тем, на все такие предметы можно смотреть еще с другой стороны. Надобно заметить, что темноту в понятии здесь производит отвлеченность, которая в применении к действительным измерениям делается лишней, а следовательно, в самую теорию введена напрасно. Поверхности, линии, точки, как их определяет Геометрия, существуют только в нашем воображении, тогда как измерение поверхностей и линий производим, употребляя к тому тела. Вот почему стоит только говорить о поверхностях, линиях и точках, как их в действительном измерении разуметь должно, и тогда будем уже держаться тех самых понятий, которые с представлением тел в нашем уме непосредственно соединены, к которым наше воображение приучено, которые можем поверять в природе прямо, не прибегая

наперед к другим, искусственным и посторонним. Но с этими новыми понятиями наука в самом начале получает другое направление, которому следует, покуда не перейдет в аналитику, так что способ преподавания теперь уже принимает особенный вид. Постараюсь объяснить, в чем эта перемена может заключаться.

В Математике следуют двум способам: анализу и синтезу. Отличительную принадлежность анализа составляют уравнения, которые служат первым основанием всякому суждению и ведут уже ко всем заключениям. Синтез, или способ построений, требует того самого представления, которое соединено непосредственно с первыми понятиями в нашем уме. Главная выгода в анализе та, что здесь от уравнений идут всегда прямою дорогой к предположенной цели. Синтез не подчиняется каким-нибудь общим правилам, но с него надобно начинать по необходимости, чтобы, наконец, отыскав уравнения, достигнуть с тем вместе той черты, за которой все переходит уже в науку чисел. Например, в Геометрии доказывают, что два перпендикула не пересекаются, что с равенством некоторых только частей треугольники бывают уже во всем одинаковы. Напрасно бы хотели такие случаи, как и всю теорию параллельных, рассматривать аналитически. В этом никогда не успеют так же, как не могут обойтись без синтеза в измерении плоскостей, ограниченных прямыми линиями, в измерении тел, ограниченных плоскостями. Само по себе разумеется, что в синтезе даже должно пользоваться пособием анализа, но то неоспоримо, что в началах Геометрии и Механики никогда не может анализ быть единственным способом. Геометрии до известной степени всегда будет принадлежать собственно геометрическое, никаким образом от нее неотъемлемое. Можно стеснять круг синтеза, но совсем уничтожить его нельзя. Даже в этом старании заменить синтез анализом не надобно столько спешить уже, чтобы допускать всякий раз функции, где только зависимость предвидеть можно, не зная в чем еще заключается, того менее, как будет она выражаться. С этим ограничением в анализе назначаем

истинную цель и надлежащее место другому способу *, который один сперва начинает науку с таких понятий, откуда суждение производит уже все прочее, выводя тотчас из первых его данных новые, так потом и далее расширяя пределы наших познаний во всех направлениях до бесконечности. Первыми данными, без сомнения, будут всегда те понятия, которые мы приобретаем в природе посредством наших чувств. Ум может и должен их приводить к самому меньшему числу, чтобы они служили потом твердым основанием науке. Однако ж обыкновенно синтетическому способу в этом виде, с соблюдением всех сказанных здесь правил, никто не следует, предпочитая, хотя бы прежде времени, вводить анализ и предполагая развитие, хотя бы неполное, тех понятий, которые составляют природный ум наш и которым остается придать только названия, не распространяясь много в объяснениях и не затрудняясь точностью в определениях. Если легкость и простота заставляют избирать такой способ преподавания, то на стороне строгой истины всегда будет свое преимущество, которым когда-нибудь надобно пользоваться. Первый опыт этому сделал я с Алгеброй◇ и теперь предпринимаю то же с Геометрией.

Чистый анализ, без всякой уже примеси синтеза, не прежде может начинаться в Геометрии, как после того, когда всякая зависимость представлена будет уравнениями и для всякого рода геометрической величины будут даны выражения. Величину в Геометрии можем понимать только с измерением, которое для кривых линий и поверхностей собственно не существует. Как бы малы ни были взяты части кривой, [они] остаются всегда кривыми, следовательно, помощию прямой никогда не могут быть измерены. То же надобно сказать о кривой поверхности, где как бы тесно части ни были разграничены, никогда не будут плоскими. С другой стороны, в природе нет ни прямых, ни кривых линий, нет плоскостей и кривых поверхностей:

* Т. е. синтезу.

◇ «Алгебра или вычисление конечных» (Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. IV, Гостехиздат, 1948).

в ней находим одни тела, так что все прочее, созданное нашим воображением, существует в одной теории. Лагранж в основание принимал положение Архимеда, что две точки на кривой могут быть всегда взяты так близко, чтобы дуга между ними почиталась уже более хорды, но меньше двух касательных к дуге, проведенных от ее концов до взаимной встречи (Théorie des fonctions analytiques, par Lagrange). Такое положение действительно необходимо, но с ним уничтожается начальная мысль мерить кривые линии прямыми. Тот же случай с поверхностями, когда предполагают мерить их плоскостями. Итак, вычисление длины кривой линии, как и величины кривой поверхности, нисколько не представляет, так сказать, выпрямление кривизны,— но клонится совсем к другой цели: сыскать границу, к которой тем ближе подходит измерение на самом деле, чем это последнее сделано вернее. Измерение же полагают вернее той цепью, которой звенья мельче; самым верным, наконец, когда вместо цепи берут тонкую нить, совершенно гибкую. Вот почему в Геометрии надобно собственно доказывать то, что сумма касательных уменьшается вместе с тем, как сумма хорд увеличивается, покуда две суммы перестанут приметно разниться с границей, к которой обе приближаются и которую Геометрия принимает уже за длину кривой линии. Теперь ясно, что вычисление по такому правилу тем согласнее бывает с измерением, чем это последнее вернее. Здесь видно также, на чем основано положение Архимеда. По примеру кривых линий должно рассуждать о величине поверхностей, нисколько не утверждая, будто весьма малые части способны выпрямляться *.

Для плоскостей, ограниченных кривыми линиями, и для тел, ограниченных кривыми поверхностями, также в строгом смысле не существует измерения, как скоро мерою должны

* Лобачевский отчетливо формулирует, что необходимо дать точное определение понятия длины кривой линии, площади кривой поверхности и т. п. как предела сумм определенного рода, к которому реальные измерения будут приближаться тем более, чем они точнее, т. е. чем мельче взята единица измерения.

служить в первом случае квадрат, во втором куб*. Однако ж всегда предполагая найти только границу, к которой действительное вымеривание приближается, надобно показать, что к такой границе непременно всякий раз приходим, потом объяснить, каким образом измерение должно себе представлять и как в нем можем достигать желаемой точности. Чтобы удовлетворить всем этим требованиям, нельзя здесь обойтись без особых вспомогательных положений, которые принимают уже за аксиомы: 1) плоскости равны◊, когда для составления одной из них другая делится на части, которые соединяются в новом порядке; 2) плоскость△ менее той, в которой она вся помещается, не наполняя притом ее совершенно; 3) величина треугольника исчезает с беспредельным уменьшением одной стороны. Последнее положение даже необходимо в измерении самых плоскостей. К подобным аксиомам надобно прибегать и в измерении тел.

---

* Замечание о квадрате и кубе относится лишь к случаю площадей и объемов в эвклидовой геометрии. В геометрии Лобачевского квадрат и куб не существуют.

◊ Т. е. площади плоских фигур равны.

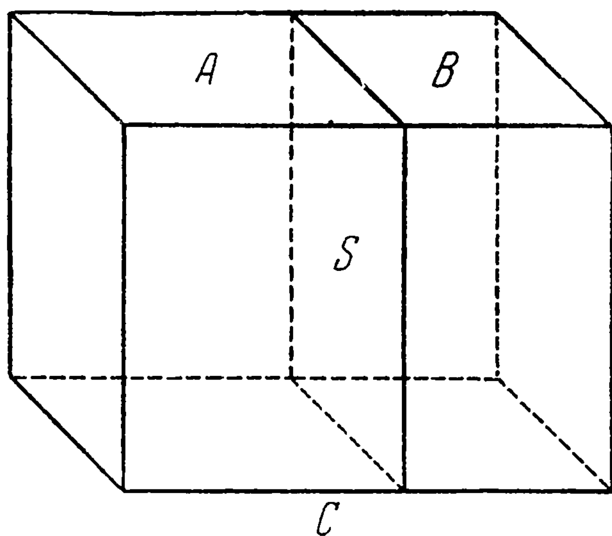
△ Т. е. площадь плоской фигуры.

Глава I

ПЕРВЫЕ ПОНЯТИЯ В ГЕОМЕТРИИ [33]

1. *Прикосновение* составляет отличительную принадлежность тел и дает им название *геометрических*, когда в них удерживаем это свойство, не принимая в рассуждение все другие, существенные ли то будут или случайные [34].

Кроме тел, предметом суждения бывают, например, время, сила, скорость движения; но понятие, какое заключается в слове прикосновение, сюда не относится. Мы соединяем его в нашем уме с одними телами, когда говорим об их составлении, либо разделении на части. Это простое представление, получаемое прямо в природе чувствами, не происходит из других, а потому не подлежит уже толкованию.



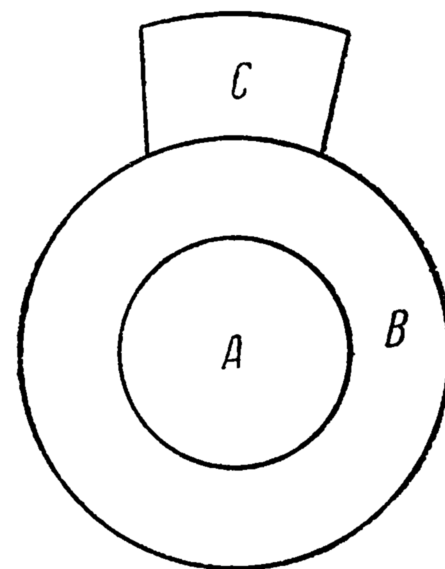
Чер. 7

Два тела A, B (чер. 7), *касаясь* друг друга, составляют одно Геометрическое тело C, где составные части A, B являются каждая порознь, не теряясь в целом C.

Обратно, всякое тело C произвольным *сечением* S разделяется на две части A, B. Здесь под словом сечение не разумеем какую-нибудь новую принадлежность, но то же прикосновение, выражая в этот раз уже деление тела на две прикосновенные части. Две части A, B будем называть еще *сторонами* сечения S в теле C.

Так можно представлять себе все тела в природе частями одного целого, которое называем *пространством* [35].

2. Ко всякому телу A (чер. 8) может касаться другое B так, что прикосновение третьего C к A и к B вместе сделается невозможным. В таком случае B называют *окружным пространством*, предполагая, что в нем заключается всякое тело C, или *местом* тела A, принимая в рассуждение только прикосновение A с B и потому дозволяя всякую часть C, не прикосновенную к A, выбрасывать из окружного пространства [36]. Когда тело A находится в этом роде прикосновения с B, притом с A нельзя соединять никакого тела, которое бы не касалось B, то говорят, что A *наполняет* место B. Все другие тела, которые без всякой с ними перемены наполняют также место B, будут уже геометрически во всех отношениях *одинаковы* между собою.



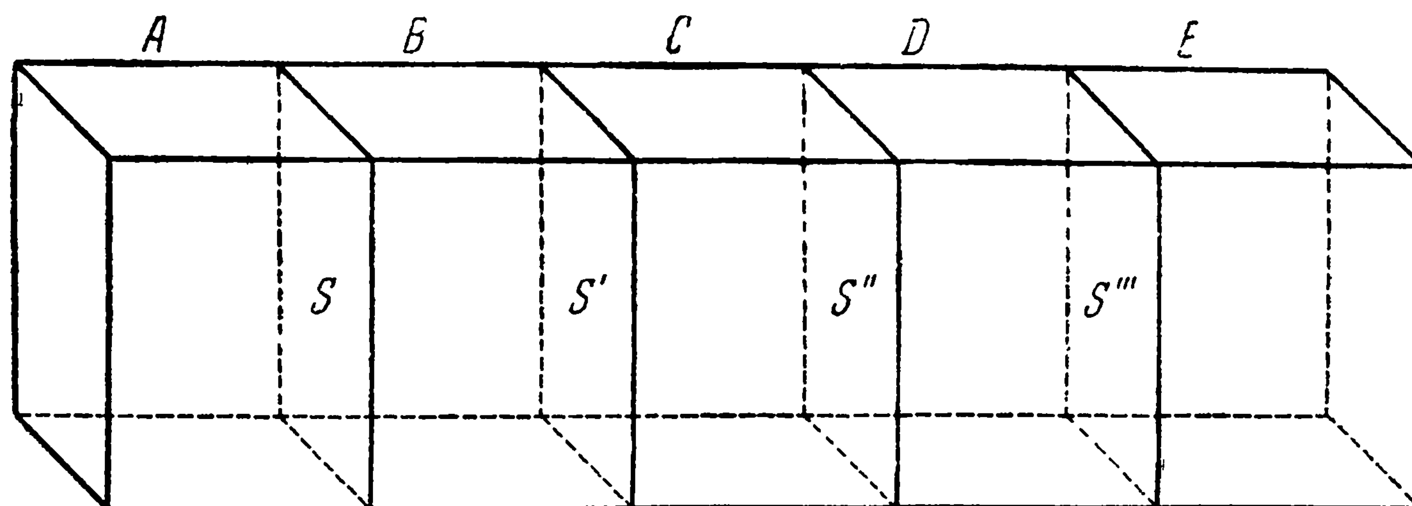
Чер. 8

Два тела только что *равны*, как скоро части одного должны быть расположены в новом порядке, чтобы наполняли место другого* [37].

Измерение геометрического тела будет произведено, когда разделяем его с другим, принятым за меру, на равные части. После чего величина выразится содержанием числа частей в данном теле к числу частей в мере. Возможность найти величину тел предполагает, следовательно, возможность составлять всякое тело повторением одного, которое, прикладываясь само к себе, наполняло бы, наконец, как измеряемое, так и самую меру. Если нельзя в этом успеть совершенно, то начинают с того, что мере дают известный вид, затем разделяют ее так на части, хотя произвольного размера, но всегда одинаковые, чтоб она сама с собой и с частями производила сплошное тело,

* Лобачевский пользуется термином «одинаковы» вместо принятого теперь «конгруэнтны» и термином «равны» вместо «равносоставлены».

наполняя пространство вне всяких границ. После чего в составлении можно будет подходить к образованию всякого тела, достигая той степени равенства, за которой наши чувства перестают уже постигать недостатки. Тогда погрешности в измерении не превзойдут тех отклонений, какие бывают даже в самой природе, которая должна быть всегда главною целию в науках, и где хотя мы почерпаем первые понятия, но самою строгостию



Чер. 9

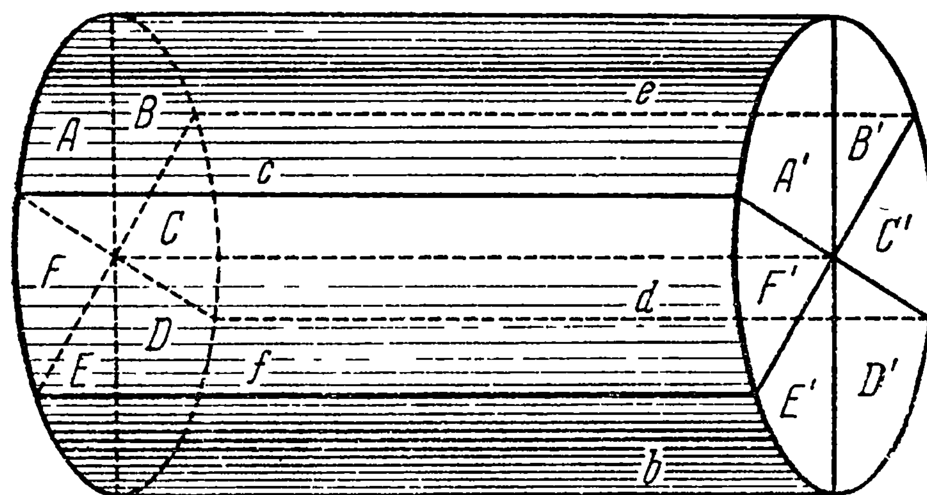
в них бываем одолжены несовершенству наших чувств. Действительно, в природе непрерывного составления нет, а следовательно, правильность образования не поддерживается до малейших частиц, как она представляется с первого раза для всего целого в большом размере. С другой стороны, хотя производим в нашем воображении несоизмеримые тела, как, например, шар и куб, однако ж стоит условиться в признаках большего и меньшего, следовательно допускать уже во всем определенную величину, потом заключать измеряемое в границы, которые бы можно было сближать по произволу, тогда будем подходить с какой угодно точностию к величине мысленных образцов [38].

3. *Всякое тело может быть разделено на части, которые не касаются взаимно через одну.* Такие сечения назовем *поступательными.* Они назначают *протяжение*, по которому тело простирается до бесконечности, когда непрестанно прибавляем

от окружного пространства новые части, неприкосновенные через одну.

В чертеже 9 представлены части A, B, C, D, E тéла, которые по порядку соединены прикосновением, тогда как A не касается ни C, ни D, ни E; также B не касается ни D, ни E. Сечения S, S', S'', S''', которыми такое деление произведено, будут поступательные.

4. Первое сечение делит тело на две части; второе, переходя с одной стороны на противоположную, производит уже четыре.



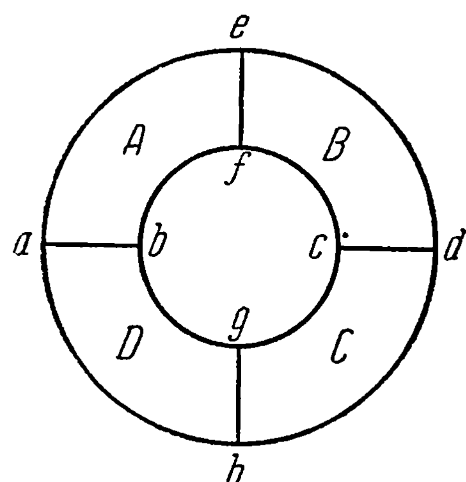
Чер. 10

В таком случае *два сечения можно всегда так провести, потом прибавлять еще новые, чтобы с каждым разом увеличивалось двумя число частей, которые все взаимно друг друга касаются.* Такие сечения, которых, следовательно, число неограничено, будем называть *обращательными* [39].

В чертеже 10 сечение ab разделяет тело на две части; сечения cd, ef прибавляют еще по две, так что все шесть частей, AA', BB', CC', DD', EE', FF', взаимно касаются. Например, AA', касается не только BB', но даже CC', DD', EE', FF'. Три сечения ab, cd, ef будут обращательные.

Два сечения, из которых каждое в отношении к другому переходит с одной стороны на противоположную, будем называть для краткости *сечениями накрест.* Например, в чертеже 10 сечения ab, cd проведены накрест. Из четырех частей, такими сечениями в теле произведенных, тем двум, которые в отношении

к обоим сечениям находятся на противоположных сторонах, дадим название *долей накрест.* В чертеже 10 представлены доли накрест AA' с DD', BB' с EE', CC' с FF'. Здесь AA' с DD' лежат на противоположных сторонах как в отношении к сечению *ab*, так и к *cd*. Надобно заметить, что два сечения накрест разделяют иногда тело на четыре части, неприкосновенные через одну. Однако ж в таком случае первая доля соединяется вновь прикосновением с четвертой, а потому здесь деление нельзя смешивать с тем, которое происходит от поступательных сечений. На чертеже 11 представлен вид с боку такого тела, которое сечениями *abcd*, *efgh* разделяется на четыре части A, B, C, D, неприкосновенные через одну. Между тем, первая часть A соединена с четвертой D, а потому деление нельзя почитать произведенным посредством четырех поступательных сечений *ab*, *ef*, *cd*, *gh*.



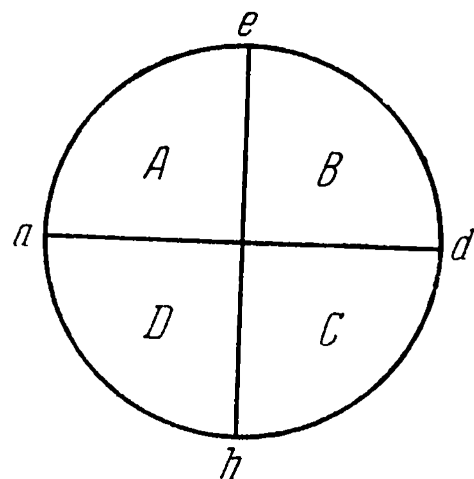
Чер. 11

Отличительный признак сечений поступательных от сечений накрест будет тот, что первые не переходят с одной стороны на противоположную. В чертеже 11, напротив, сечение *abcd* разделяет тело на две части — *ahd*, *aed*, которые представляют две стороны сечения *abcd*; другое сечение *efgh* с одной стороны *aed* переходит на другую *ahd*. Если бы часть D, например, была отброшена, через что прикосновение A с D, D с C было бы прервано, то в таком случае два сечения *ef*, *cd* сделались бы поступательными. Впрочем, с двумя сечениями накрест должно всегда происходить прикосновение по крайней мере двух долей накрест, если не в самом теле, то в окружном пространстве; следовательно, с прибавлением отсюда какой-нибудь части к телу. Так в чертеже 11 тело может быть дополнено частию, взятой от окружного пространства, с тем чтобы в этом составном теле два сечения не прерывались.

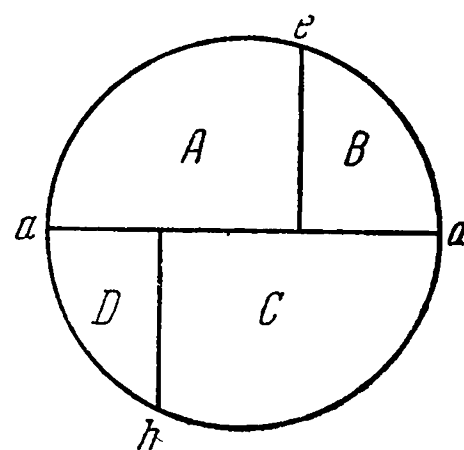
Предполагая сечения непрерывными, можем допускать два случая: или сечения *ad*, *eh* (чер. 12) производят четыре части A,

B, C, D, из которых каждые две A с C, B с D касаются накрест; или где только две части, например A с C (чер. 13), касаются, тогда как две другие, B с D, не соединены. В одном только первом из этих двух случаев сечения ad, eh (чер. 12) будут обращательными.

5. *Всякое тело можно тремя сечениями разделять на восемь частей взаимно прикосновенных, так чтобы сечения поступательные к каждому из трех отделяли всегда по четыре части взаимно прикосновенные.* В таком случае три сечения назовем *главными*, которых уже более числом существовать в телах не может, хотя каждое заменяется как обращательным его, так и поступательным. Четвертого сечения, которому бы могло принадлежать название главного под этим условием, никакое тело не допускает. Действительно, мы не в состоянии ни одно тело разделять четвертым сечением, удваивая число долей взаимно прикосновенных, так чтобы прикосновение всех шестнадцати частей сохранялось, когда сечения заменяем их поступательными [40].



Чер. 12

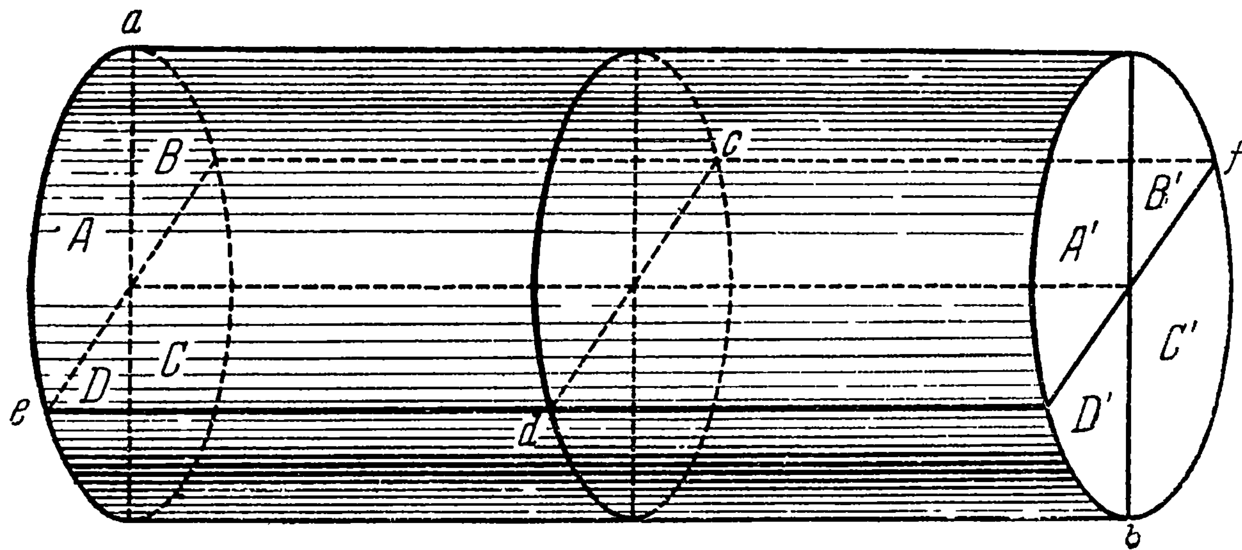


Чер. 13

Три главные сечения ab, cd, ef (чер. 14) разделяют тело на восемь частей A, B, C, D, A', B', C', D', взаимно прикосновенных. То же бы произошло, когда бы вместо cd, например, взяли которое-нибудь из его поступательных или одно из обращательных.

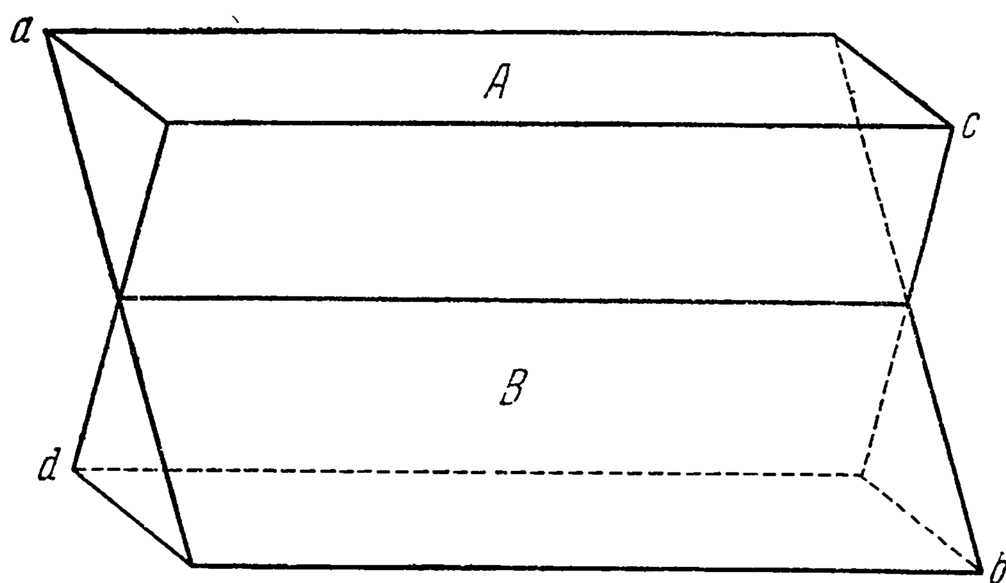
Еще не довольно, чтобы все восемь долей взаимно касались, если три сечения, которыми тело разделено, должны быть

главными. Надобно чтобы поступательные к каждому вырезывали всякий раз по четыре части, прикосновенные накрест, по крайней мере, когда не принимаем в рассуждение доли, совсем уже



Чер. 14

накрест неприкосновенные. Воображаем теперь, что к одному из трех сечений проведено поступательное: между ними вырежутся четыре части, которых прикосновение может быть одно из трех, представленных на чертежах 11, 12, 13. Первый случай не решает еще, должно ли почитать сечения *cd*, *eh* за два

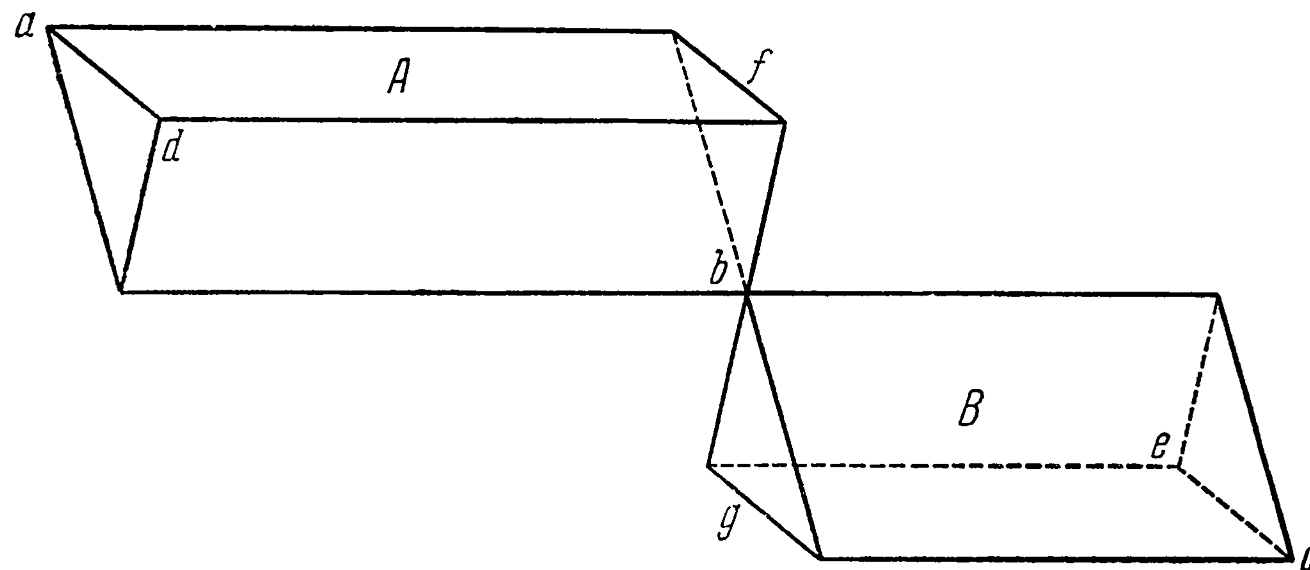


Чер. 15

главные; но в случае, который видим на чертеже 12, два сечения *ad*, *eh* могут быть главными, когда то же повторяется везде между поступательными сечениями, или по край-

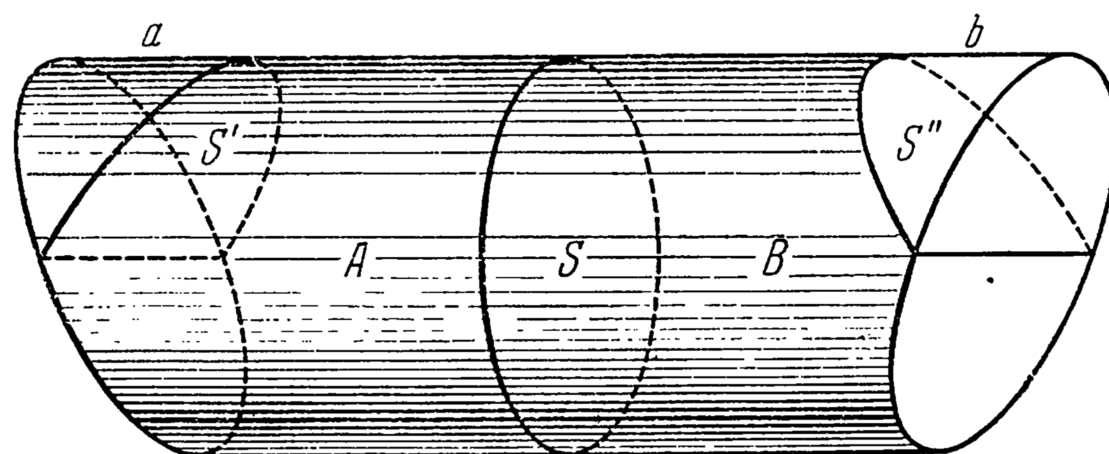
ней мере только между некоторыми прикосновение накрест совсем уничтожается.

6. Когда в теле три главные сечения проведены, с тем вместе восемь долей взаимно прикосновенных произошли, то в отно-



Чер. 16

шении к первому сечению две части касаются *поверхностно*, в отношении к двум сечениям две части накрест касаются *линейно*, в отношении ко всем трем сечениям две части на противоположных сторонах касаются *в точке*.

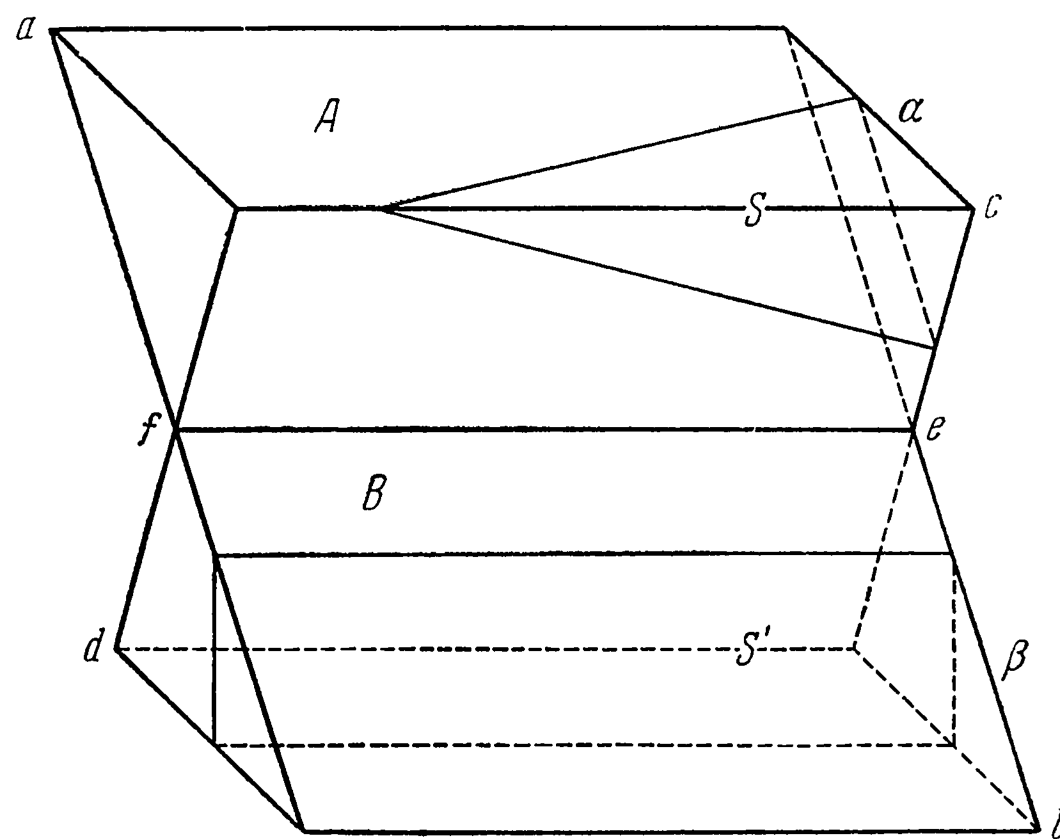


Чер. 17

Чертеж 7 представляет поверхностное прикосновение двух частей A, B в теле C. На чертеже 15 видно линейное прикосновение двух тел A, B, которые могут быть вырезаны из одного посредством сечений ab, cd. В чертеже 16 два тела A, B касаются

друг друга в точке, будучи вырезаны из одного помощию трех сечений *abc*, *dbe*, *fbg*.

Всякое тело с окружным пространством находится в поверхностном прикосновении: Сечение, которым оно бывает отделено, можно рассматривать то за одно, то за два обращательные,



Чер. 18

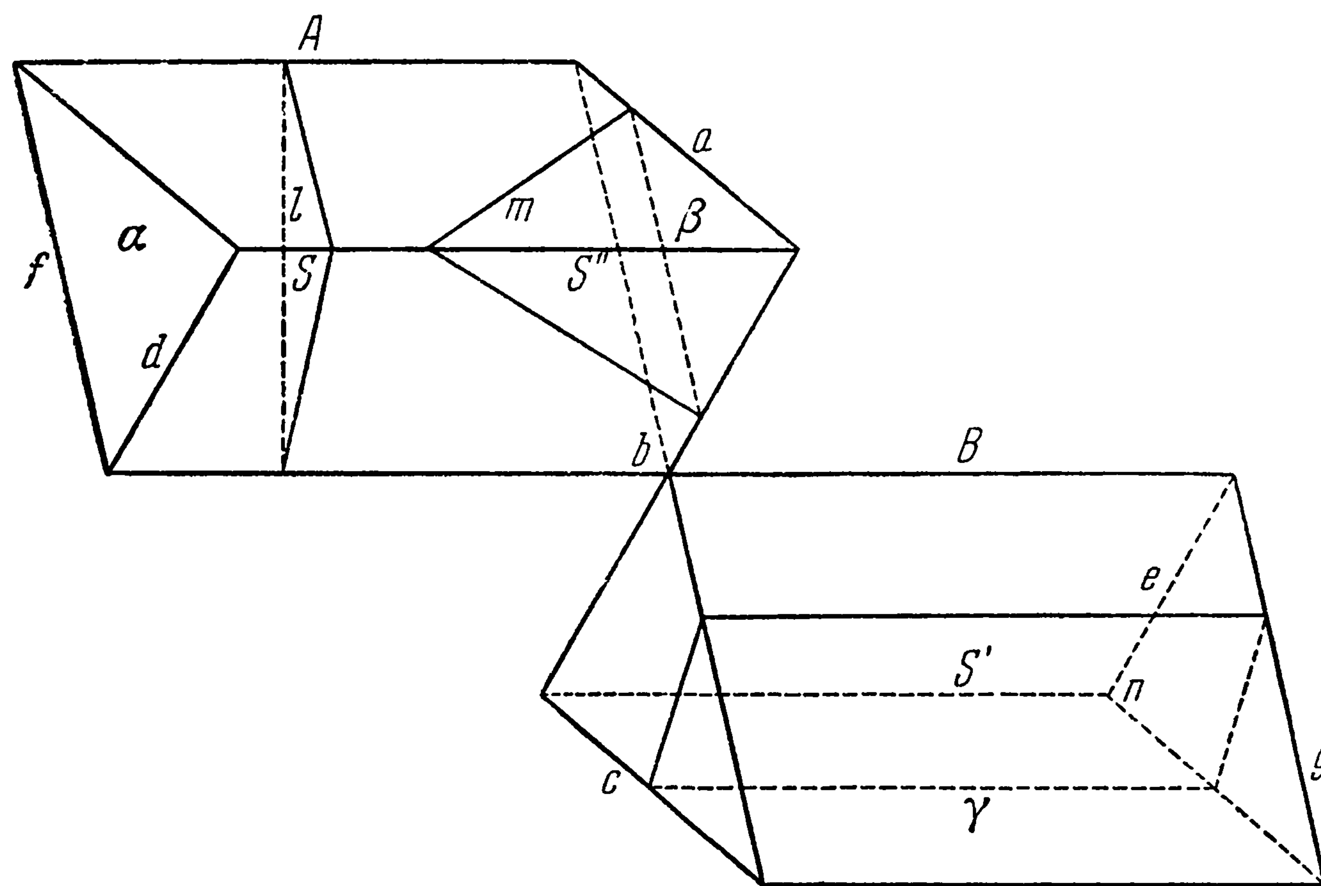
то, наконец, за три главные. Итак, две части в теле касаются либо поверхностно, либо линейно, либо в точке.

7. Если говорим о прикосновении только двух тел*, следовательно, не принимаем в рассуждение части, которые в одном не касаются другого, то два тела получают название *поверхности*, *линии*, *точки*, смотря по тому, какого рода прикосновение между ними будет: поверхностное, линейное, либо в точке.

Так, если два тела A, B (чер. 17) касаются поверхностно, находясь на двух сторонах сечения S, то получают уже название поверхности S, как скоро дозволяется прикладывать и отбрасывать от A всякую часть a, не прикосновенную к B, от B

* Слово «только» здесь относится к слову «прикосновение» («Если говорим только о прикосновении двух тел»).

всякую часть b, не прикосновенную к A. Отделение таких частей a, b должно происходить помощию поступательных сечений S', S'' к S и может продолжаться, покуда доходим в двух телах до тонкости бумажного листа или как далеко воображение в состоянии следовать еще за делением. Обыкновенно в этом виде представляют себе поверхности, при чрезвычайной тон-



Чер. 19

кости двух тел, устраняя те части в них от нашего внимания, которые не нужно совсем принимать в рассуждение.

Если два тела A, B (чер. 18) касаются линейно, представляя собой части одного, вырезанные двумя сечениями ab, cd, притом дозволяется от A отнимать всякую часть α, не прикосновенную к B, от B всякую часть β, не прикосновенную к A, то два тела A, B под таким условием принимают уже название линии. Отделение частей α, β может происходить в обоих телах помощию поступательных сечений S, S' к двум сечениям ab, cd и доводить тела до тонкости волоса, или черты ef на бумаге, или как только далеко воображением в состоянии постигать это деление. Так обыкновенно представляют линии, наперед

сделавши неприметным в них то, что не должно здесь обращать на себя внимание.

Если два тела A, B (чер. 19) касаются в точке, следовательно, могут быть принимаемы за доли, вырезанные в одном помощию трех главных сечений abc, dbe, fbg, то A, B называются точкой в таком случае, когда дозволяется от A отнимать всякую часть α, β, которая не касается B; от B всякую часть γ, не прикосновенную к A. Отделение таких частей происходит в обоих телах посредством сечений S, S', S'', поступательных к трем главным abc, dbe, fbg, и доводит, наконец, тело до малости песчинки, или до точки b от прикосновения пера, откуда заимствовано самое название*.

Прикосновение всякого тела к окружному пространству производит поверхность, которая *граничит* тело. Самое тело будет *внутренняя*, окружное пространство — *внешняя сторона* поверхности. Сечения в теле производят поверхности, которые называются *внутренними*, различаясь тем самым от *наружной* в прикосновении к окружному пространству.

Всякая линия принадлежит к бесчисленному множеству поверхностей, производимых обращательными сечениями (ст. 4). Это самое разумеют, говоря, что поверхности *пересекаются в линии*, которая *лежит* в каждой из них и разделяет ее на две части — *стороны линии*. В пересечении наружной поверхности тела со внутренней, продолженной вне тела, происходит линия, которая, *замыкаясь*, *граничит* внутреннюю поверхность или, другими словами,— разделяет *внутреннюю сторону линии от наружной*, беспредельной в окружном пространстве.

Точка принадлежит всем линиям, в которых три главные сечения с их обращательными пересекаются. Каждую линию точка разделяет на две части, которые назначают две противоположные стороны точки. Если линия замыкается, то надобно вынимать из нее часть, чтобы не смешивать более две соединенные стороны [41].

---

* «*Точка*» — отточенное острие гусиного пера, которым писали во времена Лобачевского.

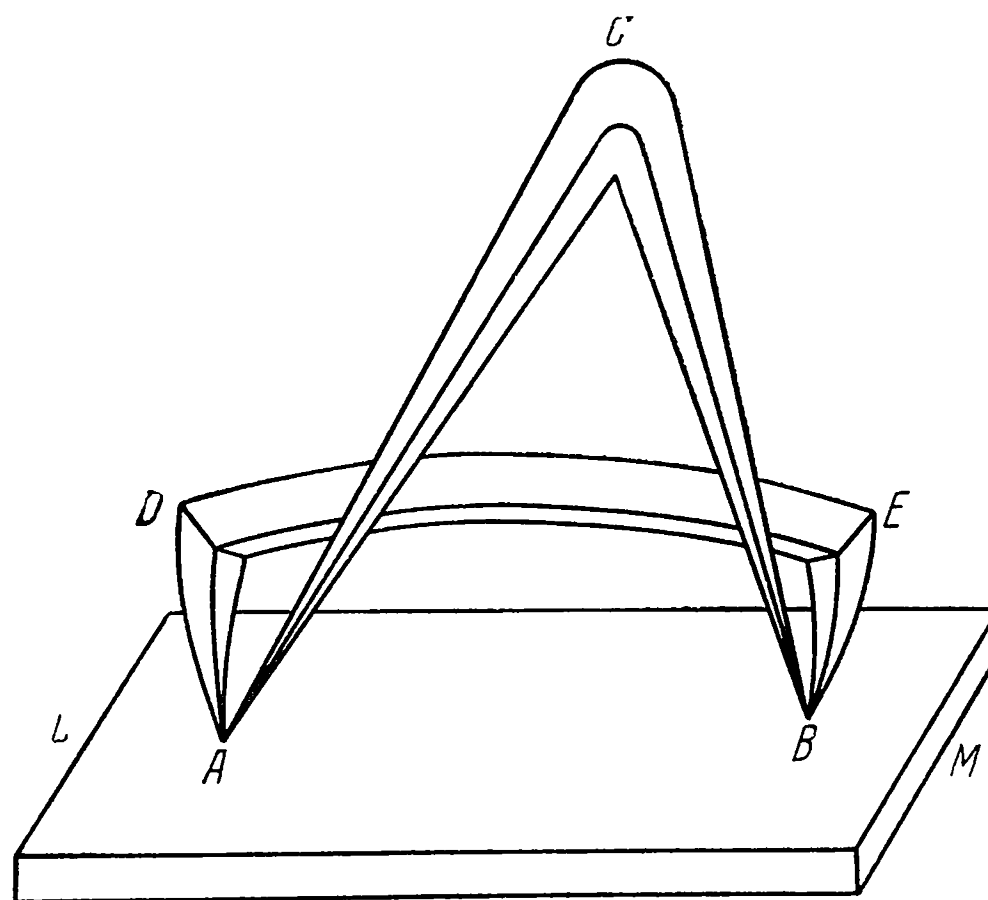
8. Измерение тел требует разделять их на равные части (ст. 2). Деление может быть произведено помощию поступательных сечений к трем главным; а потому телам принадлежат три протяжения, назначаемые тремя рядами поступательных сечений.

Если предположить, что мы в состоянии таким образом всякое тело вымерять, как это будет доказано впоследствии [42], то к каждому сечению можем провести поступательное, вырезывая между ними такую часть, которой величина может быть уменьшаема как угодно сравнительно с величиной всего тела. С другой стороны, уменьшение такое в величине тела не переменяет поверхности, которую первое сечение производит. Итак, в этом отношении величина поверхности должна почитаться нулем в сравнении с величиною тела.

9. Измерение поверхности, подобно как измерение тел, требует деления на равные части. Такое деление возможно, когда к сечению, которое производит самую поверхность, присоединяем еще два, чтобы составить три главные; потом к этим двум прибавленным ведем поступательные. Здесь два ряда поступательных сечений назначают два протяжения, тогда как в третьем отрезываются только части, которые к поверхности не принадлежат (ст. 7).

Если предположим, что поверхность таким образом всегда может быть вымерена, так же, как и всякая часть ее между двумя поступательными сечениями, которые назначают одно протяжение, то часть эту можем уменьшать произвольно в сравнении с величиною всей поверхности. А как часть поверхности составляет сторону линии, то в этом отношении величина линии будет нулем сравнительно с поверхностью. Итак, в измерении поверхностей можно, следовательно, поступательные сечения заменять их обращательными: это значит уже, что надобно принимать только в рассуждение самые линии, проведенные на поверхности, к каким бы сечениям, впрочем, они ни принадлежали и как бы сечения вне поверхности ни продолжались.

10. Измерение линий требует разделения на части, которые можно вырезывать одним только рядом поступательных сечений, проведенных к третьему главному, принимая за два другие те самые, где линия находится. Действительно, поступательные сечения к двум последним отрезывают только части, не принадлежные к линии (ст. 7).



Чер. 20

Предполагая возможность найти величину всякой линии, также всякой части на ней между двумя точками, потом допуская, что часть эта может по произволу быть уменьшаема, должны принимать линию за нуль в сравнении с величиною поверхности, потому что все такие части не принадлежат уже к точке.

11. Величину точки должно во всяком случае почитать за нуль в сравнении с величиною линий, потому что все линии, как бы малы ни были, могут уменьшаться, без всякого влияния на величину точки, которая таким линиям принадлежит (ст. 7).

Вообще, как линии, так и точки, соединяясь между собою сечениями, к которым они принадлежат и которые, следовательно, все будут уже друг к другу обращательными, не могут увеличиваться с тем вместе как сечения, заменяясь одно другим,

не производят новых линий и точек. Итак, в этом роде соединения величина двух линий остается снова величиной, большей из них, или той же в случае равенства; величипа же точки всегда не переменяется. Это свойство линий и точек, от удваивания не увеличиваться, между геометрическими величинами то же, какое между числами принадлежит нулям.

12. Относительное положение двух точек называется *расстоянием* и назначается прикосновением двух тел, в которых допускаются все те перемены, какие не переменяют самых точек; так что расстояние почитается то же, когда разность происходит от частей одного тела, не прикосновенных к другому, или от различных обращательных сечений, к которым точки равно принадлежат [43].

Расстояние точек A, B (чер. 20) определяется прикосновением тела LM к ACB так же, как и прикосновением тела LM к ADB, потому что здесь различие в телах прикосновенных составляют или те части в одном, которые не касаются другого, или такие части, которых наружные поверхности представляют обращательные сечения, куда принадлежат две точки.

Глава II

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ШАРА, СФЕРЫ, КРУГА, ПЛОСКОСТИ И ПРЯМОЙ ЛИНИИ

13. *Шар* есть тело с такой наружной поверхностию — *сферой*, которой все точки в равных расстояниях (ст. 12) от одной внутри — *центра* шара или сферы. Это расстояние центра до точек сферы называется *полупоперечник** шара, так же как и самой сферы.

С первым понятием о телах в Геометрии принимаем уже центр внутри шара, представляя себе вокруг всякой точки сферу, как такую поверхность, которая граничит совершенно часть пространства в полном ее прикосновении с окружным (ст. 2).

14. *Сферы с равными полупоперечниками бывают одинаковы*, потому что сливаются во всех точках, когда центр у них общий (ст. 2).

Шары с равными полупоперечниками также одинаковы, один наполняя место другого (ст. 2).

Одинаковые сферы вокруг одного центра сливаются, таким образом, всякий раз, какая бы точка в одной куда бы ни переносилась на точку другой.

Часть сферы сливается с самою сферой, куда бы здесь ни полагалась, покуда центр у них общий◊.

15. У сфер вокруг одного центра — *одноцентрных*△, но с

---

* Радиус.

◊ Иначе говоря, при вращении всего пространства вокруг некоторой точки всякая сфера с центром в этой точке будет двигаться сама по себе.

△ Т. е. концентрических.

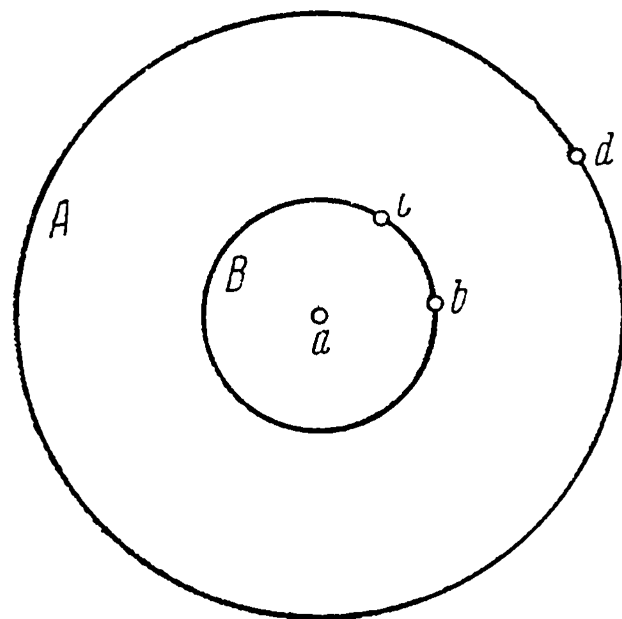
различными полупоперечниками, не может быть общих точек (ст. 13). Их шары, следовательно, заключаются один внутри другого.

Одноцентрные сферы с этим их свойством, представляя поступательные сечения в пространстве (ст. 3), служат к назначению протяжения в телах, поверхностях и линиях.

Полупоперечники считаются те *менее*, которые принадлежат одноцентрным шарам, помещенным внутри других. Это подает первое средство для сравнения различных расстояний между собою.

Итак, всякое тело необходимо разделяется на части помощию сфер одноцентрных.

16. *Центр может быть один только внутри шара.*



Чер. 21

Внутри сферы A (чер. 21) полагаем два центра: a, b. Вокруг одного, например a, воображаем сферу B с полупоперечником ab. На ней все точки будут также центрами сферы A, потому что всякая точка c на сфере B движением вокруг a переносится в b, тогда как сфера A в своем обращении по связи в шару с B не перестает сливаться сама с собою (ст. 14); после чего точке c на месте b, так же, как и на прежнем, должно принадлежать то же свойство. Расстояния всякой точки d на сфере A до b, c и до всех вообще точек на сфере B делаются, таким образом, равны. Это значило бы, что за центр сферы B можно почитать точку d вне сферы* (ст. 13).

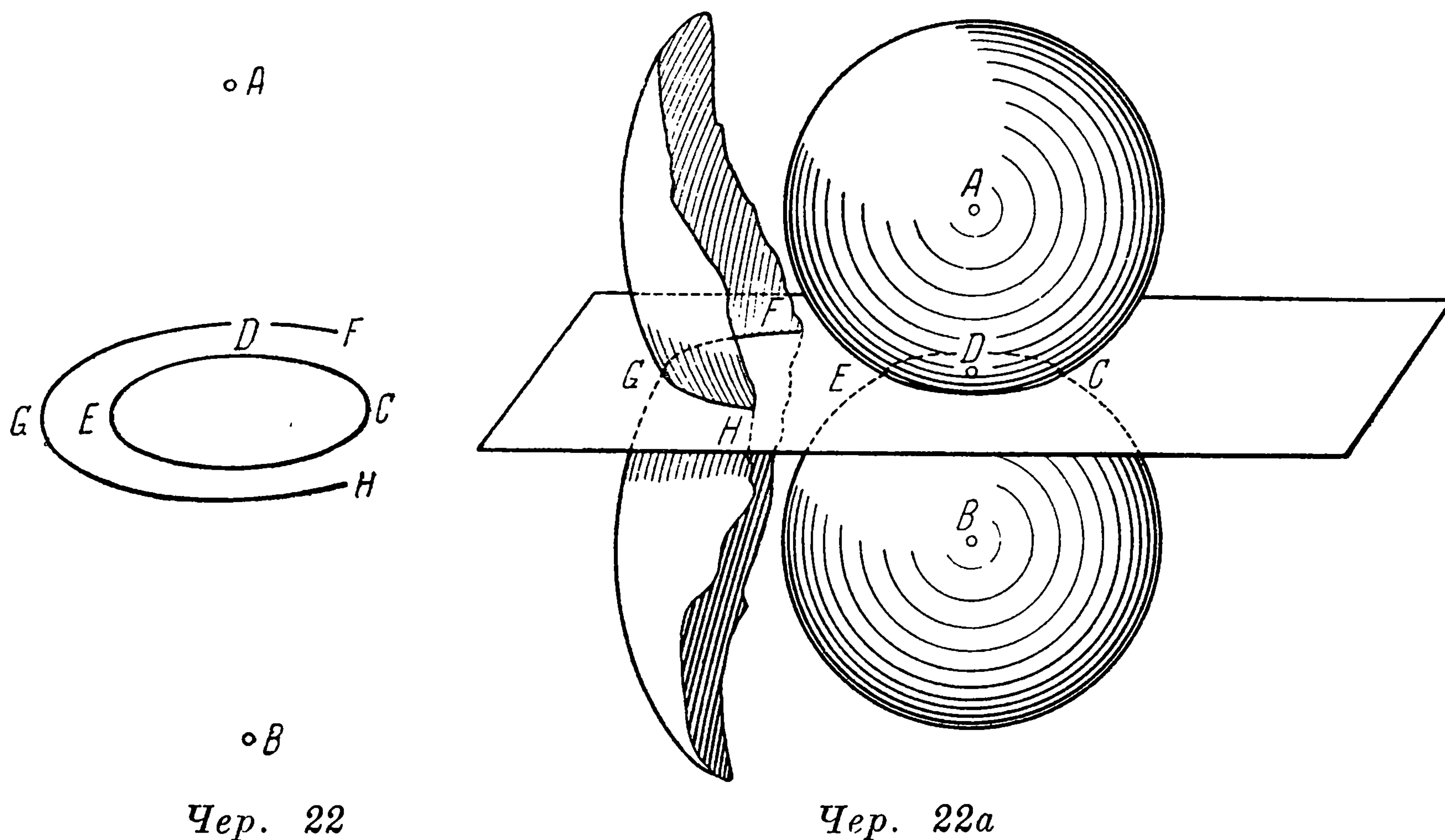
Заметим еще, что шар под сферой B нельзя бы разделять на части сферами вокруг d, следовательно, принимать за тело (ст. 15).

17. *Шар своей сферой не разделяется на части.*

* Что противоречит ст. 13.

Иначе, между частями шара, разделенного своею сферой, нашлись бы такие, внутри которых не заключается центр (ст. 16) и которые бы, следовательно, не подразделялись более на части помощию сфер, одноцентрных с шаром (ст. 15).

18. *Плоскость* называется такая поверхность, где пересекаются равные сферы вокруг двух постоянных центров — *полюсов* [44].



Чер. 22 *Чер. 22а*

Пусть A, B (чер. 22)* — полюсы, вокруг которых описаны сферы с одним полупоперечником $AC = BC$. Общие точки C, D, E принадлежат *кругу*, так же как и целой плоскости со всеми другими точками F, G, H, общими сферам около тех же полюсов A, B с какими-нибудь полупоперечниками $AG = BG$.

Части круга, например CD, FG, называются *дугами* круга.

19. *Плоскость, бесконечно продолжаясь, разделяет пространство на две части*, которые составляют ее две стороны, каждая заключая в себе свой полюс.

---

* Приводим черт. 22а, поясняющий слишком схематичный чертеж 22 Лобачевского. Чертежи «а» для пояснения приводятся и в дальнейшем.

Пусть A, B — полюсы. О всякой третьей точке C в пространстве можем утверждать, что принадлежит самой плоскости, либо той, либо другой ее стороне. Если расстоянием AC двух точек A, C произведенные сферы вокруг центров A, B не пересекаются, то C лежит вне плоскости на стороне полюса A. Если же расстоянием AD какой-нибудь точки D до A вокруг A, B описанные сферы проходят обе чрез D, то точка D лежит в самой плоскости. Наконец, когда расстояние AE точки E в пространстве, взятое за полупоперечник, описывает две сферы вокруг A, B, которые входят одна в другую*, тогда точка E будет на стороне полюса B.

Первый случай с точкой C принадлежит расстоянию $AC<BC$; второй с точкой D, когда $AD=BD$; третий с E, когда $AE>BE$ (ст. 15). В первом случае сфера вокруг B с полупоперечником BC необходимо дает общую точку со сферой вокруг A, которой полупоперечник AC, следовательно, пересекает уже сферу вокруг A с полупоперечником, равным BC. Второй случай не требует пояснения. В случае с точкой E сфера вокруг A с полупоперечником BE совсем не пересекает сферу вокруг B с полупоперечником BE.

Когда, таким образом, всякая точка в пространстве должна принадлежать к плоскости, либо находиться на той, либо на другой ее стороне, то самая плоскость может продолжаться до бесконечности, разделяя пространство на две части [45].

20. *Плоскость покрывает сама себя как другой стороной, так и в обращении вокруг полюсов.*

Когда полюсы A, B (чер. 23) меняются местами◊, то сферы вокруг их, переходя с одной стороны плоскости на другую, каждая покроет ей равную; следовательно, плоскость в этом новом положении сольется с плоскостию в прежнем.

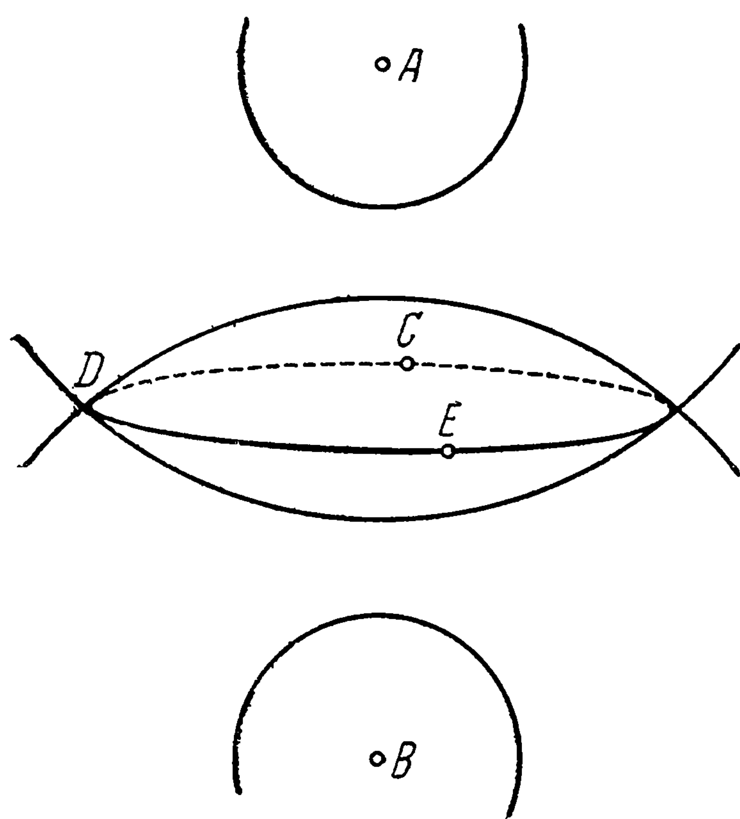
---

* Т. е. пересекаются.

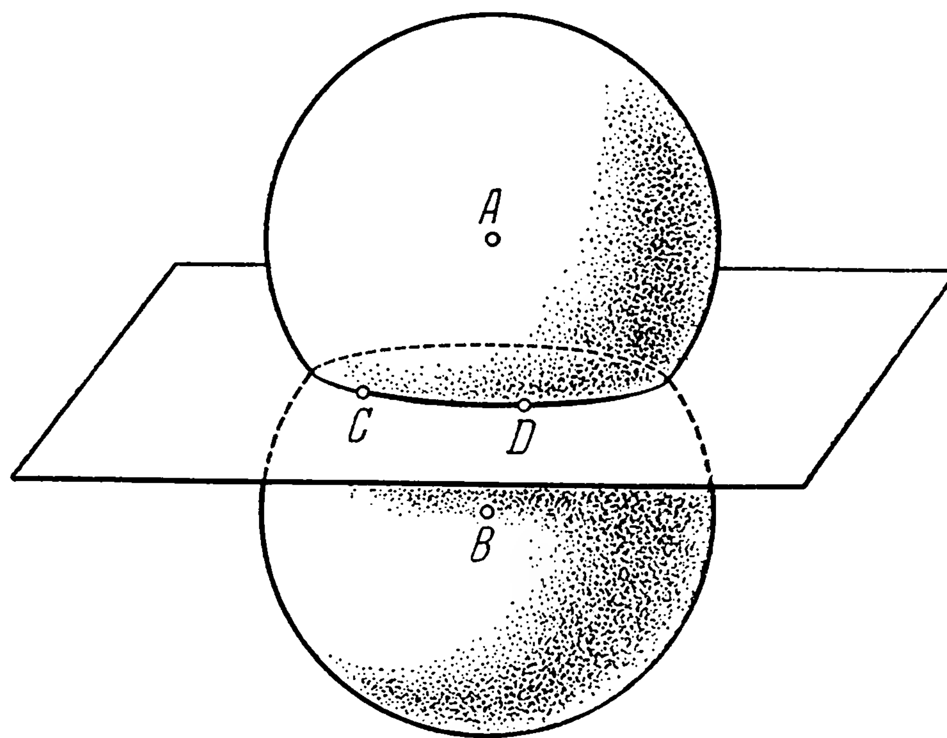
◊ Лобачевский допускает здесь, что движением возможно совместить точку B с A, а A с B.

Всякая точка C может быть перенесена в другую точку D на круге происхождения, покуда центр A сохраняет свое место. С этим переносом соединено перемещение точек во всех сферах около A, но самые сфёры сливаются в прежнем и новом их положении; следовательно, с плоскостью случается то же [46].

21. *Через две точки в пространстве можно провести плоскость.*



Чер. 23



Чер. 23а

Две точки A, B (чер. 24), чрез которые требуется провести плоскость, принимаем сперва за полюсы плоскости, где пусть CED будет один из кругов происхождения*. На нем каждые две точки C, D находятся в равных расстояниях от A и B, а потому, когда точки C, D берем за полюсы, то новая плоскость пройдет уже чрез данные две точки A, B.

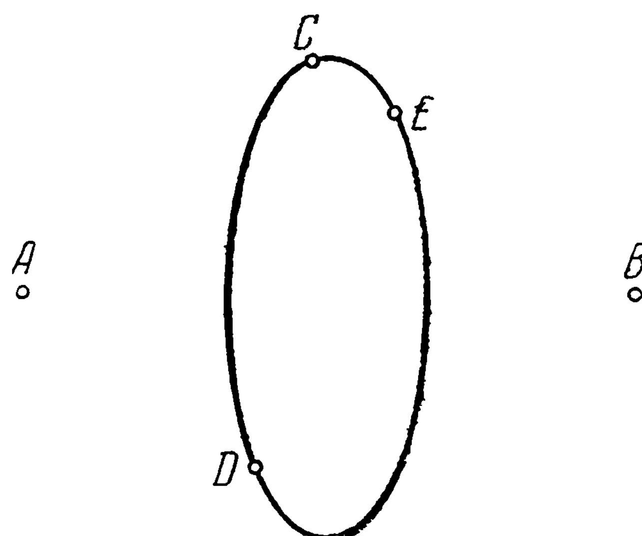
22. *Началом кругов происхождения назовем такую точку, которая может быть одна только на плоскости и которой расстояния до всех точек каждого круга равны.* Эта точка называет-

---

* Т. е. пересечение двух сфер одинакового радиуса с центрами в A и B.

ся *центром* каждого круга; расстояния точек круга до центра — *полупоперечники круга.*

Когда полюсы A, A' (чер. 25) меняются местами, между тем как точка B на круге происхождения $BCB'C'$ сохраняет свое, то на том же круге найдется другая точка B', которая, так же как и B, останется на прежнем месте. Подобные точки, каковы здесь B, B', будем называть *противоположными* на круге. Чтобы для B найти противоположную точку B', стоит только взять от B в обе стороны равные дуги BC, BF, после чего, принимая концы C, F за полюсы, вести плоскость, которая, пройдя чрез A, A' (ст. 21), пересечет круг $BCB'C'$ в точке B', потому что с перестановкой A, A' меняются также C, F местами, но плоскость и круг, сливаясь сами с собой, сохраняют общую точку B' (ст. 20). Если теперь точки B, B' служат полюсами, то новая плоскость, проходя чрез A, A', разрежет круг $BCB'C'$ в противоположных точках E, E'. Она с плоскостию круга разделяют пространство на четыре части, которые заменяют одна другую с обращением их около E, E', так что когда A будет в A', то, наоборот, A' в A, тогда как общие точки двум плоскостям остаются на своем месте. Это значит, что каждые две части накрест касаются в линии EDE' (ст. 4 и 7), которую называют *поперечник** круга $BCB'C'$. Обращая все сферы вокруг их центров A, A', не нарушая, впрочем, связи между ними в пересечении, дасм поперечнику EDE' новое положение CDC', так что прежние точки E, E', B, B' теперь будут в C, C', G, G', тогда как найдется точка D; которая места своего не переменит. Если б E, E' принимались за полюсы, то

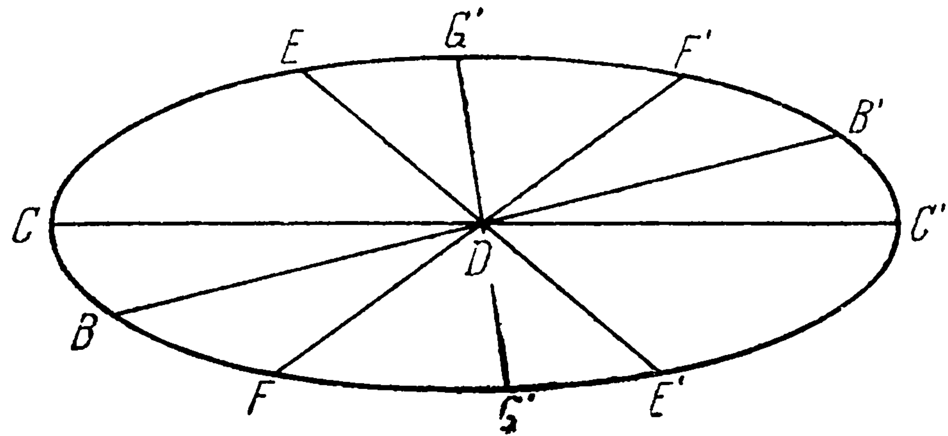


Чер. 24

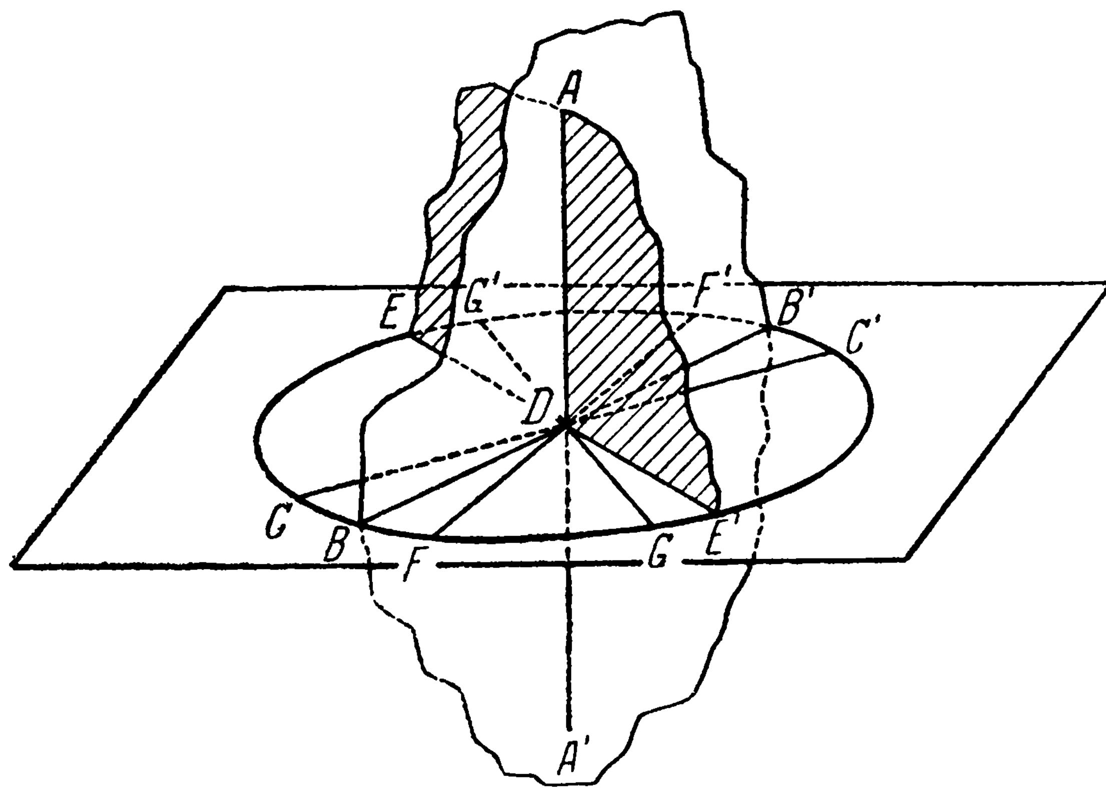
---

* Диаметр.

плоскость прошла бы не только чрез A, A', но также чрез B, B'. Подобным образом, если бы C, C' были полюсы, то плоскость прошла бы чрез A, A' и чрез G, G' на круге. После такого замечания нетрудно видеть, что все дуги CE, $C'E'$, BG,



Чер. 25



Чер. 25а

$B'G'$ равны между собой, а следовательно, с обращением плоскости круга на другую сторону и с положением линии EE' на CC', должна CC' лежать на EE' будет ли E в C или в C'. Отсюда заключаем, что $CD = ED = C'D = E'D$. Так как линии EDE' дано новое положение CDC' произвольное, то D, на половине поперечника EE', должна быть единственной точкой, откуда расстояния до всех точек круга равны. Впрочем,

пересечение двух поперечников в одной только точке нетрудно понять, когда заметим к тому, что здесь три плоскости разделяют пространство на восемь частей, из которых каждые две накрест и взятые на противоположных сторонах в отношении ко всем трем плоскостям заступают одна место другой, не теряя своей связи; следовательно, своим прикосновением представляют единственную точку (ст. 5 и 7).

Расстояние центра до точек круга называют *полупоперечником*, который, следовательно, составляет половину поперечника.

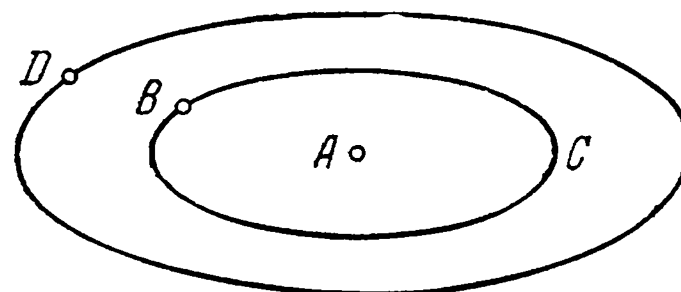
Поперечник разделяет круг на две одинаковые части.

Кругам принадлежат те же свойства на плоскости, какие сферам в пространстве. Например, равенство полупоперечников делает круги одинаковыми; дуги круга сливаются, когда центр у них общий.

[23] *.

24. *Для круга может быть один только центр на плоскости.*

Вне круга, либо на самом круге, нельзя допускать центра, которого бы расстояния до всех точек круга были равны. Иначе, сфера вокруг такого центра не могла бы разделять того шара на части, которому начало кругов на плоскости служит центром и которого поверхность пересекает плоскость в данном круге (ст. 15). Если же кроме начала A допускаем другой центр



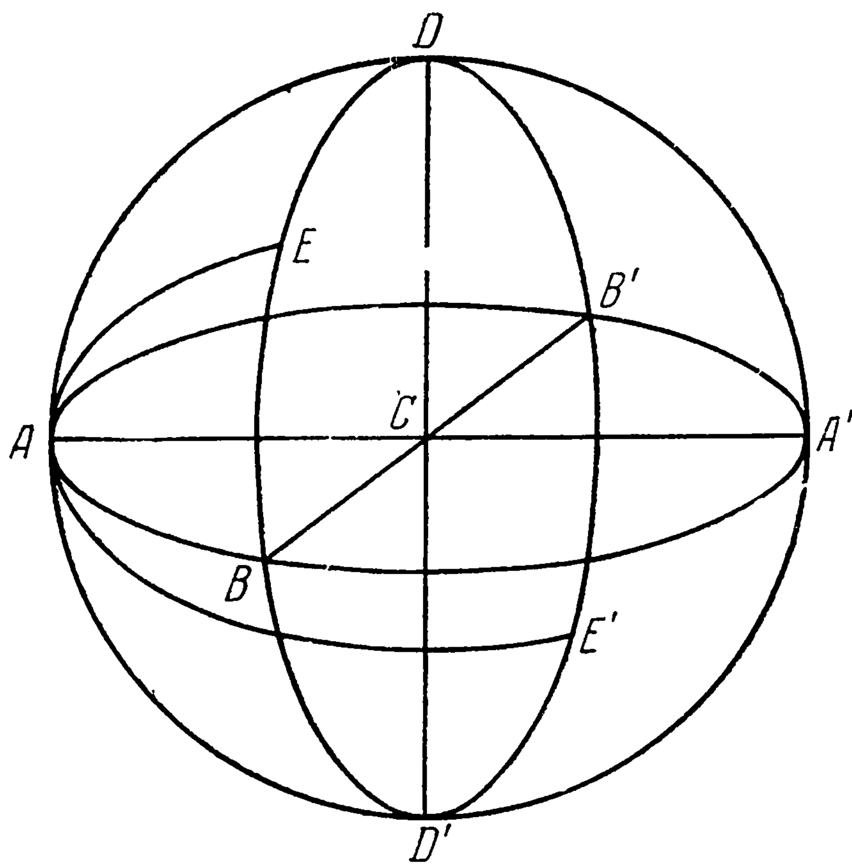
Чер. 26

B внутри круга (чер. 26), то сфера около A с полупоперечником AB пересечет плоскость в круге BC (ст. 23), где точка B может быть перенесена всюду на сфере с полупоперечником AB, так же как точка D на круге происхождения DE меняется местом со всякой другой на сфере около начала A с полупопереч-

* Ст. 23 была пропущена при печатании «Ученых записок» по ошибке. См. об этом примечание [47].

ником AD *. Итак, два центра A, B были бы вместе двумя центрами той самой сферы, которая пересекает плоскость в данном на ней круге; тогда как невозможность этого была доказана (ст. 16).

25. *Прямой* называется та линия, которая между двух точек покрывает сама себя во всех положениях. Это свойство принадлежит поперечнику круга.



Чер. 27

Пусть ACA' (чер. 27) поперечник круга $ABA'B'$; пусть C центр и, следовательно, начало кругов той плоскости, которая проходит чрез C и где лежит круг $ABA'B'$ (ст. 22 и 24). Около C воображаем сферу с тем же полупоперечником AC, который принадлежит кругу. Новая плоскость с ее полюсами A, A' пересечет сферу в круге $BDB'D'$, так что теперь у двух кругов будут общие точки B, B', в каждом противоположные (ст. 22), потом общий и поперечник BCB'.

Точки, каковы A с A', B с B', противоположные на большом круге, называются *противоположными полюсами сферы*, где круг лежит. Всякая точка на сфере может, следовательно, почитаться за полюс, которому соответствует другой противоположный. Точки A, A' называются также *противоположными полюсами* того большого круга $BDB'D'$, которого плоскость происходит от пересечения равных сфер около A, A' и который лежит вместе с A, A' на той же сфере.

Точки B, B', следовательно, полюсы для круга $ADA'D'$.

* Ср. рассуждение в ст. 16.

который проходит через A, A', пересекая круг $BDB'D'$ в полюсах D,D' круга $ABA'B'$.

Здесь плоскости трех кругов представляют три главные сечения (ст. 5), разделяя шар под их сферой на восемь частей, из которых каждые две, противоположные накрест, касаются в общей точке C (ст. 22). С обращением круга $ABA'B'$ на своем поперечнике AA' точки B, B' пробегают по кругу $BDB'D'$ так, что когда AB находится в части ABD сферы, например, когда B придет в E, то дуга AB' будет в другой части $AB'D'$, точка B' где-нибудь в E'. При каждом из этих новых положений круга нельзя допускать отклонения в точках на полупоперечнике AC, потому что полупоперечник должен себя покрывать, когда с продолжением обращения, наконец, E, E' переменяется местами, между тем как отклонившиеся точки в одну сторону необходимо пришли бы в другую часть шара.

Прямая AA' покрывает опять сама себя во всех положениях после того, как ее концы A, A' переменились местами, потому что с этой переменой все круги наперед могут сливаться так же, как и линии в пересечении плоскостей [48].

Заметим, что здесь в пересечении трех плоскостей происходят прямые линии, как AA', так BB', DD', которые, будучи поперечниками, разделяют круги на две одинаковые половины.

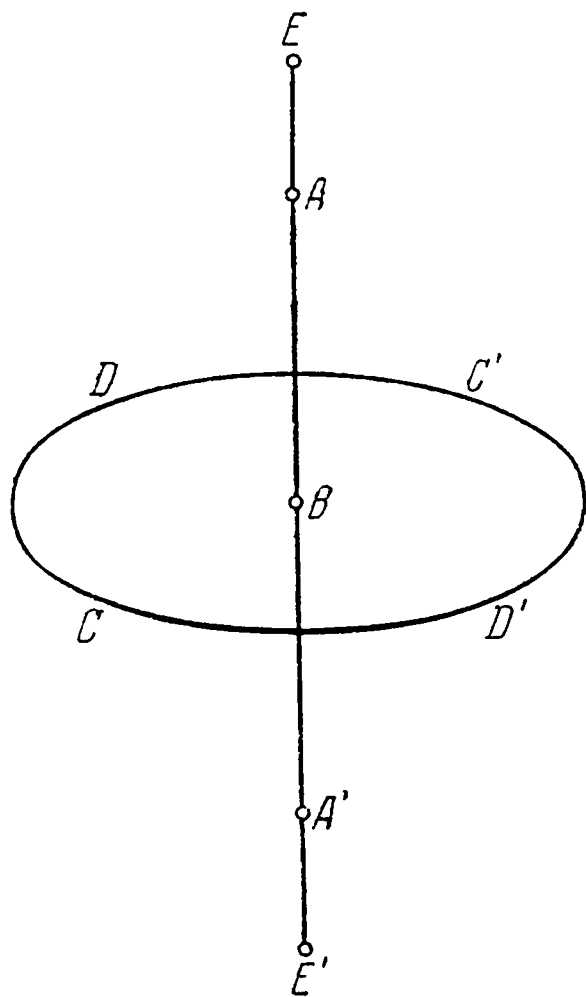
Прямая вместе с плоскостями, в пересечении которых лежит, продолжается в обе стороны до бесконечности, разделяя, таким образом, каждую плоскость на две части. Находясь внутри тела, ограниченного со всех сторон поверхностью, либо внутри плоскости, окруженной замкнутой линией, она пересекает по крайней мере в двух точках наружную поверхность и линию, входя внутрь и выходя вон*.

26. *На прямой, которая соединяет два полюса, могут быть в равных расстояниях от начала кругов взяты две точки за новые полюсы той же плоскости.*

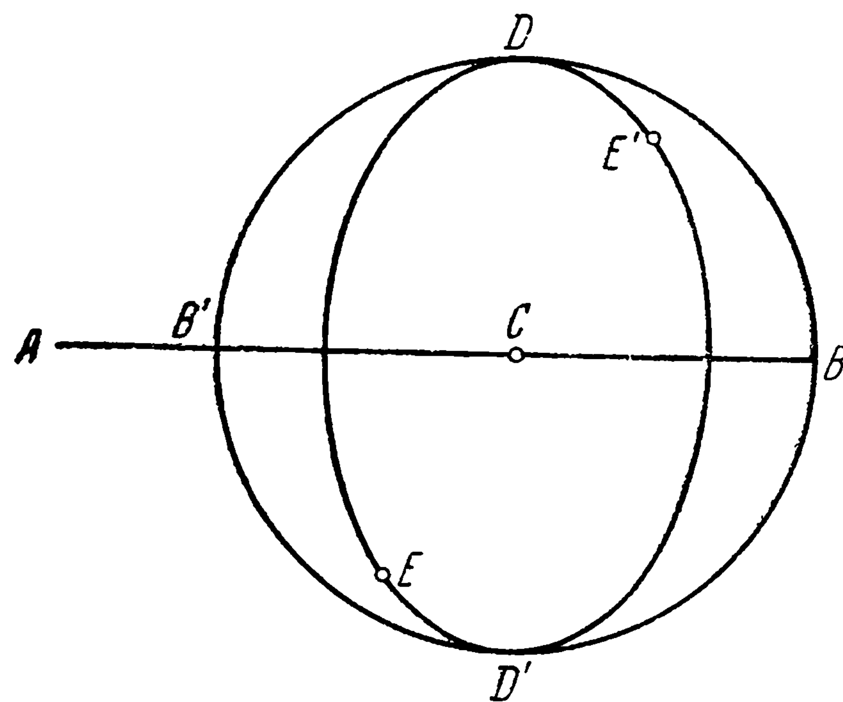
---

* Ср. примечание [2] и предложение 3 на стр. 17.

Две точки A, A' (чер. 28), принимая за полюсы, полагаем что на плоскости начало B, один из кругов $CDC'D'$ с противоположными точками C и C', D и D' (ст. 22), вокруг которых равные сферы дадут плоскости с прямой линией ABA' в пересечении (ст. 25). Прямая AA' с распространением плоскостей продолжается беспредельно, так что на ней могут быть взяты



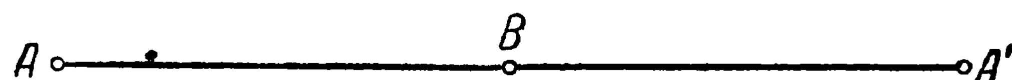
Чер. 28



Чер. 29

две точки E, E' на произвольных и равных расстояниях BE, BE' от начала ближе, либо далее точек A, A' от B. С обращением одной из двух плоскостей, например, $ECE'C'$ на общей им линии EE', точка C пробегает весь круг $CDC'D'$, которого, следовательно, все точки находятся в равных расстояниях от E, так же как от E', потому что с оборотом плоскости на другую сторону полюс A падает в A' так же, как E в E'. Сферы вокруг E, E', когда полупоперечник EC, должны, следовательно, пересекаться в круге $CDC'D'$. То же надобно сказать о каждом круге происхождения, которые, таким образом, все, вместе с плоскостию, происходят от пересечения равных сфер вокруг E, E'.

27. *Прямые сливаются, как скоро проходят чрез две точки.* До сих пор еще различалась на прямых точка, которая в плоскости служит началом кругов. Покажем, что теперь это различие более не нужно. Около произвольной точки C (чер. 29) на прямой воображаем сферу с каким бы то ни было полупоперечником CB. Прямая, продолжаясь от центра C в обе стороны, должна пересекать сферу по крайней мере в двух точках B, B' (ст. 25), которые взяв за полюсы, производим плоскость и



Чер. 30

в пересечении с ней на сфере круг $DED'E'$, где пусть D с D', E с E' противоположные точки. Наконец, две плоскости, которым D с D', E с E' служат полюсами, дадут в пересечении прямую, так же как и прежняя, проведенную чрез три точки B, C, B'. Пусть теперь $BDB'D'$ большой круг на сфере, которого поперечником будет вновь произведенная прямая. Если далее предположить, что между B, C или, вообще, между каких-нибудь двух точек на полупоперечнике BC часть первой прямой отклоняется от него, выходя вон из плоскости круга, либо к одной стороне на плоскости, то в том и другом случае с обращением круга $BDB'D'$ на своем поперечнике BB' такая часть первой прямой переходила бы с одной стороны плоскости на другую, либо с одной стороны поперечника BB' на противоположную, тогда как эта прямая во всех частях своих должна бы сама себя покрывать (ст. 25). Когда через две точки A, B (чер. 30) проходит прямая, то, продолжив ее в одну сторону, например за точку B, можем сделать продолжение $BA' = BA$, потом принимать концы A, A' за полюсы плоскости, где начало кругов будет, следовательно, B. После чего прямая AA', как и все другие, проведенные между точками A, B, должны быть те же, какие произойдут в пересечении плоскостей, которых полюсы помещены в противоположных точках на круге происхождения

первой плоскости. Но все такие прямые сливаются, как уже видели выше.

Итак, *две прямые линии либо сливаются, либо пересекаются в одной точке**.

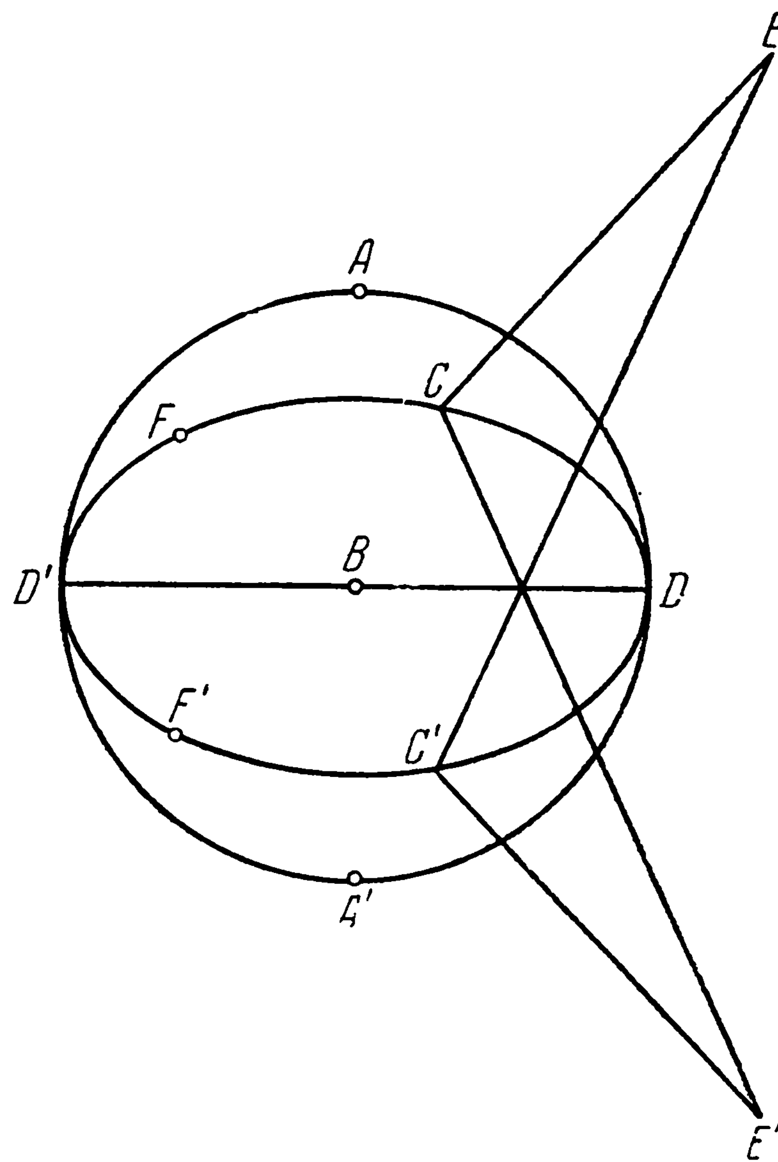
Прямые служат к измерению расстояний и вообще всех других линий, как увидим после.

Прямая может быть продолжаема до бесконечности, когда накладывается сама на себя частию, подвигаясь остальною вперед.

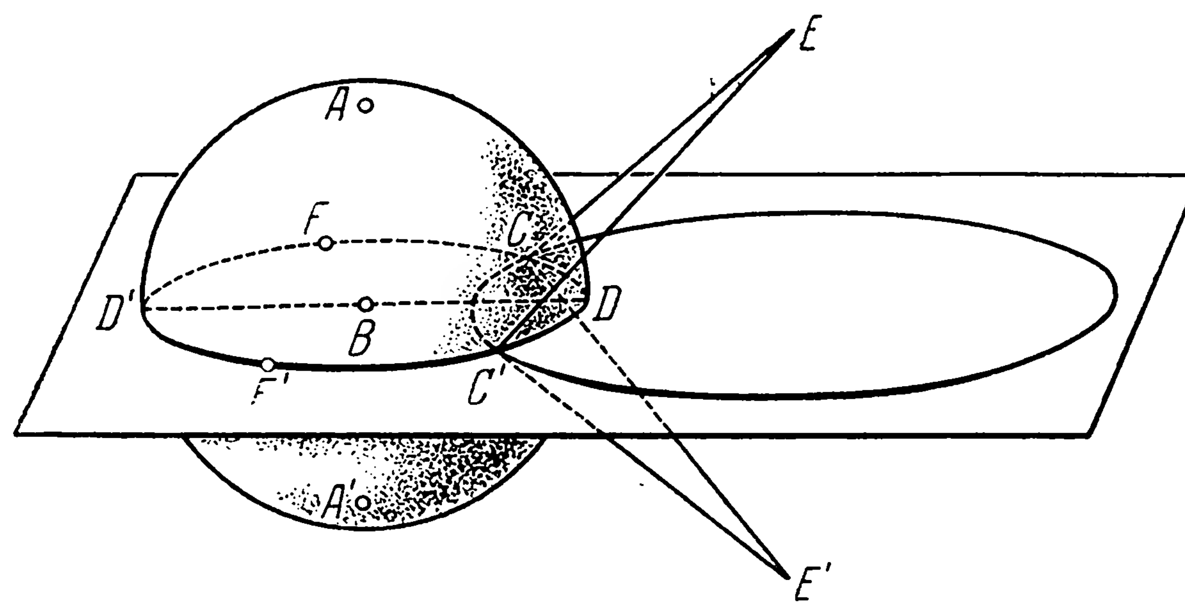
28. *Всякая точка вне плоскости может почитаться за полюс, которому другой отвечает на противоположной стороне.*

Пусть A, A' (чер. 31) [см. также чер. 31a] полюсы, B начало кругов на плоскости, CDC' один из кругов на ней от пересечения равных сфер около A, A'. Берем где-нибудь вне плоскости точку E, вокруг которой всякая сфера должна пересекать круг $DCD'C'$, как скоро входит внутрь его, в двух точках C, C'. С перемещением полюсов A, A' один в другой и так, чтобы точка C падала в C', следовательно, наоборот, C' в C, точка E будет где-нибудь в E', от чего произойдут равные расстояния $EC = EC' = E'C = E'C'$, тогда как поперечник DBD' круга не переменит своего места. Если теперь воображаем около B сферу с полупоперечником $BD = BD'$, на которой для простоты пусть A, A' полюсы круга $DCD'C'$ (ст. 26), то с обращением этой сферы на поперечнике DBD' вместе с сферами вокруг E, E' общие точки первой с последними должны пробегать по линиям их пересечения, одна другой заступая место. С полуоборотом сфер каждая точка F на половине круга $DCFD'$ займет соответственное место F' на другой половине круга $DC'F'D'$, подобно прежним точкам C, C', кроме крайних D, D' на поперечнике, которые места своего не переменяют. Отсюда надобно заключить, что все точки C, F, C', F' круга так же, как на нем и концы D, D' поперечника,

* Это предложение должно быть уточнено: «две прямые линии, имеющие общую точку, либо сливаются, либо не имеют другой общей точки».



Чер. 31

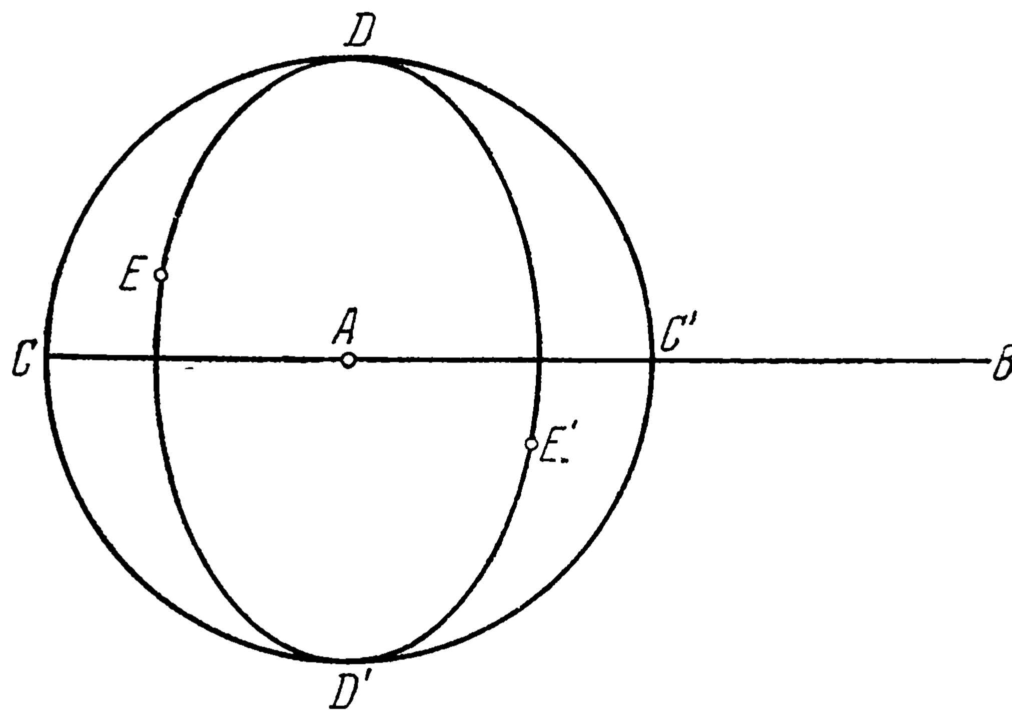


Чер. 31a

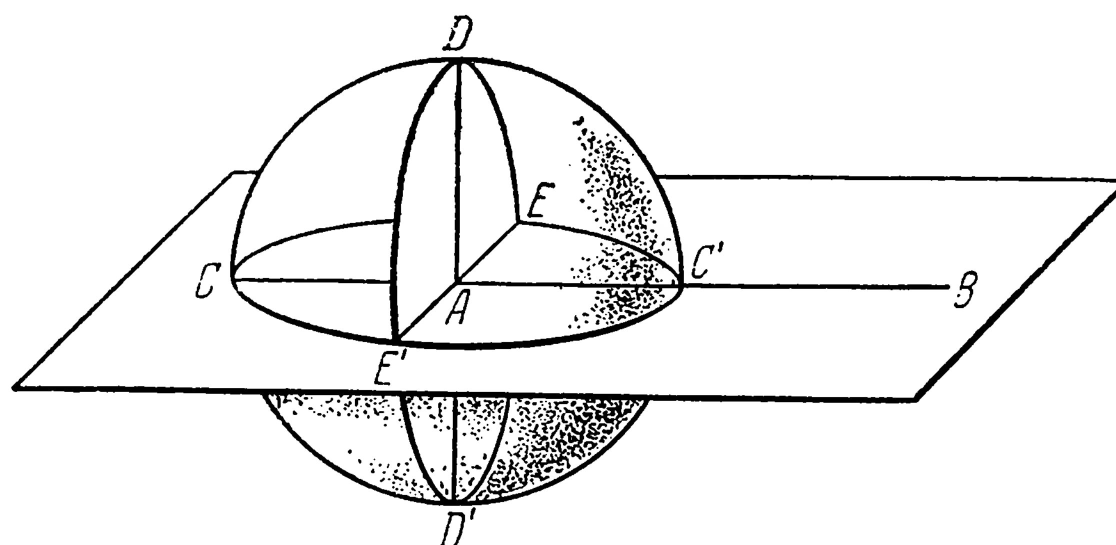
принадлежат пересечению равных сфер вокруг точек E, E', которые, следовательно, могут почитаться за полюсы той же плоскости круга $DCD'C'$.

29. *Всякую точку на плоскости можно принимать за начало кругов.*

Произвольно взятую точку A (чер. 32) (см. также чер. 32а) на плоскости соединяем прямой AB с началом ее кругов B. С полупоперечником $AC = AC'$, также произвольным, воображаем около A сферу L, которая пусть встречает прямую BAC в точках C, C'. Равные сферы вокруг C, C' произведут в



Чер. 32



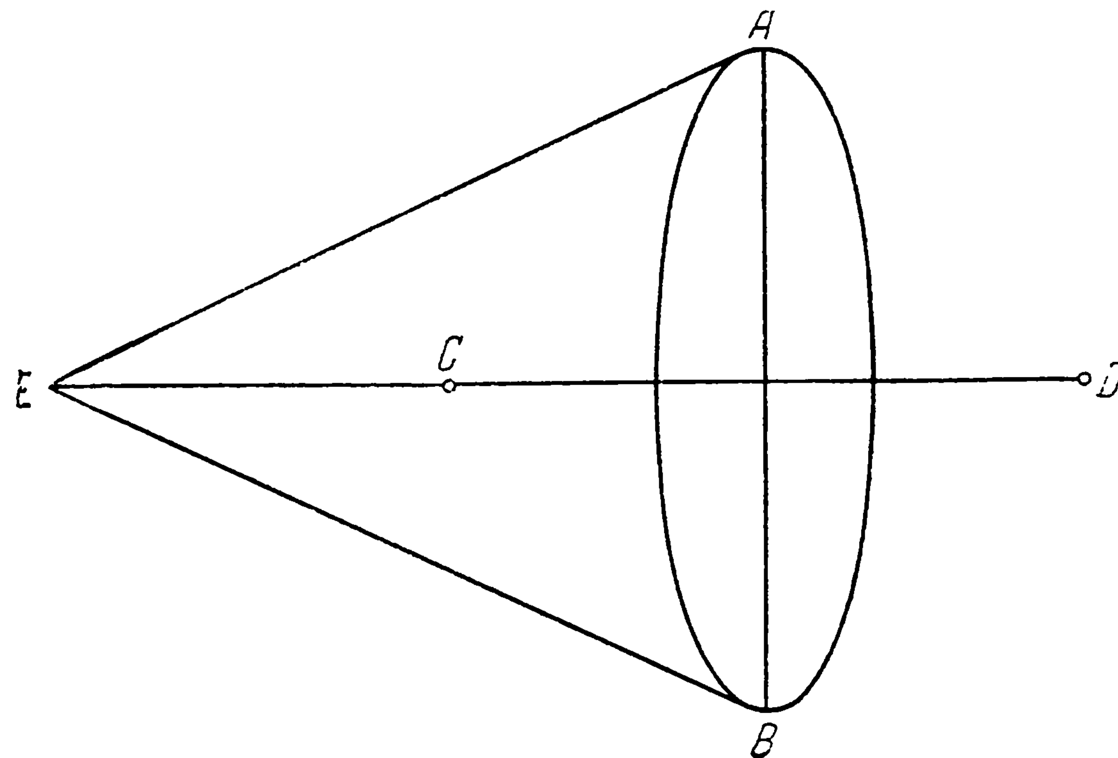
Чер. 32а

пересечении своем плоскость, которая разделяет первую сферу с центром A в круге $DED'E'$, где точки E, E', общие с данной плоскостью, будут противоположными на круге, потому что полоборота сферы на линии BC заставляет E, E' меняться местами. Из точек E, E' сферы с равными полупоперечниками произведут еще плоскость, которая

пересечет сферу L в круге $DCD'C'$, а круг $DED'E'$ в противоположных точках D, D', в чем увериться можем, обращая сферу L*, покуда данная плоскость покроет сама себя другой стороной. Итак, D, D' будут полюсы данной плоскости (ст. 28), тогда как плоскости кругов $DCD'C'$ и $DED'E'$ пересекаются в прямой DAD', проведенной от D к D' через точку A, которая, следовательно, должна быть началом кругов на данной плоскости.

30. *Пересечение сферы с плоскостию дает круг.*

Если плоскость проходит через центр сферы, то центр этот можно принимать за начало кругов происхождения на плоскости (ст. 29), а следовательно, пересечение сферы с плоскостию будет один из таких кругов (ст. 23).

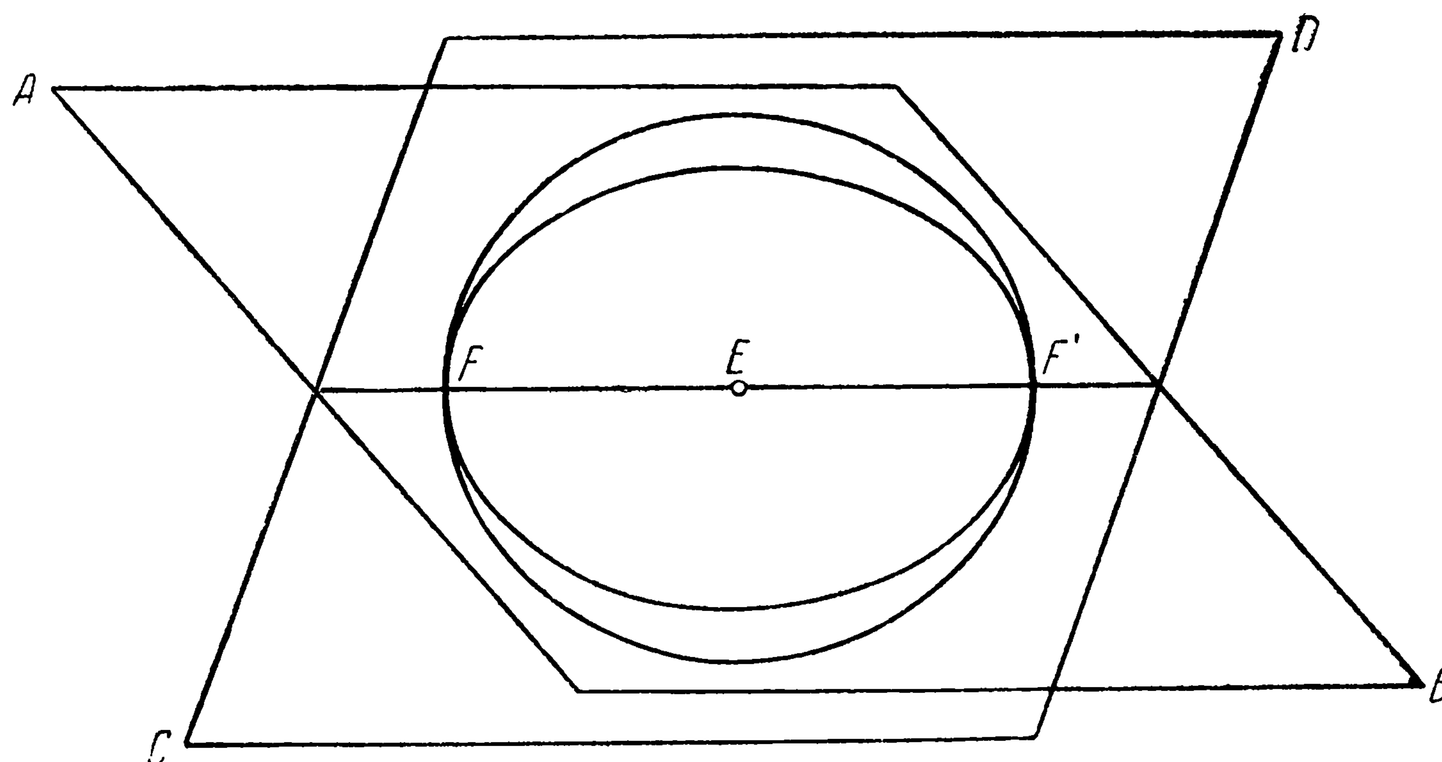


Чер. 33

Если плоскость не проходит через центр сферы, то можем этот центр почитать за полюс самой плоскости, представляя себе вместе другой на противоположной стороне (ст. 28). Тогда пересечение данной сферы с равной около другого полюса будет линией, общей как двум сферам, так и каждой сфере с плоскостию, следовательно, будет круг (ст. 18).

* Вокруг линии *BC*.

Поперечник этого круга находим, когда соединяем прямой AB (чер. 33) его точки A, B на плоскости, проведенной через полюсы C, D данной плоскости (ст. 25). Как поперечник AB, так и самый круг будут, следовательно, те же, когда за центр сферы вместо C берем какую-нибудь точку E на линии CD или



Чер. 34

на продолжении этой прямой и когда полупоперечником сферы возьмется расстояние $AE = BE$ точки E от концов A, B линии AB.

31. *В пересечении двух плоскостей происходит прямая линия*.*

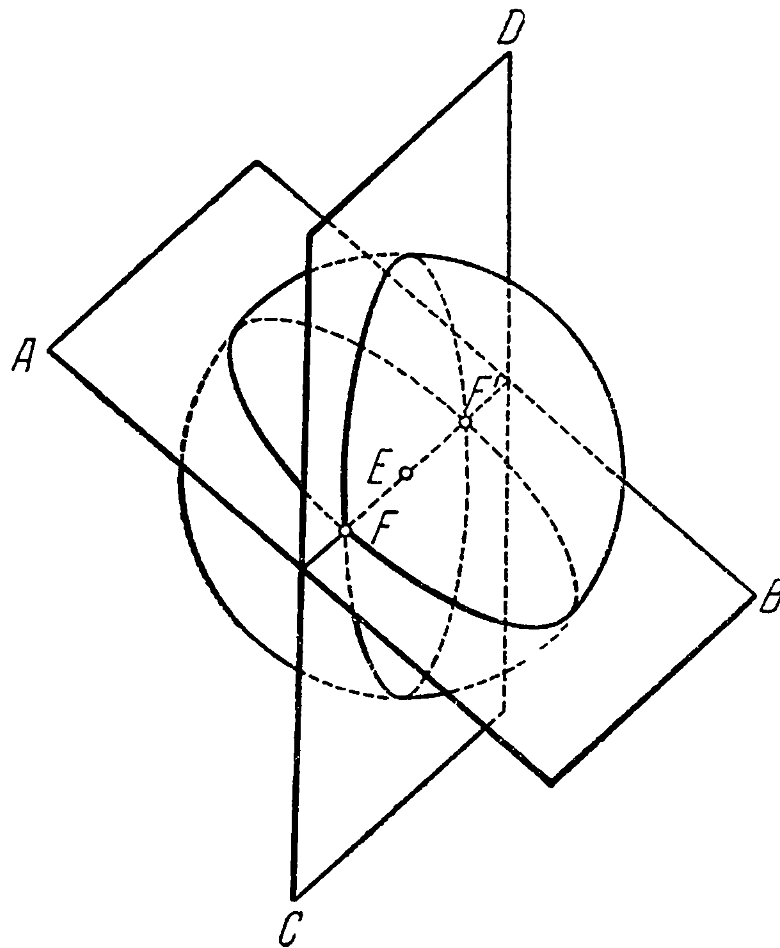
Если плоскости AB, CD (чер. 34) [см. также чер. 34а] пересекаются, то сфера вокруг E, какой-нибудь из общих точек двум плоскостям, с произвольным полупоперечником $EF = EF'$, вырежет из каждой плоскости круг, которого центр E (ст. 30). Пересечение двух этих кругов должно давать прямую линию (ст. 25). Увеличивая полупоперечник EF, то же заключение можем распространить на все точки пересечения двух плоскостей.

* Если две плоскости имеют хотя бы одну общую точку.

32. *Прямая лежит вся в плоскости, как скоро проходит на ней через две точки.*

Вокруг двух точек A, B на плоскости CD (чер. 35) равные сферы пересекаются в круге, который через данную плоскость пройдет в двух противоположных своих точках E, E' (ст. 25). Плоскость, которой E, E' полюсы, должна не только заключать в себе концы A, B прямой AB, но даже разрезывать плоскость CD в этой же линии*, потому что двух различных прямых не может быть между двух точек A, B (ст. 27).

Всякий раз, следовательно, *прямая*°, *проходя через центр, разделяет круг пополам.*



Чер. 34а

33. *Через три точки не в прямой линии можно провести плоскость и притом одну только.*

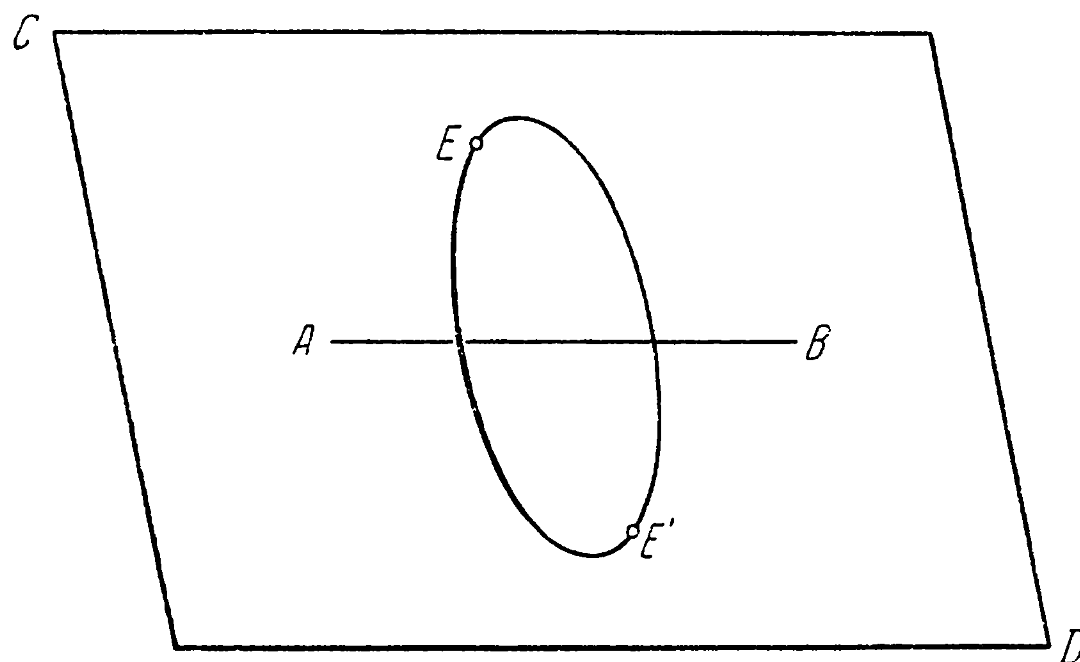
Из трех точек одну, например A (чер. 36), с двумя другими B, C соединяем прямыми линиями AB, AC, которые можем продолжать по произволу. В случае неравенства линий AB, AC и предполагая $AB < AC$, делаем $AD = AB$. Из точек B, D, как полюсов, производим плоскость, которая пройдет через A, потому что $AB = AD$. Такую плоскость прямая BD пересечет в начале Q кругов, около которого сфера с полупоперечником $BQ = QD$ проходит через B, D и пересекается плоскостию в круге $EFE'F'$ (ст. 30), где пусть E, E'— противоположные точки на прямой, проведенной из A через начало Q. Когда берем теперь E, E' за полюсы, то плоскость пройдет через Q

* Пересечение происходит по прямой линии согласно ст. 31.

° Лежащая в плоскости круга.

и пересечет круг $FEF'E'$ в противоположных точках F, F' (ст. 25). Наконец, эти последние точки будут полюсами той плоскости, где лежат уже все три точки A, B, C, потому что $BF = FD = F'B = F'D$, а точка C лежит на продолжении AD.

Другой плоскости через A, B, C провести нельзя, потому что две прямые BD, DA должно бы рассматривать в таком случае как одну в пересечении двух плоскостей (ст. 31), следовательно, предполагать D и C на продолжении AB.



Чер. 35

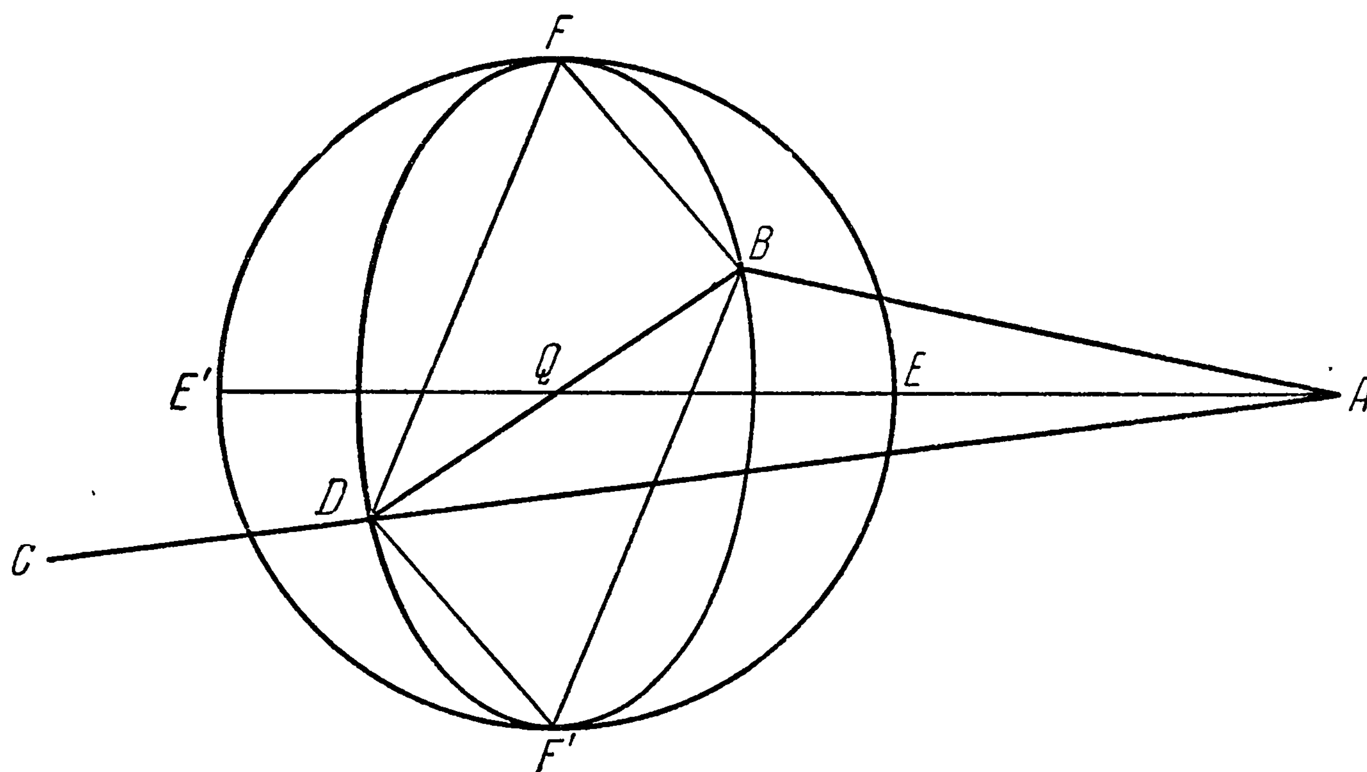
Отсюда заключаем еще, что *две линии, выходя из одной точки и не составляя одной прямой, должны лежать в известной плоскости.*

Еще можем заметить, что *две плоскости сливаются, когда лежат одна на другой тремя точками не в прямой линии.*

Так плоскость продолжаем до бесконечности, подобно прямой линии (ст. 27), когда полагаем саму на себя частию и выдаваясь вон остальною.

34. *Две сферы либо совсем не встречаются, либо касаются друг друга в одной точке, либо пересекаются в круге, смотря по тому, сумма полупоперечников менее, равна или более расстояния между центрами. В последнем случае надобно еще, чтобы разность полупоперечников была менее расстояния между центрами.*

Пусть у двух сфер около центров A, B (чер. 37) полупоперечники AC, BC таковы, что составляют вместе расстояние AB центров друг от друга*. Воображаем через точку C на прямой AB плоскость DE, которой полюсы на равных расстояниях от C. Около точки C и всякой другой, общей двум сферам, если бы другая существовала, должны допускать возможность обращения как той, так и другой сферы на своих поперечниках CF, CG, проведенных от точки прикосновения C. То же движение



Чер. 36

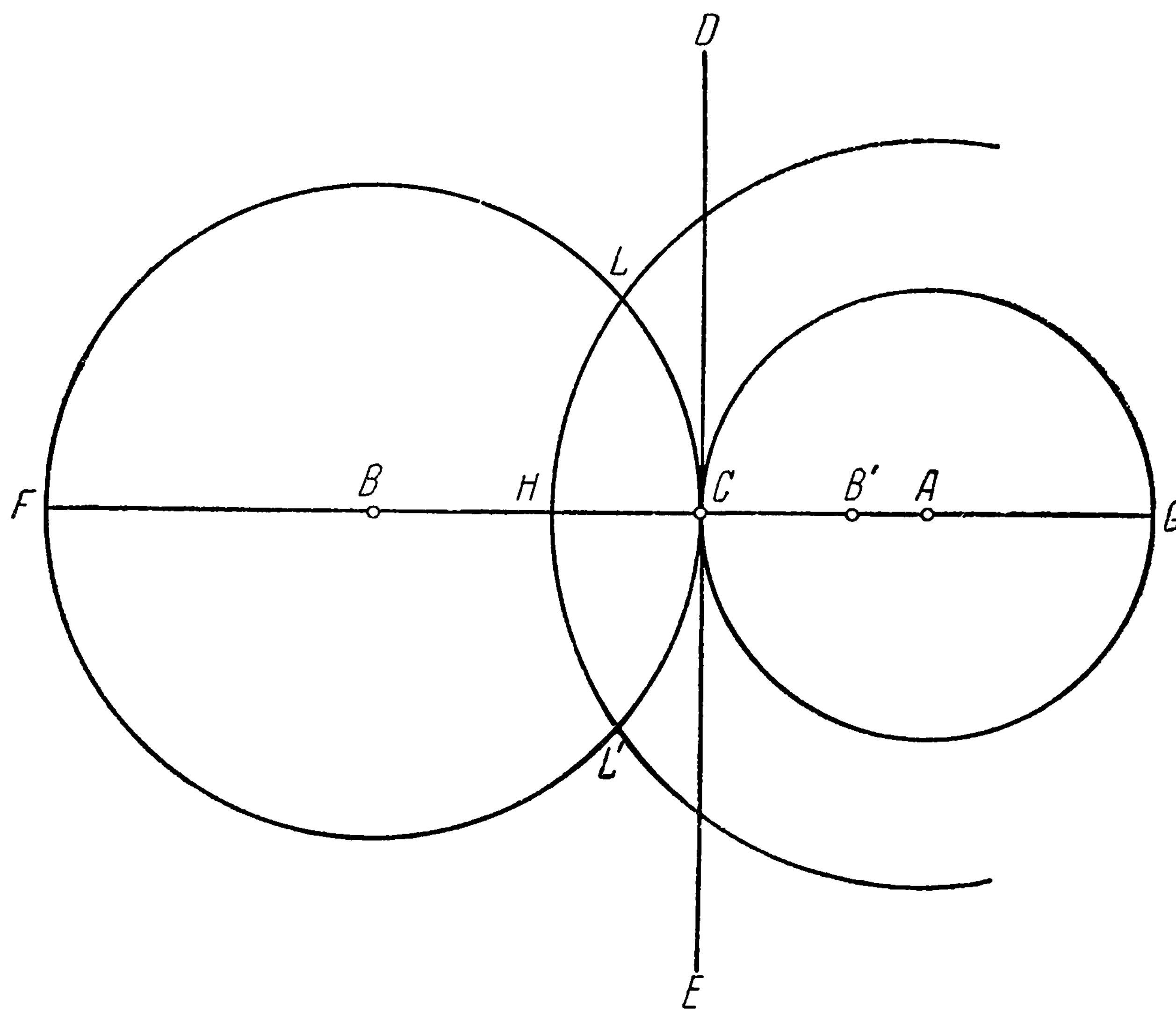
сфер должно быть возможным в их соединении с плоскостию DE, как для каждой порознь, так обеих сфер в связи с плоскостию ([ст.] 25). Но как различных прямых нельзя провести между двух точек G, F (ст. 27), то две сферы касаются необходимо в одной только точке C.

С оставлением центров A, B на своих местах и с уменьшением одного полупоперечника, напр., AC, новая сфера помещается внутри прежней, а следовательно, не касается ни

* Понятие суммы расстояний опирается на операцию сложения прямолинейных отрезков, отчетливого определения которой Лобачевский здесь не дает. Описание сложения отрезков можно было бы дать, исходя из ст. 27, где рассматривается скольжение прямой по прямой. В дальнейшем Лобачевский говорит и о вычитании полупоперечников.

плоскости DE, ни сферы за такой плоскостию. Это значит, что всякий раз две сферы не встречаются, когда сумма полупоперечников менее расстояния центров.

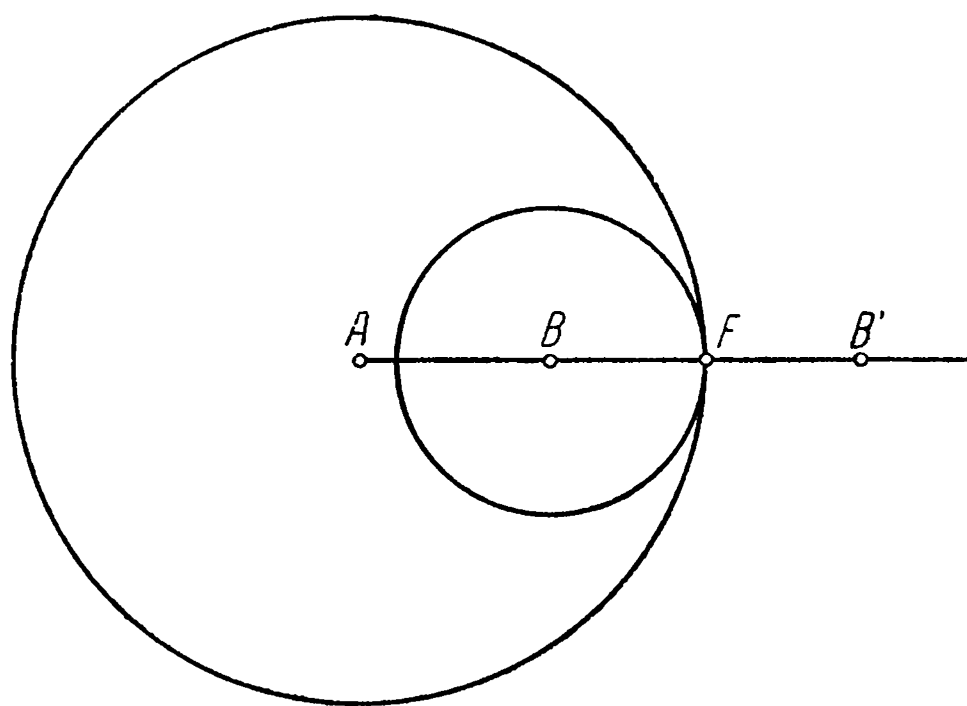
С увеличением AC, например, до точки H, но не достигая до точки F, производим пересечение двух сфер, которые частию только входят одна внутрь другой. Всякая теперь плоскость,



Чер. 37

проведенная через центры A, B, дает две точки L, L', общие двум сферам, и которые принимая за полюсы, производим плоскость, где лежат точки A, B и, следовательно, вся прямая AB (ст. 32). После чего в этой же плоскости тот круг происхождения, к которому принадлежит точка B, пересекает линию GF где-нибудь в точке B', так что $BL = BL' = B'L = B'L'$. Итак, плоскость с полюсами B, B' заключает в себе точки L, L', давая, следовательно, в пересечении тот же круг, как со сферой около A при полупоперечнике AH, так со сферой около B при полупоперечнике BC.

Легко видеть, что пересечение сфер в круге* продолжается, покуда разность полупоперечников менее расстояния центров между собою. Когда ж эта разность делается нулем◊, то сферы касаются только в одной точке; наконец, далее с возрастанием разности заключаются сферы, меньшая в большой, уже нигде не встречаясь. Действительно, когда A, B центры сфер (чер. 38),



Чер. 38

AF один, BF другой полупоперечник, то прикосновение должно быть в точке F, где будет оно также с плоскостию, произведенной из полюса B с противоположным B' на расстояниях $BF = B'F$ от конца F и на продолжении линии BF за F (ст. 27). Потом вокруг центра A с увеличением полупоперечника AF будут уже прикладываться к шару, под прежней сферой, такие части, которые через одну не касаются, следовательно, прерывают и сообщение сфер вокруг центров A, B.

35. Все, что сказано было до сих пор о сферах и плоскостях, применяется к кругам и прямым линиям△ потому, что плоскость,

---

* По кругу.

◊ Эту фразу следует исправить так: «Когда ж разность полупоперечников становится равной расстоянию между центрами...».

△ Точнее: «Все, что сказано было до сих пор о сферах и плоскостях» в пространстве, «применяется к кругам и прямым линиям» *на плоскости*.

проведенная через центры, пересекает сферы в кругах, плоскости в прямых линиях; а круги в точках. Так, прямую линию * можно представлять себе пересечением равных кругов около двух точек — *полюсов прямой линии*. Всякая точка на плоскости может почитаться за полюс, которому на другой стороне прямой линии отвечает *противоположный*.

Два круга на плоскости либо совсем не встречаются, либо касаются в одной, либо пересекаются в двух точках, смотря по тому, сумма полупоперечников менее, равна или более расстояния между центрами. В последнем случае предполагается к тому, что разность полупоперечников менее расстояния центров [49].

36. Плоскость, ограниченная замкнутой линией, называется, вообще, *фигурой*, а пограничная линия — *окружностию* ◊.

Под кругом иногда разумеют плоскость, иногда линию, как до сих пор это было здесь. Чтобы не смешивать одно название с другим, часто говорят окружность круга для различия с плоскостию круга.

Фигура, которой окружность составлена из одних прямых, называется *прямолинейный многоугольник*, а прямые линии — *бока* или *стороны*. По числу боков многоугольники бывают: *треугольник*, *четыреугольник* и проч.

Фигура называется *отрезком круга* △, когда граничится дугой и прямой линией — *хордой* или *тетивой*; *вырезком круга* ○, — когда двумя полупоперечниками с дугой.

Дуги больших кругов ⊕ на сфере составляют *сферический многоугольник*, ограничивая часть сферы. По числу дуг — *боков* или *сторон* — многоугольники бывают: *треугольник*, *четыреугольник* и т. д., подобно прямолинейным. С двумя только боками сферическому многоугольнику дают название *вырезка*

---

* На плоскости.

◊ Теперь пользуются терминами: граница фигуры, контур.

△ Сегмент круга.

○ Сектор круга.

⊕ См. статью 23 (примечание [47] к ней).

сферы *, а под отрезком ◇ разумеют часть на ней, ограниченную кругом.

Часть шара, отделенную плоскостию, называют *отрезком шара*△, которую, следовательно, граничит отрезок сферы и плоскость круга.

Точки, где смыкаются бока многоугольников, прямолинейных или сферических, будем называть *остриями*○.

Еще надобно заметить название *равнобедренных* и *равносторонных* треугольников, когда два, либо все три бока равны. Равные бока называются *бедры*, третий бок — *основание*, против него острие — *вершина*.

Треугольник выражают буквами близ остриев и знаком △ перед ними.

---

* Иначе говоря, сферическим вырезком Лобачевский называет часть сферы между двумя «меридианами», т. е. двумя полуокружностями больших кругов, имеющими общие концы.

◇ Теперь употребляется название *сегментная поверхность*.

△ Шаровой сегмент.

○ Вершинами.

Глава III

ИЗМЕРЕНИЕ ПРЯМЫХ ЛИНИЙ, ЛИНЕЙНЫХ И ПЛОСКОСТНЫХ УГЛОВ

37. Начиная говорить о величине прямых линий, наперед припомним (ст. 2), что в Геометрии мерить значит наполнять измеряемое мерой и частями меры. В случае невозможности мерить строго *, *надобно, чтобы части меры могли быть уменьшаемы произвольно*; *затем дозволяется почитать остаток в измеряемом менее той части*, *внутри которой он весь помещен*, *и потому пренебрегать*. Без этого положения, мерить и находить таким образом величину всего было бы невозможно в Геометрии [50].

38. Величина прямых линий◊ определяется сравнением с одной из них, взятой за единицу или меру. Она выражается дробью, которой знаменатель показывает, какие, а числитель — сколько таких частей берется в единице. Дробь называют здесь также *содержанием* двух линий — измеряемой к мере.

Если предположить, что величина линии a, сравнительно с другой b, выражается содержанием двух целых чисел n, m, то, взяв m раз a, должны получить n раз b. Отсюда видно, на чем отыскивание чисел n, m может быть основано. Именно, линию a должно повторять, покуда в составной прямой будет другая b укладываться несколько раз без остатка. Числа повторений той и другой линий будут m, n.

---

* Лобачевский подразумевает здесь случай несоизмеримости измеряемой величины и единицы меры.

◊ Длина отрезка прямой линии. Слово «линия» употребляется в дальнейшем в главе III в смысле «отрезок прямой линии».

Может, однако ж, случиться, что сколько бы раз ни повторялось a, не будет выходить кратной линии b; даже в праве думать, что в некоторых случаях и всегда должно так продолжаться. С другой стороны, как невозможно, так и бесполезно было бы считать такие доли в линии, которые для наших чувств исчезают. Итак, с выбором единицы должно назначать и то, какие в ней части за малостию дозволяется пренебрегать. Пусть, например, b принимается за меру, где могут быть отброшены части менее m-ой. Тогда стоит взять линию в m раз более a, на нее полагать всякую b, покуда число n повторений этой последней даст остаток менее b [51], которым пренебрегая, получим $\frac{n}{m}$ — содержание двух линий, a к b.

От произволу зависит, впрочем, какую часть линии должны пренебрегать; следовательно, *точность измерения* так же, как и точность вычисления, может быть доведена до какой угодно степени; по крайней мере в тех границах, которые полагает недостаток наших чувств и которые предоставляется расширять искусству с непрестанным усовершенствованием его способов.

Составление линии повторением одной может представлять иногда неудобство в исполнении. В таком случае стоит только класть меньшую линию на большую, потом остаток на меньшую, новый остаток на прежний и так далее, покуда совсем не будет остатка, либо чрезвычайно малый, который бы дозволялось пренебрегать. Теперь, предполагая, что содержание меньшей линии к большей будет дробь с числителем n и знаменателем $m>n$ целыми, должны получить те же числа повторений одной линии в другой по порядку, какие вышли бы в частных при делении m на n, потом всякий раз остатка на прежнего делителя. Итак, означая числа повторений, о которых говорим, по порядку p p', p'',..., получим содержание меньшей линии к большей (Алгебра, стр. 127)*.

---

* «Алгебра или вычисление конечных» (Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. IV, Гостехиздат, 1948, стр. 103 и сл.).

$$\frac{n}{m} = \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{p' + \cfrac{1}{p'' + \ldots}}}.$$

Если теперь в двух последних приближенных дробях к $\frac{n}{m}$ знаменатели $З$, $З'$ *, то значение всей непрерывной будет разниться с содержанием $\frac{n}{m}$ менее, нежели дробь (Алгебра, стр. 132)

$$\frac{1}{ЗЗ'}.$$

Эту разность, если бы она сама не уничтожалась с измерением без остатка, можем, таким образом, уменьшать вместе с продолжением непрерывной дроби, где прибавляется всегда новый знаменатель с каждым новым измерением посредством остатка [52].

Заметим, однако ж, что *строгость* измерения составляют его *точность* и *верность*. Чем оно более продолжается, тем делается точнее: но, с другой стороны, чем более повторяется неизбежных ошибок, тем верность его становится менее. В двух этих отношениях должно судить о всяком способе, который служит к измерению на самом деле. Преимущество каждого будет, следовательно, зависеть от того, до какой степени вознаграждает он недостаток чувств, и как велико бывает повторение в нем ошибок. Но какой бы способ измерения ни был придуман, всегда существует предел, за который строгость уже не переходит. В теории предполагают эту границу необходимой, но вместе неопределенной и даже произвольной, а потому, соображаясь с действительным измерением, почитают всякую Геометрическую величину за содержание двух целых чисел◊, но не прежде, как уже способ измерения будет известен.

* Лобачевский обозначает знаменатель дроби, являющейся подходящей для непрерывной дроби, русской буквой «*З*» — первой буквой слова «знаменатель».

◊ Утверждение, что геометрическую величину считают всегда «содержанием», т. е. отношением, двух целых чисел, следует понимать лишь

39. Дуги сливаются с их кругом (ст. 22), вырезки сферы — с полной сферой (ст. 14). Это свойство дуг в отношении к их кругам, частей сферы в отношении к полным сферам такое же, как и прямых линий в отношении друг к другу, представляют одинакий способ измерения.

Всякая дуга на круге, так же как и часть на сфере может быть принята за единицу. Чтобы оставить этот выбор произвольным, будем означать π половину круга в измерении дуг и половину сферы в измерении частей ее*. Число π принимают иногда 200, по чаще 180, следуя новому *десятичному*, либо старому *шестидесятичному* делению. В том и другом случае единицу дуг на круге или вырезков на сфере называют *градус*, который разделяют по старому на 60 *минут*, минуту на 60 *секунд*; по новому на 100 минут, минуту на 100 секунд. С новым делением дуги выражаются, следовательно, десятичными дробями. Однако ж эта выгода, собственно вычисления, не так велика, чтобы для нее должно было жертвовать удобностию старого деления. Иногда под π разумеют число, которое можно находить только приближением и которое весьма мало разнится с дробью $\frac{355}{113}$ [53].

Величина дуги или части сферы, выраженная в градусах и долях градуса, даже вообще по сравнению с тем же кругом или с той же сферой, называется *угол*, который бывает *прямой*, когда равен $\frac{1}{2}\pi$, *острый* $<\frac{1}{2}\pi$, *тупой* $>\frac{1}{2}\pi$ и $<\pi$.

Углы называются *линейными*, когда выражают величину дуги на круге; *плоскостными*◊ — величину вырезка на сфере; другого рода части на сфере дают *телесные углы*. В линейных углах прямые, проведенные из центра к концам дуги, а в плоскостных и телесных — плоскости, которые выходят из центра и вырезывают часть сферы, называются *боками*△ угла.

как относящееся к приближенным результатам практически выполненного измерения.

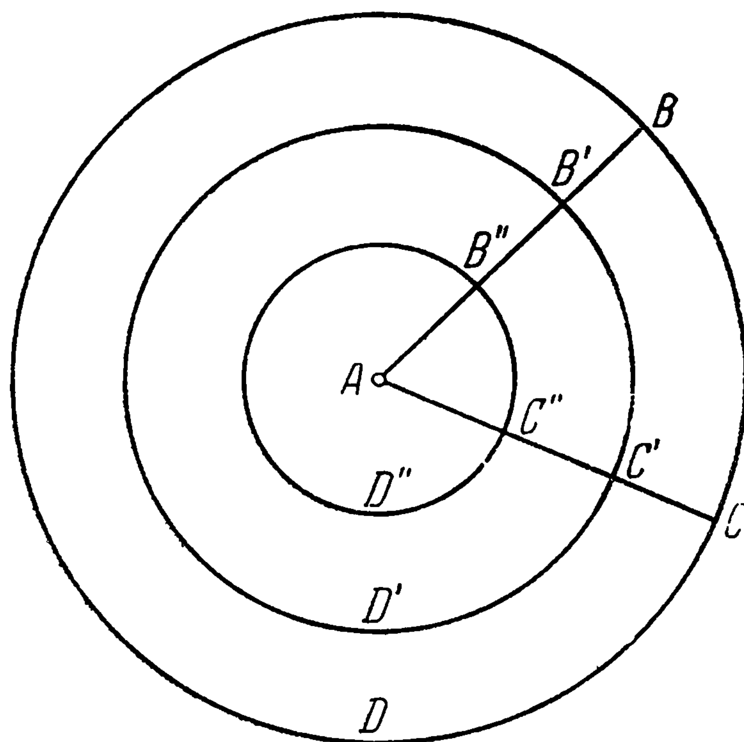
* См. заключительную часть сноски △ на стр. 36—37.

◊ В современной терминологии — двугранными.

△ Сторонами или, соответственно, гранями.

40. *Линейный угол не зависит от величины полупоперечника в круге, но служит только к определению взаимного положения двух прямых.*

Взаимное положение двух прямых линий, которые встречаются, называют их *наклонением*. Пусть линии AB, AC выходят из одной точки A (чер. 39), которую принимая за центр, описываем круги полупоперечником $AB = AC$, $AB' = AC'$, $AB'' = AC''$. Величина дуги $B'C'$ на круге $B'C'D'$, которого составляет часть, будет линейным углом или наклонением линии AB к AC так же, как и AC к AB. Этот угол находим, полагая $B'C'$ по кругу $B'C'D'$, покуда конец ее сомкнется с другим впереди. Так узнаем, сколько раз должна повторяться дуга, чтоб составить один или несколько полных кругов, а следовательно, будем знать самую величину дуги в отношении к ее кругу (ст. 38). В то время как один конец C' дуги сомкнется с другим B', два бока AB, AC, проходя через две точки A, B', сливаются (ст. 27), отчего величина дуги $B'C'$ будет выходить та же, какая всех дуг BC; $B''C''$ на своих кругах, с увеличенным AC или с уменьшенным AC'' полупоперечником против прежнего AC'. Увеличение полупоперечника, покуда возможно, разумеется, доставляет здесь более верности, делая размер дуг более.



Чер. 39

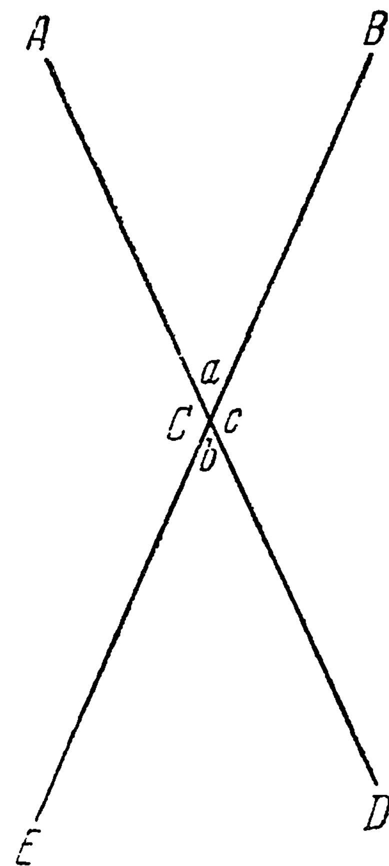
Если б измерение не могло быть строгим*, то надобно приходить к остатку, который за малостию дозволяется пренебрегать

* Лобачевский подразумевает случай несоизмеримых дуг.

и который столько же будет мал с дугами на других кругах.

Вершиной, или *острием*, угла называется точка, откуда бока выходят. Линейный угол выражают $\angle$ впереди букв, которые указывают на бока.

Прямая, проходя через центр, делит круг на две равные части (ст. 25); следовательно, две прямые, соединяясь в одну, делают угол π.



Чер. 40

Положение двух линий бывает *отвесное**, когда угол их прямой; *косвенное*, — когда угол острый или тупой. Отвесные линии называются также *перпендикулами*. Прямая, встречаясь с другой, делает в обе стороны углы, которые будем называть *смежные* и которые, следовательно, вместе◇ составляют π. Когда смежные углы равны, то каждый $\frac{1}{2}\pi$, а линии перпендикулярны.

В прямолинейных многоугольниках углы между боков, обращенные внутрь фигуры, называются *углами многоугольника*. Их число то же, что боков.

Треугольник называется *прямоугольным*, когда в нем один угол прямой. Здесь бок против прямого угла — *гипотенуза*; два другие, перпендикулярные друг к другу,— *катеты*.

41. Продолжение двух боков угла за вершину производит угол, который первому равен и называются с ним *вершинные*△.

Если прямые AC, BC (чер. 40) составляют угол a, их продолжения CD, CE — угол b, то c, смежный с a, будет смежным с b, следовательно, $a + c = \pi$, $b + c = \pi$ (ст. 40), после чего $a = b$.

42. *Плоскостной угол не зависит от полупоперечника сферы, ни от места для центра на линии пересечения двух плоскостей,*

---

* Взаимно перпендикулярные прямые.

◇ Лобачевский пропустил определение операции сложения углов.

△ Вертикальные.

определяя, таким образом, одно только наклонение плоскости к другой.

Взаимное положение двух плоскостей, проведенных через одну линию, называют их *наклонением* друг к другу. Определяет его плоскостной угол, которому данные плоскости служат боками, тогда как центр сферы берется где-нибудь на линии пересечений двух плоскостей. Представляя себе, каким образом этот плоскостной угол должен быть найден повторением вырезка на своей сфере, должно то же сказать здесь о плоскостях, что было сказано в измерении дуг о прямых линиях (ст. 40); следовательно, как линейный угол не зависит от полупоперечника круга, так плоскостной от полупоперечника сферы.

Пусть теперь на линии AB (чер. 41) пересечения двух плоскостей AC, BD центры сфер взяты где-нибудь в точках E, F, вокруг которых полупоперечником $AE = BF$ описаны так сферы, чтоб они пересекались в круге (ст. 34). Его дуга GH между плоскостями AC, BD должна сама себя покрывать, когда центры F, E переменятся местами (ст. 20). Тогда плоскости также сами себя покроют, потому что проходят через те же три точки A, H, B и A, G, B (ст. 33); следовательно, два сферических вырезка между плоскостями равны.

Знак плоскостных углов перед буквами будем употреблять тот же, какой для линейного (ст. 40). Названия: *прямые углы*, *перпендикулярные плоскости*, *смежные и вершинные углы*, здесь те же, что для линейных углов (ст. 40).

Вершинные плоскостные углы равны, потому что для них находится третий, смежный обоим, как и для линейных углов (ст. 41).

Под *углом двух дуг** на сфере будем разуметь угол их плоскостей (ст. 30), будут ли плоскости проходить через центр или нет◊; но всякий раз надобно понимать дуги больших кругов, если не будет сказано противное.

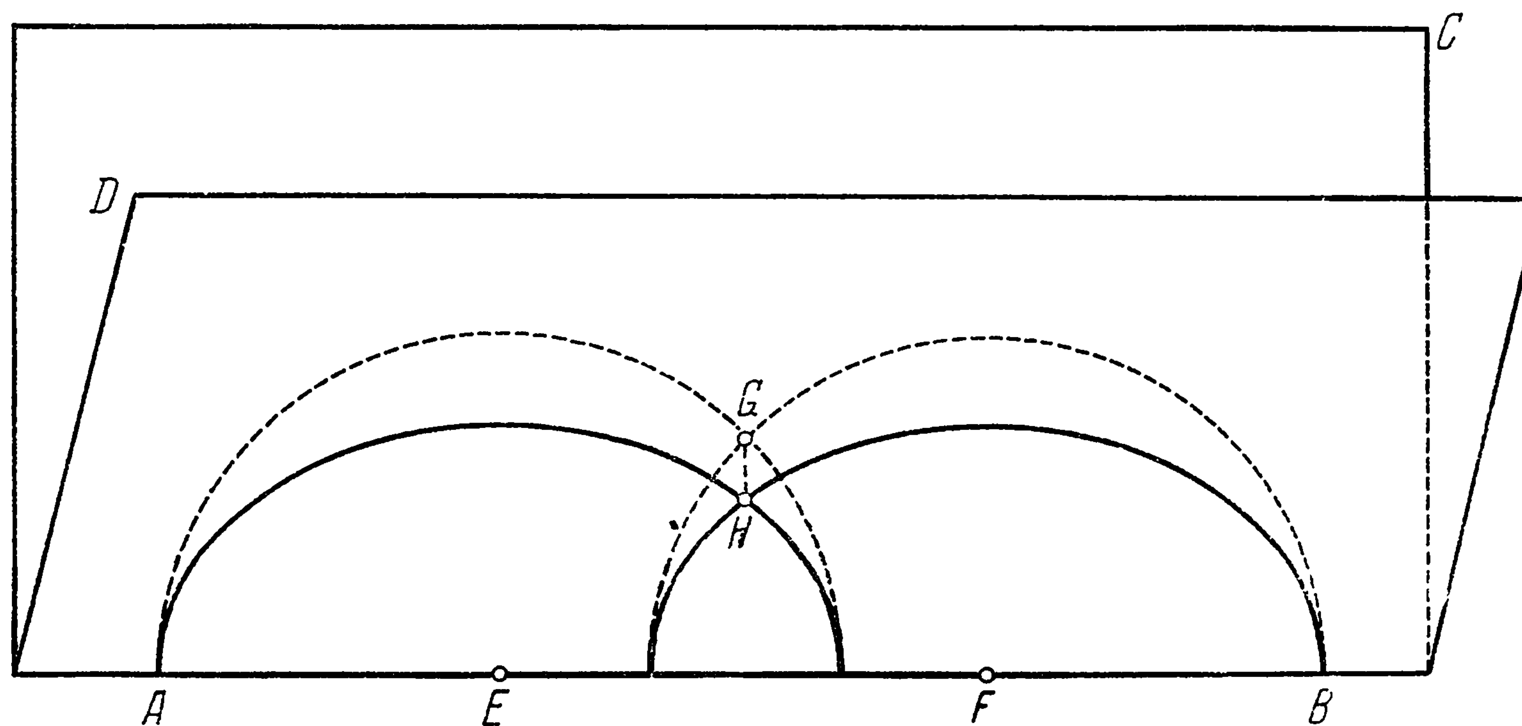
* Подразумевается «дуг окружностей».

◊ Определение угла двух дуг на сфере, данное Лобачевским, отличается от определения угла двух линий на поверхности, как угла между

Линию пересечения двух плоскостей назовем *ребро угла*; самые плоскости—*бока* или *пóлы**.

43. *Плоскостной угол равен линейному между перпендикулами к ребру в полах.*

На линии пересечения AB (чер. 42) двух плоскостей AC, BD, принимая концы A, B за полюсы, производим плоскость,



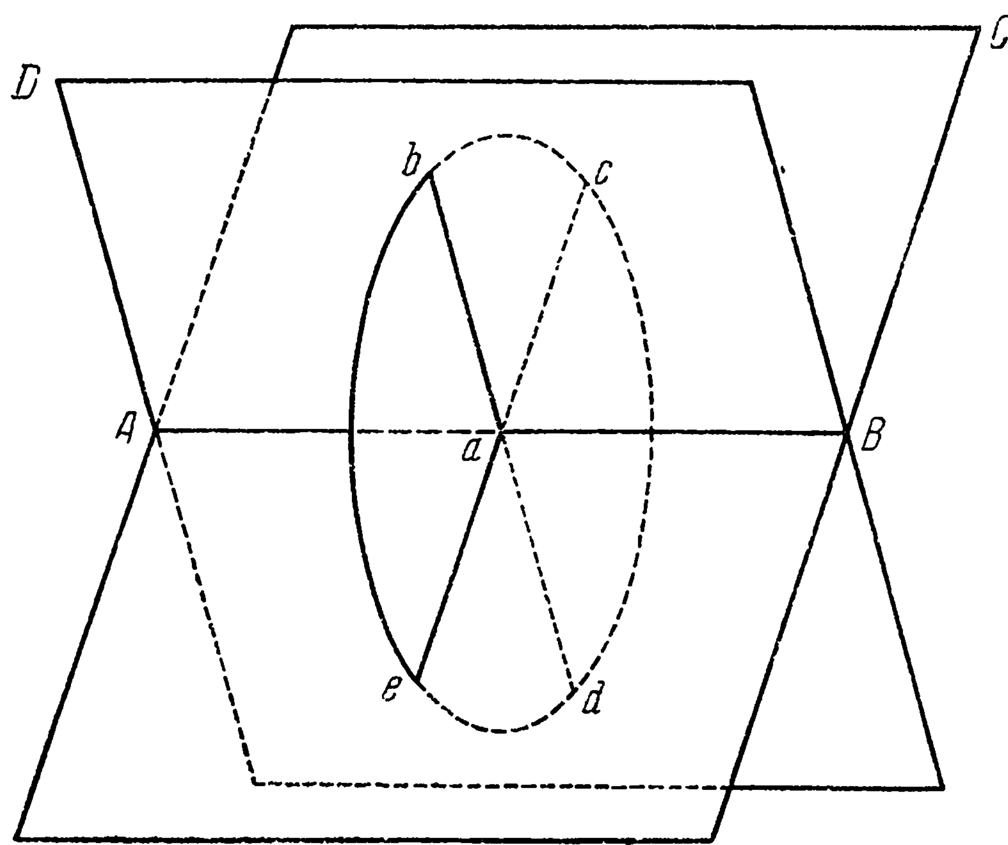
Чер. 41

которой один из кругов происхождения пусть будет bcd с центром a на линии AB (ст. 25). Плоскости AC, BD вырезывают на круге bcd дугу bc, которой величину находим повторением, когда конец с концом сомкнутся или когда промежуток при большом числе повторений можем пренебречь (ст. 39). Повторениям дуги bc по кругу bcd будут отвечать повторения вырезка

касательными прямыми к этим линиям в точке пересечения. В случае двух дуг больших кругов, или в случае, когда плоскость малого круга перпендикулярна к плоскости большого круга, определение Лобачевского совпадает с обычным. Но вообще эти углы различны. Например, две окружности, лежащие на сфере и касающиеся одна другой в некоторой точке, образуют в этой точке в обычном смысле угол, равный нулю, а по определению Лобачевского их угол равен двугранному углу между секущими плоскостями.

* Грани.

$AcBbA$ между плоскостями из сферы с полупоперечником $Aa = aB$ (ст. 20), следовательно, та же величина будет выходить для плоскостного угла $AbBcA$, какая для линейного bac. Между тем, обращая плоскость круга bcd на линии AB, уверяемся, что $\angle baB = \angle caB$ (ст. 20); далее, плоскость круга bac должна сама себя покрывать, когда полюсы A, B меняются местами (ст. 18), причем дуга bc может сливаться сама с собою так, что



Чер. 42

c будет в b и, наоборот, b в c (ст. 20). Отсюда заключаем, что $\angle Aac = \angle baB = \angle caB = \angle Aab$; следовательно, все такие углы прямые (ст. 39), а линия AB перпендикулярна к ac и к ab.

Этому же предложению даем еще другой вид, когда скажем, что в *сферическом треугольнике бок равен противоположному углу, когда каждый из других боков* $\frac{1}{2}\pi$.

44. Когда телесный угол составляется на сфере дугами большого круга, то должен он вместе происходить от пересечения плоскостей, проведенных через центр сферы (ст. 23). Принадлежности такого угла: плоскости, проведенные через центр сферы,— *грани*; общая точка пересечения граней и которая служит центром сферы — *вершина*, или *острие*, телесного угла; линии пересечения граней — *ребра*; плоскостные углы граней — *углы*

сферического многоугольника, которые берутся по порядку, не переходя на другую сторону плоскости. Наконец, *поверхность сферического многоугольника* простирается в ту же сторону граней, по которую считаются углы. Таким образом, одной окружности * сферического многоугольника принадлежат всегда два телесных угла, которых сумма 2π ◊.

Телесные углы по числу граней называются: *трегранными*, *четырегранными* и т. д., *многогранными* с неопределенным числом граней. Знак телесных углов оставим тот же, что для плоскостных и линейных (ст. 40 и 42).

Продолжение граней телесного угла чрез вершину производит новый телесный угол, который вместе с первым назовем *вершинными* △. Им принадлежат *оборотные* ○ сферические многоугольники, где бока и углы соединяются в том же порядке, но следуют один за другим в противном направлении ⊗.

45. Углы в прямолинейном треугольнике считаются в ту сторону, где плоскость ограничена боками. Они называются *внутренние*, тогда как *внешний* ① по другую сторону двух боков с его внутренним составляют 2π. Продолжение бока не может входить внутрь треугольника, потому что не должно пересекать в другой раз ту же прямую (ст. 27), следовательно, внешний угол треугольника всегда более π, тогда как внутренний менее π ⊖.

Угол между боком и продолжением другого назовем *угол внешний от продолжения*, который, таким образом, бывает смежный с углом внутренним.

---

* Одному и тому же контуру.

◊ См. об этом примечание [53].

△ Вертикальными.

○ Симметричные относительно центра сферы.

⊗ Ст. 41 и 42.

① Обычно этот угол называют дополнительным к внутреннему до полного.

⊖ В случае сферического треугольника продолжение стороны может входить внутрь треугольника, так как внутренний угол может быть более π. См. ст. 46 и примечание к ней [54].

46. Из трех боков сферического треугольника два необходимо менее π, чтоб они, не пересекаясь, могли достигать третьего. Два таких бока должны, следовательно, заключаться в одной из двух половин, на которые большой круг от продолжения третьего разделяет сферу.

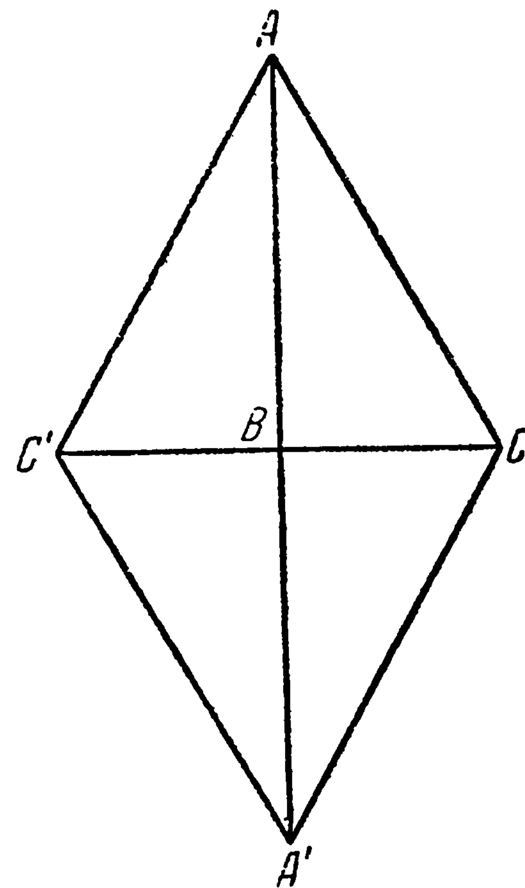
Итак, поверхность сферического треугольника будем всегда почитать менее π, разумея ту самую, которая помещается в одной половине сферы. После чего *углы, противоположные бокам* $<\pi$, *должны быть также* $<\pi$. *тогда как третий угол бывает вместе с боком против него* $<\pi$, $=\pi$, $>\pi$. Действительно, когда точку пересечения тех двух боков, из которых каждый $<\pi$, представляем неподвижной, то третий будет расти вместе с его противоположным углом и вместе с ним делаться π [54].

Глава IV

О ЛИНИЯХ * И ПЛОСКОСТЯХ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ

47. *Перпендикул из точки на линии*◊ *может быть один только.*

Разумеется, что продолжение перпендикула за точку пересечения бывает перпендикулом к той же линии на противоположной стороне, как это следует из равенства вершинных углов (ст. 41). Но всякая другая линия, выходя с перпендикулом из общей точки, делает в одну сторону тупой, в другую острый угол△, следовательно, не может быть сама вторым перпендикулом.



Чер. 43

48. *Перпендикул из точки к линии может быть один только, тогда как из этой точки всякая другая прямая*○ *встречает данную под острым углом на стороне перпендикула.*

Пусть AB (чер. 43) перпендикул из A к линии BC; пусть AC прямая из той же точки A к другой точке C на линии BC. Продолжаем AB по другую сторону

---

* Подразумевается «О прямых линиях». Прямую линию Лобачевский часто называет просто «линия».

◊ К этой линии.

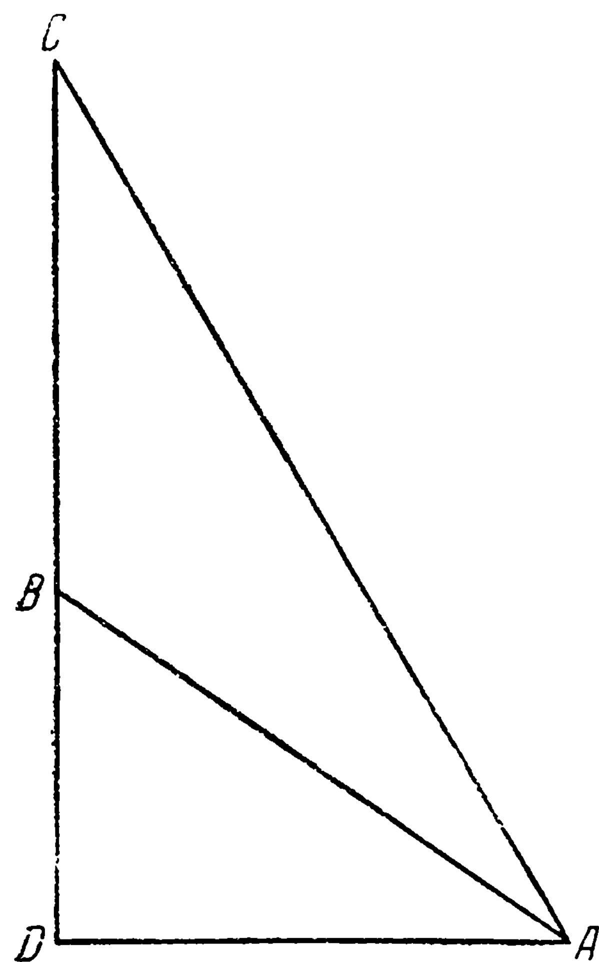
△ Это вытекает из определения прямого угла (ст. 39 и 40) и аксиомы «часть меньше целого» (ст. 37).

○ Пересекающая данную.

BC, делая $BA' = BA$, и соединяем точки A', C прямою. С перекладыванием концов A, A' одного на место другого, середина B линии AA' будет оставаться попрежнему, так же как и вся линия BC, потому что $\angle ABC = \angle A'BC = \frac{1}{2}\pi$ (ст. 47). Отсюда заключаем, что $\angle ACB = \angle A'CB$; а как угол ACA' менее π (ст. 45), то $\angle ACB$ острый.

Итак, *два перпендикула к одной линии не могут пересекаться.*

Если по другую сторону точки B делаем продолжение $BC' = BC$, то с обращением треугольника ACA' на боку AA' точка C придет в C', потому что $\angle ABC = \angle ABC' = \frac{1}{2}\pi$. После чего расстояния $AC' = AC = A'C = A'C'$, следовательно, A, A' — полюсы прямой CC', а перпендикул соединяет всегда противоположные полюсы прямой линии.



Чер. 44

49. *В треугольнике может быть один угол прямой или тупой, тогда как два другие в таком случае бывают острые.*

Если в треугольнике ABC (чер. 43) угол ABC прямой, то мы видели сейчас, что $\angle ACB$ и по той же причине другой угол BAC должны быть острые.

Если в $\triangle ABC$ (чер. 44) угол ABC тупой, то внешний угол ABD от продолжения BC за точку B будет острый. Перпендикул AD из A к BD* упадет куда-нибудь в D на линии BD вне треугольника (ст. 48)◊. Так

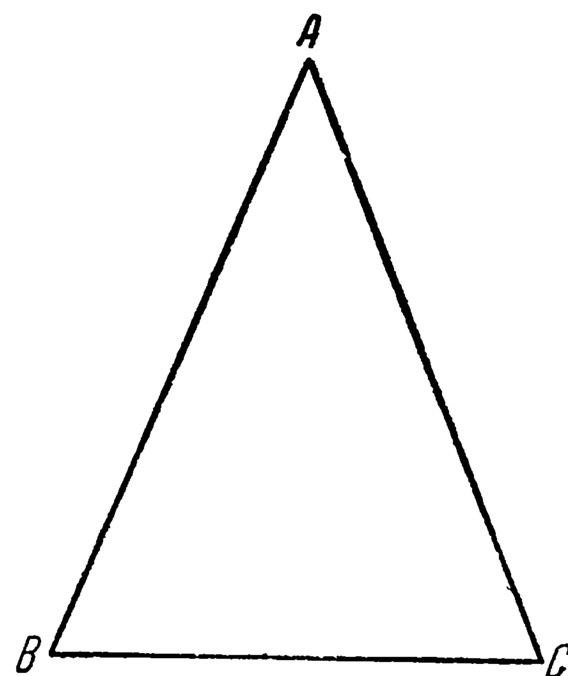
* Существование перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную прямую, вытекает из заключительного абзаца ст. 48.

◊ Если бы основание D перпендикуляра AD лежало на отрезке BC или на его продолжении за точку C, то угол ABD, который необходимо был бы острым (ст. 48), совпадал бы с углом ABC, тупым по условию.

произойдет прямоугольный треугольник ADC с прямым углом при D, следовательно, с острым при C. Подобным образом доказывается, что другой угол CAB также острый.

50. *В равнобедренном треугольнике против равных боков углы равны. Обратно, в треугольнике против равных углов бока равны.*

Равнобедренный треугольник ABC (чер. 45), где A вершина, полагаем самого на себя другой стороной так, чтоб AC бок шел по AB и, следовательно, AB по AC. Равенство боков AB, AC заставит точки B, C переменяться местами, линию BC покрывать самую себя. Это значит, что $\angle B = \angle C$.



Чер. 45

Если же предположим $\angle B = \angle C$, то снова треугольник ABC покроет сам себя другой стороной, когда рассуждаем, что с перемещением B в C и C в B бок CA должен идти по BA, так же как BA по CA, и, следовательно, два бока опять встретятся в той же точке A. Это значит, что $AB = AC$.

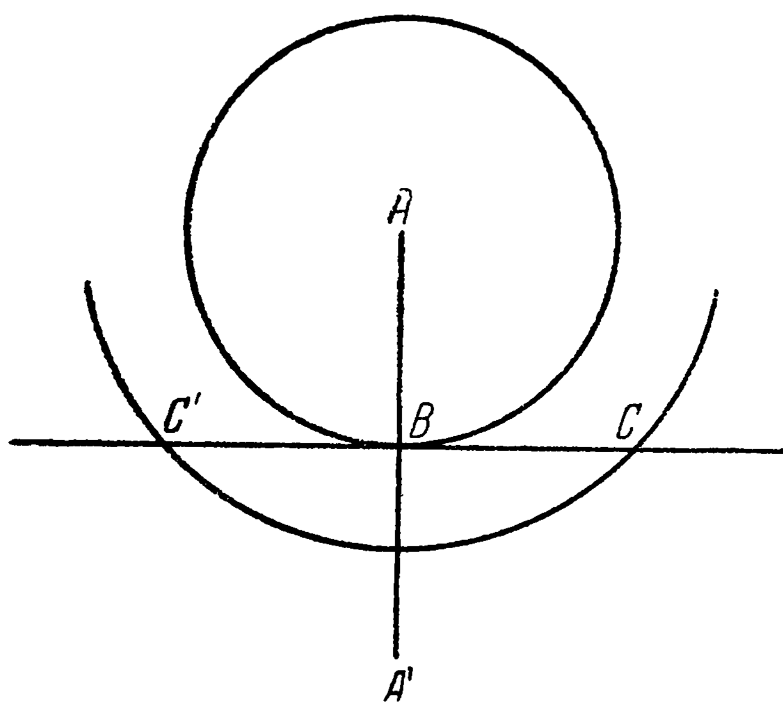
Итак, *треугольник с двумя равными углами бывает равнобедренный*, именно, с двумя бедрами против равных углов. В треугольнике равностороннем все три угла равны; наоборот, с тремя равными углами треугольник должен быть равносторонним. В *равнобедренном треугольнике углы при основании острые*, потому что, будучи равны, не могут уже быть ни прямые, ни тупые (ст. 49).

51. *Прямая линия, встречаясь с кругом, или пересекает круг в двух только точках, или бывает касательной к кругу в одной точке, когда перпендикулярна к поперечнику.* Здесь разумеется прямая с кругом в одной плоскости.

Если прямая входит в круг, а следовательно, продолжаясь, и выходит вон (ст. 25), то в третий раз уже не должна пересекать круга, потому что прямая внутри круга составляет

с полупоперечником острый угол (ст. 50)*; его смежный тупой не может быть углом бедры с основанием в другом равнобедренном треугольнике (ст. 50)◊.

Если прямая перпендикулярна к поперечнику, то не может уже входить внутрь круга. Иначе составился бы равнобедренный треугольник из двух полупоперечников к общим точкам прямой с кругом при вступлении внутрь и при выходе вон (ст. 25). В этом треугольнике против одного полупоперечника прямой угол по предположению, против другого, следовательно, также был бы прямой угол (ст. 50) и, таким образом, произошло бы два перпендикула к одной прямой из центра круга (ст. 48).



Чер. 46

То же можно доказывать еще другим образом. Когда продолжаем полупоперечник AB (чер. 46) вон из круга, делая продолжение $A'B=AB$, потом около A' описываем круг полупоперечником $A'B$, то два круга будут касаться в одной точке B (ст. 35). Прямая BC, которой полюсы в A, A', должна быть перпендикулярна к AB (ст. 48). Всякая точка C будет происходить на линии BC от пересечения равных кругов около полюсов A, A', когда полупоперечники $AC = A'C$, так что AC растет вместе с BC. Отсюда следует, что перпендикул AB — кратчайшее расстояние точки A от линии BC, тогда как прочие расстояния AC тем более, чем точка C далее от конца B перпендикула AB. Если же линия BC встречает круг не перпендикулярно

* Проводя из центра радиусы в две точки пересечения, получим равнобедренный треугольник, а у него углы при основании острые.

◊ Третью точку, не теряя общности, можно рассматривать как лежащую вне отрезка, определенного двумя первыми точками.

к полупоперечнику AC, то пересекает его необходимо в двух точках C, C' и потом остается вне круга, как скоро расстояния точек до центра сделаются более AC.

52. *В равнобедренном треугольнике перпендикул из вершины к основанию делит как угол при вершине, так и основание пополам.*

Пусть CAC' (чер. 43) — равнобедренный треугольник, где $AC = AC'$. Оставляя точки C, C' на своих местах, перекладываем треугольник по другую сторону основания CC', и пусть теперь вершина A падает в точку A', которую с точкой A можем принимать за полюсы линии CC', по равенству расстояний AC, AC', $A'C$, $A'C'$. Прямая AA' между двух полюсов A, A' должна быть перпендикулярна к основанию CC' (ст. 48) и проходить внутри двух равнобедренных треугольников CAC', $CA'C'$, пересекая основание где-нибудь в B между C и C', так как угол бедры с основанием острый (ст. 48). Концы C, C' основания можем почитать за полюсы прямой AA' по равенству расстояний CA, CA', $C'A$, $C'A'$. Итак, обращая всю связь на линии AA'*, полагаем C в C', наоборот, C' в C, от чего CB покроет $C'B$, угол CAB покроет $C'AB$. Это значит, что $CB=C'B$, $\angle CAB = \angle C'AB$.

Заметим к этому, что вершины всех равнобедренных треугольников с основанием CC' должны лежать на линии AA', перпендикулярной к основанию в середине, или, все равно, проведенной через вершины двух равнобедренных треугольников с общим основанием CC'. В таком свойстве равнобедренных треугольников заимствован способ делить угол и линии пополам. Когда требуется разделить угол CAC' пополам, то берут от вершины равные бока AC, AC'. Около концов C, C' описывают равными полупоперечниками CA', $C'A'$◊ дуги кругов. Их точку пересечения A' соединяют прямой AA'. Если требуется разделить линию CC' пополам, то равными расстояниями CA, $C'A$ описывают дуги кругов; их две точки пересечения A, A'

* Вращая всю фигуру вокруг прямой AA'.

◊ Не обязательно равными AC и AC', как это было в предшествующих рассуждениях.

соединяют линией AA'. Из двух точек A, A' можно заменять одну точкой пересечения каких бы то ни было равных кругов около C, C' по ту, либо другую сторону линии CC'.

Из доказанного здесь предложения следуют обратные. Прямая бывает перпендикулярна к основанию, когда соединяет вершину равнобедренного треугольника с серединой основания. Она должна делить угол при вершине пополам, когда выходит из средины перпендикулярно к основанию. Она падает перпендикулярно к основанию в середину, когда выходит из вершины, разделяя здесь угол пополам. Справедливость всех этих предложений делается ясной, когда заметим, что перпендикул из вершины к основанию может быть один только (ст. 48), следовательно, некоторые уже свойства такого перпендикула, определяя достаточно положение линии, предполагают остальные.

Итак, если требуется на прямой CC' восставить перпендикул BA из точки B, то стоит только сделать от данной точки B в обе стороны $BC = BC'$, потом около концов C, C' описывать равные круги, которых точку пересечения A соединять прямою линией с B.

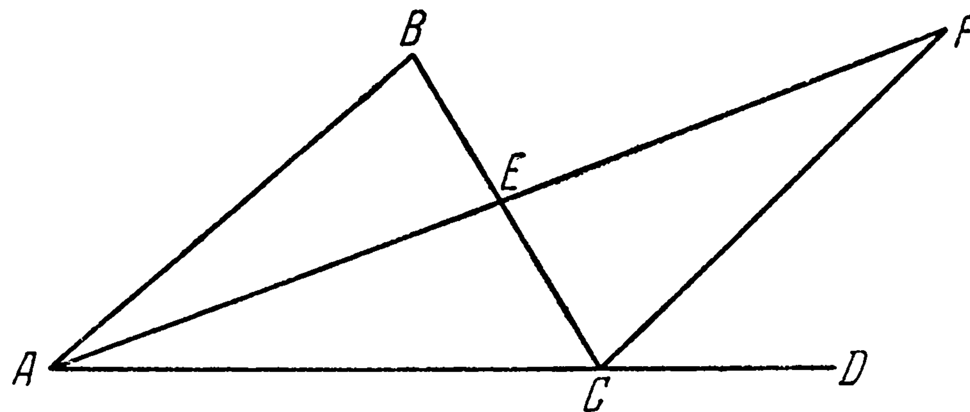
Если же требуется перпендикул AB опустить к прямой CC' из точки A, взятой вне линии, то надобно чертить круг около A произвольным расстоянием AC и так, чтобы данную линию пересечь в двух точках C, C'. Вокруг этих точек описывать дуги по ту, либо другую сторону линии CC'. Наконец, точку A' пересечения последних кругов соединять прямою с данной точкой A.

53. *Угол внешний от продолжения бока в треугольнике более двух углов* внутренних, с ним не смежных.*

В $\triangle ABC$ (чер. 47) продолжаем бок AC; внешний угол BCD между продолжением CD и боком BC будет более как угла B, так и другого при точке A в треугольнике. Ведем из A линию AEF через середину E бока BC, делая $AE = EF$. Соединяем

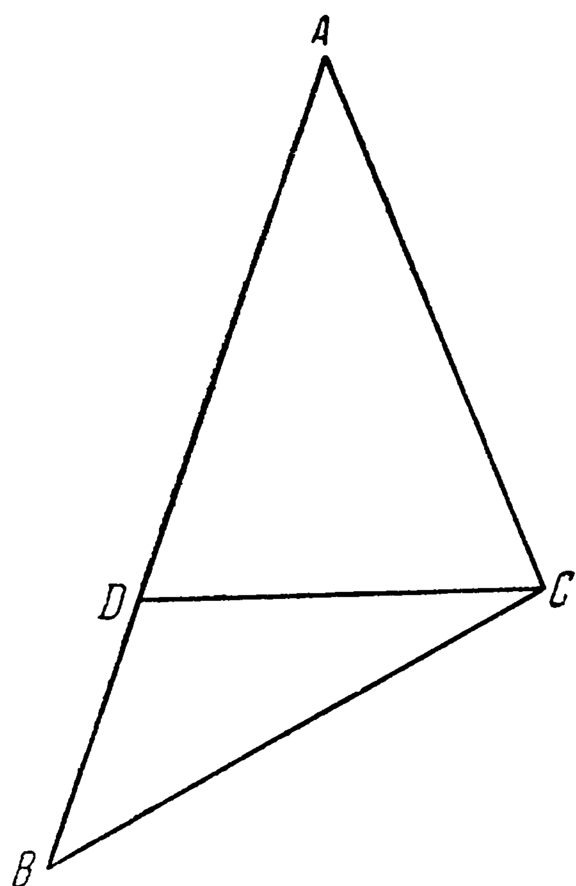
* Вернее — более каждого из двух углов.

F, C прямой FC. Так произойдут треугольники AEB, CEF одинаковые, которые друг друга покрывают, когда при равенстве боков BE с EC, AE с EF и углов BEA с FEC (ст. 41) кладем один треугольник на другой равными боками, например, обращая $\triangle ABE$ вокруг E, покуда BE сольется с EC. Отсюда следует равенство углов ABC с BCF. Заметим к тому, что прямая FA не может встретить линии AD в другой точке, кроме A, откуда выходит; следовательно, точка F лежит в отверстии* внешнего угла BCD, который разделяет она на два: один FCD, другой $\angle BCF = \angle ABC$, как сейчас видели. Это значит, что $\angle ABC$ менее $\angle BCD$. Так же бы доказали, что другой угол BAC менее угла BCD, с ним не смежного.



Чер. 47

54. *В треугольнике против большего бока лежит угол более. Наоборот, против большего угла лежит бок более.*



Чер. 48

В $\triangle ABC$ (чер. 48) пусть бок $AB > AC$. Делаем $AD = AC$ и ведем прямую DC. Произойдет равнобедренный треугольник ADC, где против равных боков углы $ADC = ACD$ (ст. 50); следовательно, угол $ACB > ADC > ABC$ (ст. 53).

Отсюда само собой следует обратное предложение. Когда в треугольнике угол более другого, то против них бока не могут быть равны (ст. 50); не может быть также против большего угла бок менее, после

* Т. е. внутри.

того, как сейчас доказали, что против меньшего бока должен быть угол всегда менее.

55. *В треугольнике сумма двух боков более третьего.*

Треугольник не может иначе составиться, как с пересечением двух кругов, которых центры помещены в концах одного бока, а полупоперечниками служат два другие. Между тем, круги пересекаются только в том случае, когда сумма полупоперечников более, нежели расстояние центров (ст. 35).

Впрочем, это же можем доказывать здесь иначе. Когда в треугольнике BDC (чер. 48) продолжаем один бок, например BD, делая продолжение AD равным другому боку DC*, то произойдет равнобедренный треугольник ADC, где при точках A, C углы равны, следовательно, в $\triangle ABC$ угол при C более угла при A, а потому бок $AB = BD + DC > BC$◊.

Вообще бок многоугольника менее суммы прочих, потому что многоугольник происходит постепенно, начинаясь с треугольника, когда бок заменяем двумя, которых сумма более.

Итак, в этом смысле говорят справедливо, что *прямой линией измеряется кратчайшее расстояние двух точек.*

56. *Перпендикул к плоскости* называется линия, которая встречает плоскость перпендикулярно к двум линиям на плоскости. *Он бывает перпендикулом и ко всем линиям, проведенным от встречной точки по плоскости.*

Это свойство принадлежит прямой, которая соединяет два полюса плоскости. Пусть A, A' (чер. 27) полюсы, $BDB'D'$ — круг происхождения на плоскости, где C — центр круга $BDB'D'$ и начало всех кругов. Когда полюсы A, A' меняются местами, то всякая точка E круга может сохранять свое△. Это

---

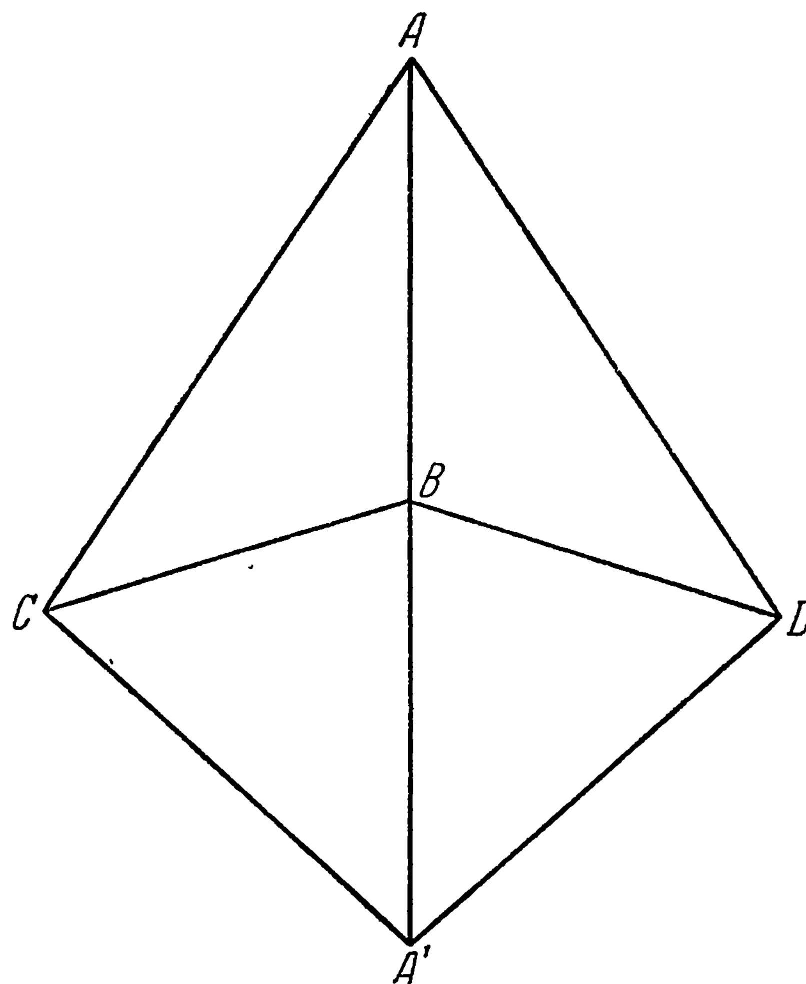
* Лобачевский, экономя количество чертежей, использует тот же чертеж 48, который был составлен применительно к ст. 54. Но здесь нужно его использовать только как схему: на чер. 48 $AD \neq DC$.

◊ Т. е. в треугольнике BDC сумма сторон BD и DC превосходит третью сторону BC.

△ Положение.

значит, что $\angle ECA = \angle ECA' = \frac{1}{2}\pi$. Так и все линии на плоскости, проведенные в C, будут перпендикулярны к линии AA'.

Если теперь, обратно, предположим линию AB (чер. 49) перпендикулярной к двум BC, BD, которые не составляют одной прямой, то, продолжая AB за точку B, делая продолжение $BA' = BA$, потом $BC = BD$ и соединяя концы C, D прямыми с A, A', получим связь линий, где $AC = AD$, $A'C = A'D$, потому что $\triangle ACA'$ покрывает $\triangle ADA'$, как по равенству прямых углов ABC, ABD, так и по равенству линий BC, BD. В этой связи линии заменяют одна другую, когда точки A с A', C с D перекладываются, потому что плоскости треугольников ADA', ACA' падают друг на друга, равенство AB с $A'B$ заставляет точку B сохранять свое место, равенство прямых углов требует, чтобы линия BC шла по BD, наоборот, BD по BC, и, наконец, равенство $BC = BD$ приводит точку C в D, D в C, следовательно, $AC = AD = A'C = A'D$.



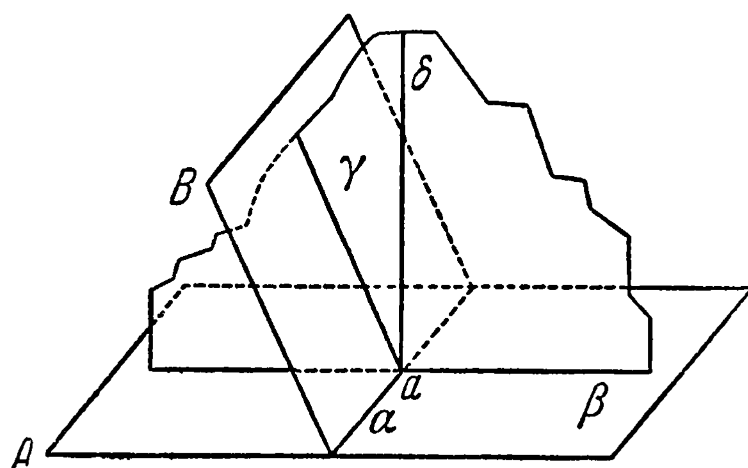
Чер. 49

Итак, плоскость, которой A, A' служат полюсами, пройдет через точки D, C на равных расстояниях от A, A', также через точку B, как начало кругов на плоскости (ст. 22). Через три точки B, C, D, взятые не в прямой линии, другой плоскости провести нельзя (ст. 33). Линия AA', соединяя полюсы, будет перпендикул к этой плоскости.

57. *Из точки на плоскости может выходить один только перпендикул, так же как из точки вне плоскости падает один только перпендикул к этой плоскости.*

Само по себе разумеется, что продолжение перпендикула по другую сторону плоскости будет также перпендикулом плоскости (ст. 47).

Пусть теперь две линии*, не будучи продолжением одна другой, выходят из одной точки. Воображаем через них плоскость (ст. 33) и линию пересечения с данной. Две первые линии не могут к этой последней быть перпендикулярны (ст. 47 и 48), следовательно, не должны быть вместе перпендикулами к плоскости (ст. 56).



Чер. 49а

58. *Из всякой точки можно восставить перпендикул к плоскости.*

Возможность поставить перпендикул из всякой точки на плоскости следует из того, что всякая точка служит началом кругов па плоскости (ст. 29), потом к этому началу приискиваются два полюса, между которыми прямая пройдет через данную точку перпендикулярно к плоскости (ст. 56). Если бы требовалось восставить перпендикул, употребляя к тому черчение прямых линий и кругов на плоскостях, то называем A данную плоскость◊, a на ней данную точку, через которую ведем произвольно линию α в плоскости A, потом через α произвольно новую плоскость B, наклоненную под каким-нибудь углом к прежней A. Ведем из a перпендикулы к α: один β в плоскости A, другой γ в плоскости B; наконец, в плоскости, где лежат β и γ, перпендикул δ из a к β, который и будет перпендикулом к дан-

* Каждая из которых пересекает данную плоскость.

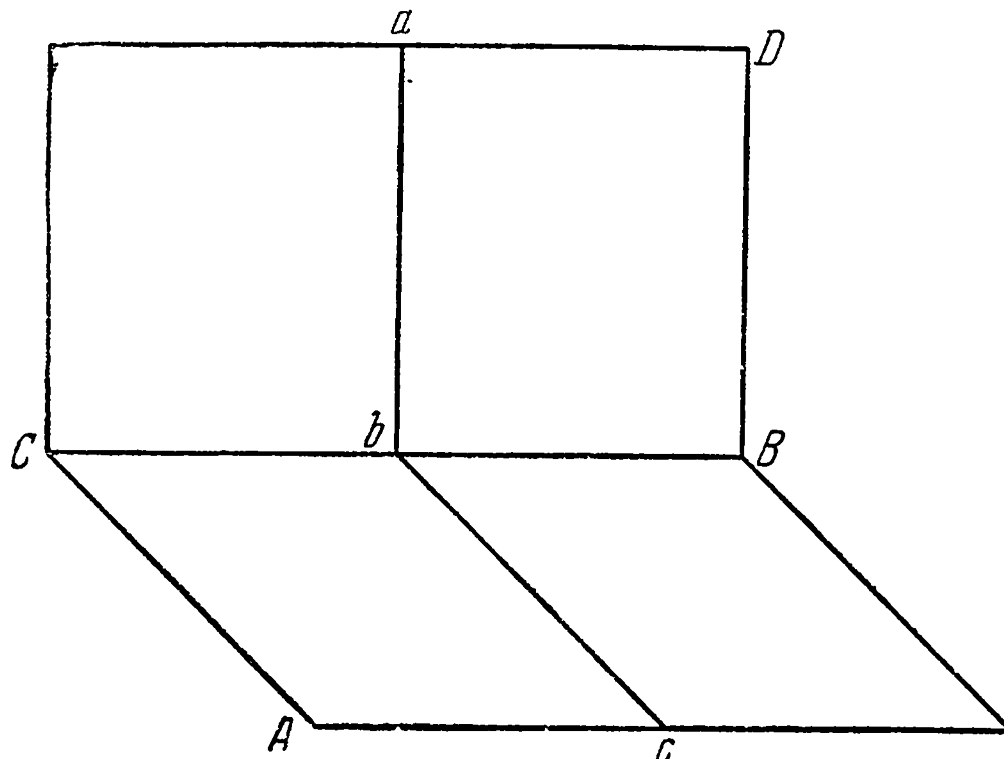
◊ Для пояснения текста Лобачевского приводим чер. 49а.

ной плоскости A. Здесь α перпендикул к β и γ, следовательно, к самой плоскости таких линий и в ней к δ (ст. 56), который будет уже перпендикулом к α и β, а потому к плоскости A, где лежат α и β.

59. *Плоскость перпендикулярна к другой, проходя через перпендикул последней.*

Обратно, *перпендикул к линии пересечения двух перпендикулярных плоскостей, находясь в одной, бывает перпендикулом другой.*

Пусть ab (чер. 50) — перпендикул к плоскости AB. Через ab проходит плоскость CD, разрезывая первую в линии BC,



Чер. 50

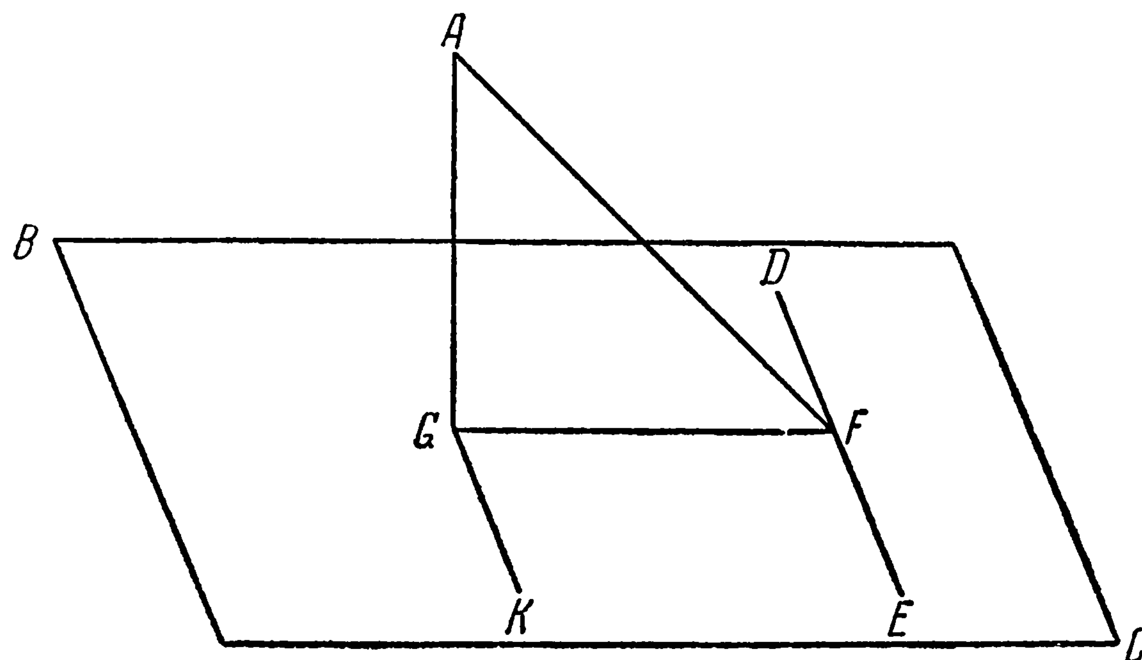
перпендикулярной к ab в точке b (ст. 56). На плоскости AB ведем от конца b к линии BC перпендикул bc, который, следовательно, должен с ab составлять прямой угол*, равный плоскостному (ст. 43).

Если ж, обратно, плоскости AB, CD предполагаются перпендикулами, то перпендикулы ab, bc в этих плоскостях к линии пересечения BC будут и между собою перпендикулярны

* Этот прямой угол, образованный перпендикулярами ab и bc, является линейным углом двугранного угла, гранями которого служат плоскости AB и CD, а потому двугранный угол тоже будет прямым (ст. 43).

(ст. 43). Таким образом, ab делается к BC и к bc перпендикулом, следовательно, к самой плоскости AB.

Отсюда заключаем, что *две плоскости, перпендикулярные к третьей, пересекаются в перпендикуле к последней,* потому что к третьей плоскости перпендикул из общей точки пересечения



Чер. 51

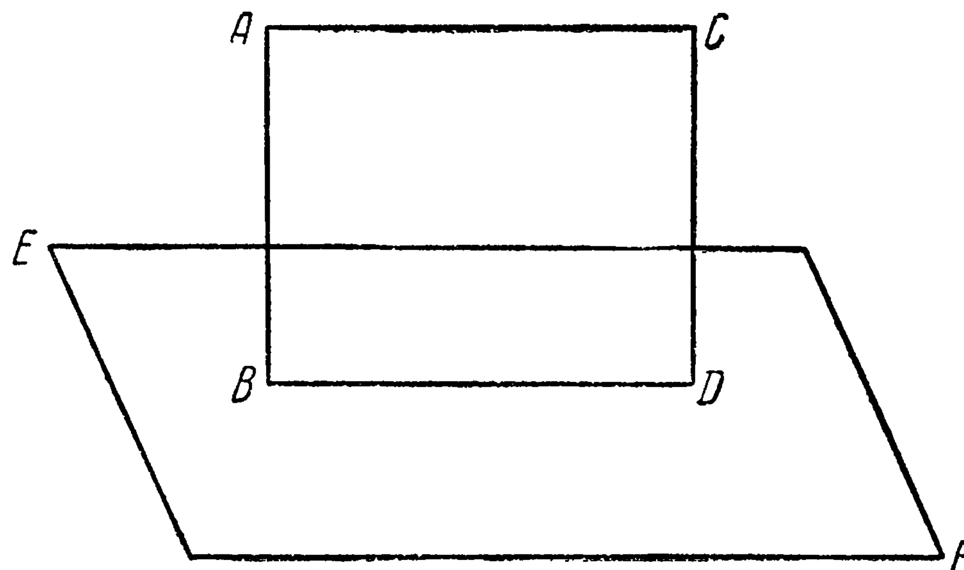
должен быть в той и другой плоскости, следовательно, быть их линией пересечения.

60. *Из всякой точки можно перпендикул опустить к плоскости.*

Всякую точку вне плоскости можно почитать за полюс этой плоскости, находя противоположный на другой стороне (ст. 28). Между двух полюсов прямая будет из данной точки перпендикул к плоскости (ст. 56).

Если бы требовалось опустить перпендикул, употребляя к тому только прямые линии с кругами в плоскостях, то пусть A данная точка (чер. 51), откуда перпендикул должен падать на плоскость BC. Ведем здесь произвольно линию DE; к ней из данной точки A перпендикул FA, потом из F, куда падает этот перпендикул, ведем еще другой FG к ED в данной плоскости; наконец, к FG опускаем из A перпендикул AG, который будет перпендикулом плоскости. Здесь DE — перпендикул к FG и FA, следовательно, к плоскости треугольника FAG, которая,

таким образом, делается перпендикулярной к плоскости *BC* (ст. 59). Прямой угол двух плоскостей будет также прямым углом линии *GA* с *GK*, проведенной в плоскости *BC* перпендикулярно к *FG*. Итак, *AG* перпендикул к *FG* и *GK*, следовательно, к плоскости *BC*.



Чер. 52

61. *Два перпендикула к плоскости заключаются в одной плоскости.*

Пусть *AB*, *CD* (чер. 52) — перпендикулы к одной плоскости *FE*, где концы *B*, *D* соединяем прямою *BD*, через которую воображаем плоскость, перпендикулярную к *EF*. В ней должны заключаться перпендикулы к плоскости *FE*, восставленные в точках *B*, *D* (ст. 59), и, следовательно, самые линии *AB*, *CD* (ст. 57).

На плоскости ту линию, куда падают все перпендикулы другой, назовем *след** или *проекция*. *Отбрасывать* линию на плоскость будет значить опускать перпендикулы, чтобы вести след. Так, здесь *DB* — след линии *CA* на плоскости *FE*.

Угол линии с плоскостию значит угол, который линия делает с своим следом на плоскости.

62. На сфере дуга большого круга *перпендикул* к другой, когда делает с этой последней в обе стороны прямой угол.

* Термин «след» у Лобачевского употребляется в значении «проекция», а не в обычном для начертательной геометрии значении точки пересечения линии с плоскостью проекций.

*Из данной точки на дуге** *можно восставить один только перпендикул*, потому что дуги больших кругов происходят от пересечения со сферою плоскостей, проведенных через центр. По той же причине, из точки◇ *к данной дуге может быть опущен один только перпендикул*, который, однако ж, с полным кругом, где была взята дуга, как и со всеми большими кругами на сфере, пересекается в двух точках. Это пересечение происходит в концах поперечника сферы, следовательно, два перпендикула к одному кругу составляют π [55].

Расстояние точки на сфере будем измерять дугой большого круга, проведенной к другой точке, либо к дуге другого большого круга перпендикулярно. Расстояние полюса до точек его круга, везде равное, составляет $\frac{1}{2}\pi$, потому что поперечник между полюсами перпендикулярен к плоскости круга (ст. 56). Расстояний до круга от всякой другой точки, кроме полюса, бывает два, которые составляют вместе полкруга, следовательно, из них всегда одно $<\frac{1}{2}\pi$, другое $>\frac{1}{2}\pi$.

63. *Оборотные*△ *равнобедренные треугольники на сфере бывают одинаковы.*

Пусть ABC (чер. 53) — сферический треугольник, где бок $AB = AC$. Пусть $A'B'C'$ — оборотный его треугольник, так что здесь A', B', C' представляют концы○ поперечников, проведенных от A, B, C (ст. 44), следовательно, $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$, $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$. Если теперь у двух этих треугольников центры сфер сносим вместе, потом точки A, A'⊗, накладывая бок AB на $A'C'$, то

* Если нет особой оговорки, то «дугой» на сфере Лобачевский называет дугу большого круга.

◇ Не являющейся полюсом данной дуги.

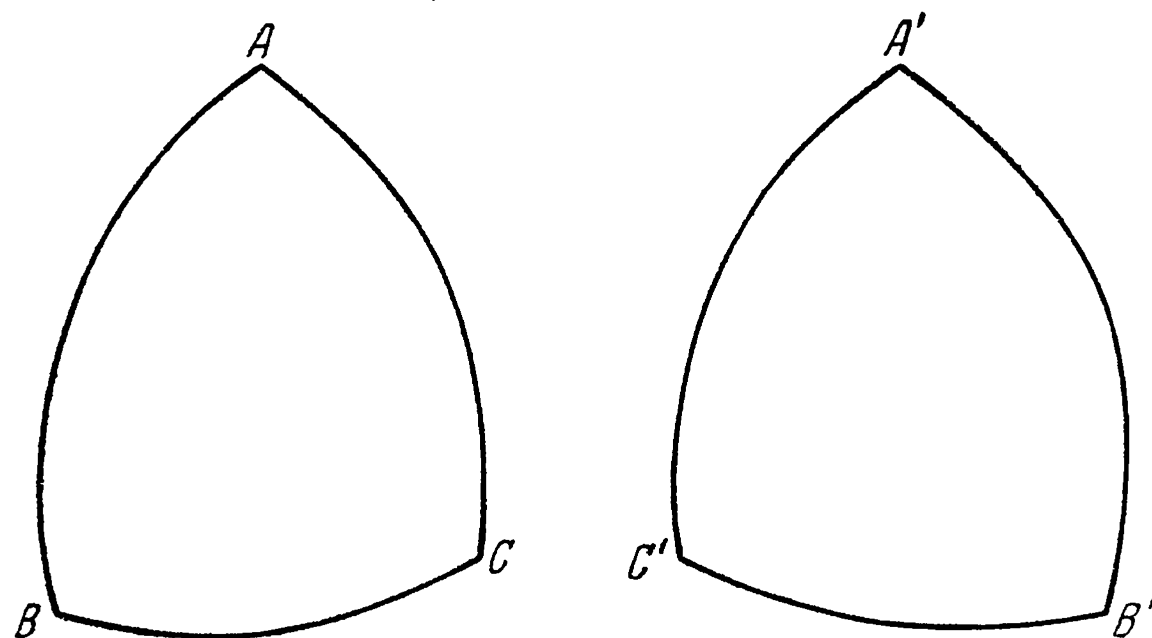
△ Симметричные относительно центра сферы.

○ Вторые конечные точки.

⊗ Лобачевский представляет сначала, что один треугольник независимо от другого движением перенесен в другое положение в пространстве. Совмещая затем сферы, он заставляет один треугольник скользить по сфере другого и приводит точки A, A' в совпадение и т. д.

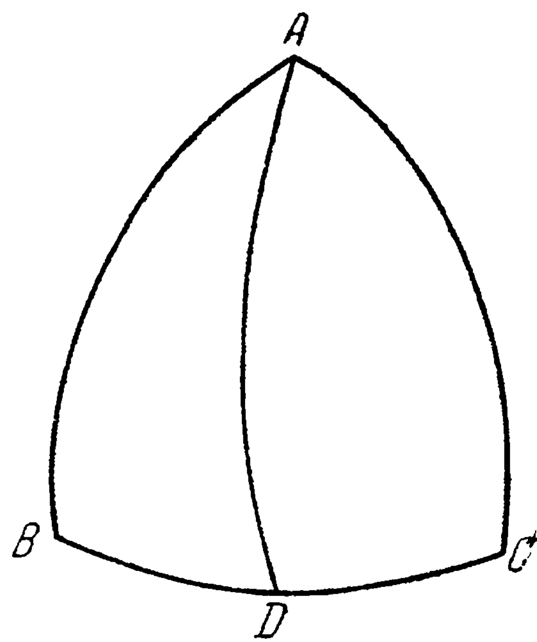
по равенству плоскостных углов при точках A, A' и по равенству боков AB с $A'C'$, AC с $A'B'$ точка C' будет в B, B' в C.

64. *В сферическом треугольнике против равных боков углы равны; наоборот, против равных углов бока равны.*



Чер. 53

Пусть два треугольника ABC, $A'B'C'$ (чер. 53) — оборотные в отношении друг к другу, так что точки A, B, C отвечают в другом треугольнике точкам A', B', C'. Если предположим к тому $AB = AC$, то два треугольника будут покрывать друг друга, когда накладываем их точкой B в C', C в B' (ст. 63). Это значит $\angle B = \angle C' = \angle C$.

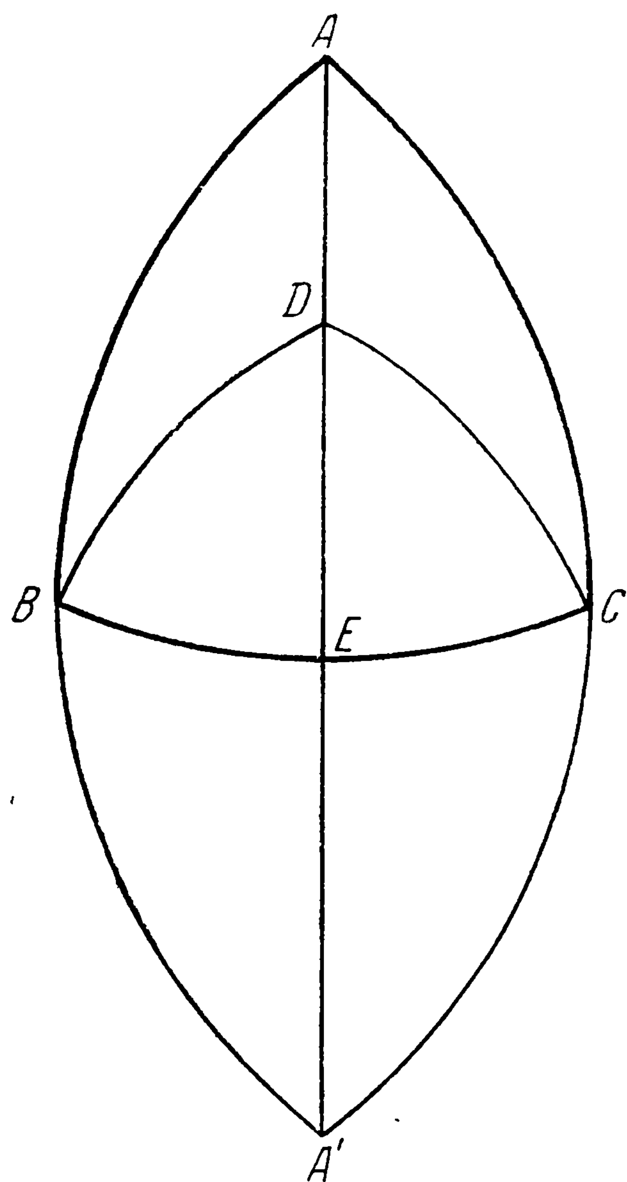


Чер. 54

Если же предположим $\angle B = \angle C$ и, следовательно, $\angle B = \angle C'$, $\angle C = \angle B'$, то надобно накладывать треугольники друг на друга точкой B' в C, C' в B. По равенству плоскостных углов бок $C'A'$ пойдет по BA, $B'A'$ по CA, пересекаясь в общей точке A', после чего $BA = C'A' = CA$.

65. *В равнобедренном сферическом треугольнике перпендикуляр из вершины делит основание пополам.*

Пусть в $\triangle ABC$ (чер. 54) бок $AB = AC$, дуга AD соединяет вершину A с серединой D основания BC. Когда теперь $\triangle ABC$ покроем оборотным его треугольником, полагая на BC соответственный бок, то на точки D, A придут их соответственные (ст. 63), тогда как угол ADC займет место смежного с ним ADB. Это значит, $\angle ADC = \angle ADB = \frac{1}{2}\pi$.



Чер. 55

66. *Дуга, проходя через вершины двух равнобедренных треугольников* [на сфере]*, *бывает перпендикулярна к их общему основанию, которое разделяет также пополам*, кроме того случая, когда бока в одном треугольнике служат продолжением боков в другом.

Пусть ABC, BDC [чер. 55]—два равнобедренных треугольника с общим основанием BC, из середины которого ведем дуги к вершинам A, D. Они должны быть перпендикулярны к BC (ст. 65), а потому сливаться в одну дугу ADE (ст. 62), будут ли вершины A, D лежать на той же или на различных сторонах основания BC. Если к тому две вершины с центром сферы не находятся в одной прямой линии, то другой плоскости через эти три точки, следовательно, также другой дуги через A, D провести нельзя (ст. 33); а потому дуга ADE должна быть перпендикулом к BC. Напротив, когда равные бока AB, AC служат продолжением в другом равнобедренном треугольнике $BA'C$, то вершины A, A' с центром сферы будут в

* Предполагается, что у них общее основание.

одной прямой*, следовательно, может быть и много проведено дуг от A к A'.

Вообще заметим, что, когда в равнобедренном треугольнике вершина не будет вместе полюс того круга, к которому принадлежит основание, то перпендикул из вершины к основанию может быть один только (ст. 62); следовательно, положение такого перпендикула достаточно определено, а потому два свойства дуги в числе четырех: перпендикулярность к основанию, проходить через вершину, делить угол при вершине пополам, делить основание пополам, предполагают два другие, как необходимые последствия.

Так, если требуется дугу BC разделить пополам, то вокруг концов B, C описывают произвольным расстоянием AB◊ дугу△, потом то же другим расстоянием BD, наконец, точки пересечения A, D равных кругов соединяют дугой AD, которая, по крайней мере, в продолжении своем, пройдет через середину E основания. Можно точки A, D сыскать таким образом на одной или на противоположных сторонах дуги BC, избегая того случая, когда дуги одних кругов выходили бы продолжением других.

Если требуется разделить угол BAC пополам, то делают бока AB, AC равными, потом из концов B, C чертят равные круги, которых точку пересечения D соединяют с острием A дугой AD.

Перпендикул из точки A будет опущен к дуге BC, когда пересекут BC в двух точках B, C кругом около A○, потом из точек B, C начертят равные круги какою-нибудь дугою $BD = CD$, наконец, их точку пересечения соединят с точкой A дугой AD, которую продолжают, если бы понадобилось, до встречи с BC.

---

* Т. е. A и A' будут двумя диаметрально противоположными точками сферы.

◊ Т. е. сферическим радиусом AB (дугой большого круга).

△ Следовало бы сказать «дуги».

○ Это возможно, если точка A не является полюсом дуги BC. Если точка A является полюсом дуги BC, то каждая дуга большого круга, проходящая через A, будет перпендикулярна BC.

Чтобы на дуге BC восставить перпендикул из точки E, берут от E в обе стороны равные дуги $BE = EC$, из концов B, C чертят равные круги произвольною дугой $BA = AC$ и соединяют их точку пересечения A с точкой E дугой AE.

Одною дугой начерченную на сфере линию* мы называли здесь кругом. Он действительно будет тот самый, который происходит от пересечения данной сферы с тою, где неподвижный конец дуги берется за центр, а хорда за полупоперечник. Этот круг называют *параллельный* к тому большому, которому неподвижный конец дуги служит полюсом на сфере. Он также происходит от пересечения сферы с плоскостию◊, поставленной перпендикулярно на том поперечнике, который соединяет полюсы△.

Большой круг на сфере в отношении к прочим представляет подобные свойства, какие принадлежат прямой линии со всеми кругами на плоскости. Так, около двух неподвижных точек на сфере равные круги пересекаются в большом круге, к которому самое меньшее и самое большее расстояние точки будут перпендикулярны, после того, как ими начерченные круги не должны пересекать уже, но только касаться большого круга, чтобы не мог составиться равнобедренный треугольник, и в нем через середину основания пройти новый перпендикул (ст. 62 и 65).

67. *Правильный многоугольник*, прямолинейный или сферический, называется тот, где как все бока, так углы равные○.

Внутри правильного многоугольника находится точка — *центр*, от которой как расстояния всех остриев, так и боков равные. В прямолинейном⊗ многоугольнике центр назначают

---

* Т. е. линию, описанную на сфере вокруг точки (центра) дугой большого круга, имеющей постоянную величину («сферическим радиусом»).

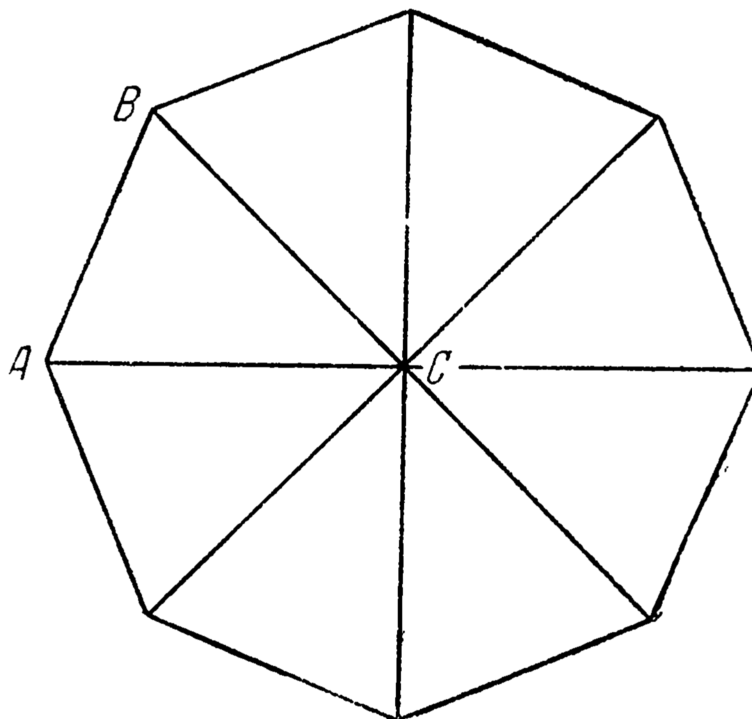
◊ Проходящей через какое-нибудь положение подвижного конца дуги.

△ Лучше было бы сказать: соединяет неподвижный конец дуги с точкой, ему противоположной.

○ Лобачевский не рассматривает звездчатые многоугольники, ограничиваясь многоугольниками без самопересечений.

⊗ Правильном.

своим пересечением те линии, которые делят углы пополам. В центре сферического* многоугольника сходятся дуги, в которых сферу пересекают плоскости, разделяя пополам углы. Например, в прямолинейном◊ многоугольнике линии AC, BC (чер. 55)△, разделив углы при точках A, B пополам, приходят в центр, составляя равнобедренный треугольник ACB, который, прикладываясь к самому себе, производит уже правильный многоугольник. Ясно, что всякий раз AC, BC пересекаются, разделяя каждая в продолжении своем ограниченную плоскость на две части, которые должны выходить от той и другой линии одинаковые○. То же надобно сказать о правильных многоугольниках из дуг большого круга на сфере. Итак, если число боков n в правильном многоугольнике, то каждый угол при центре между линий, проведенных сюда от концов бока, должен быть $\frac{2\pi}{n}$. Круг, описанный расстоянием центра до конца бока, пройдет, следовательно, через острия всех углов; а круг, описанный перпендикулом или, все то же, расстоянием⊗ до средины бока, будет касаться всех боков в их середине.



Чер. 55а

---

* Правильного.

◊ Правильном.

△ Ссылка на старый черт. 55 является, несомненно, опечаткой. Здесь должен быть новый чертеж, который мы воспроизводим по тексту Лобачевского под номером 55а.

○ Иначе говоря, прямая AC, соединяющая вершину с центром, делит правильный многоугольник на две равные части (симметричные относительно прямой AC).

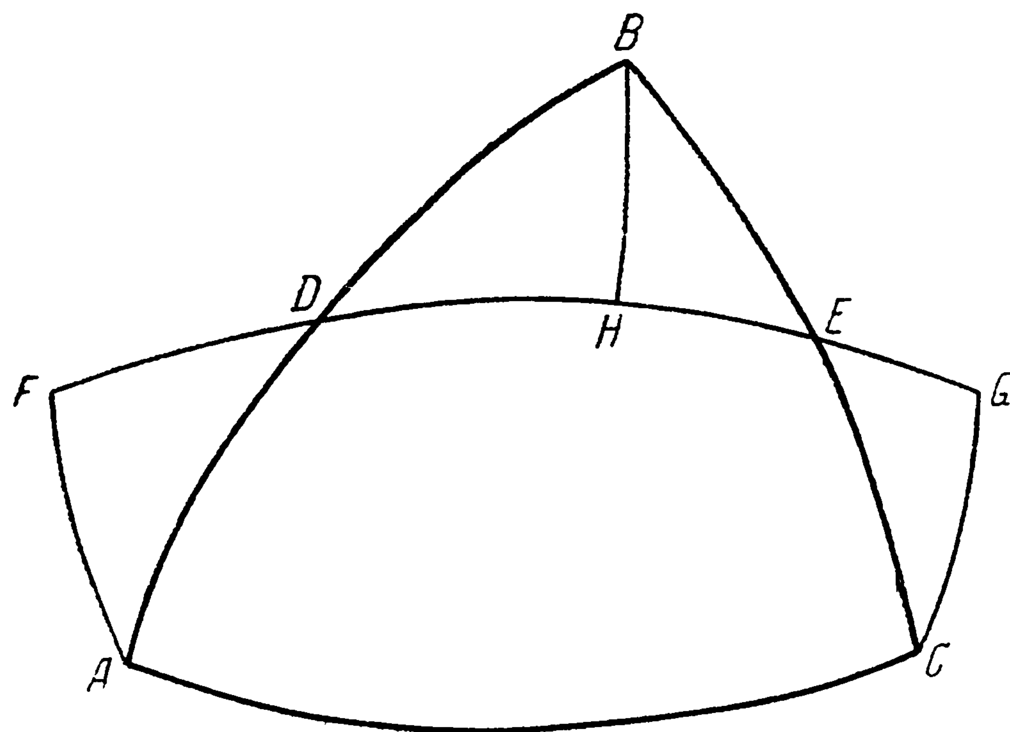
⊗ От центра.

Глава V

ИЗМЕРЕНИЕ ТЕЛЕСНЫХ УГЛОВ ПОМОЩИЮ ПЛОСКОСТНЫХ

68. *Трегранный телесный угол равен половине суммы плоскостных без прямого**.

К тому началу, которое приняли для Геометрических измерений (ст. 37), прибавим еще новое, столько же необходимое,



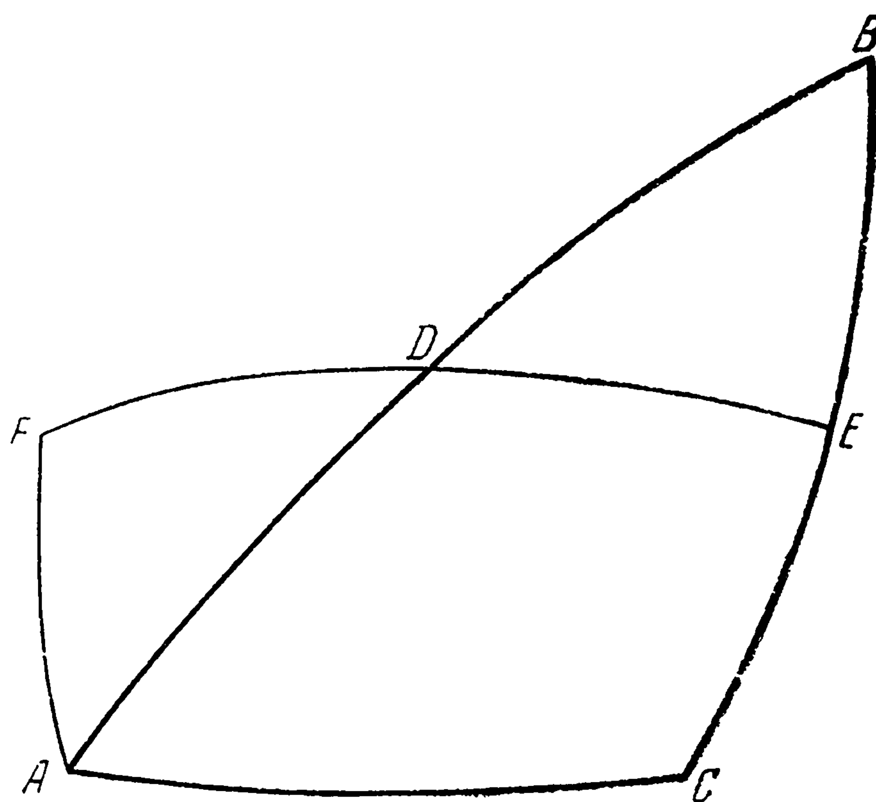
Чер. 56

как уже было замечено при случае выше (ст. 2). *Две величины почитаются равными, когда можем обе составить из одних частей, хотя бы в другом порядке.* После чего будет оставаться только вымерить самые части.

* См. сноску △ на стр. 36—37.

Пусть в сферическом треугольнике ABC (чер. 56) каждый бок $<\pi$. Разделяем AB, BC пополам в точках D, E, через которые ведем дугу $FDEG$. Пусть на нее падает из точки B перпендикул BH внутри треугольника ABC. В таком случае к той же дуге перпендикулы из точек A, C должны быть вне треугольника ABC, составляя треугольники AFD, CEG, одинаковые с DBH, BHE. Увериться в этом можем, обращая, например, $\triangle DBH$ около точки D, покуда BD покроет DA. Тогда равенство вершинных углов заставит бок HD идти по DF и здесь окончиться в точке F, потому что дуга $DE<\pi$ (ст. 46), следовательно, перпендикул AF из A к дуге FD может быть один только (ст. 62). Итак, основываясь на том начале, которое теперь приняли, величину треугольника ABC должны почитать равною с четыреугольником $AFGC$. Заметим к этому, что когда сумму всех углов треугольника ABC называем S, она в четыреугольнике $AFGC$ будет $S+\pi$, потому что здесь к углам BAC, BCA прибавляются $FAD + ECG = ABC$, да сверх того, $AFD + EGC = \pi$.

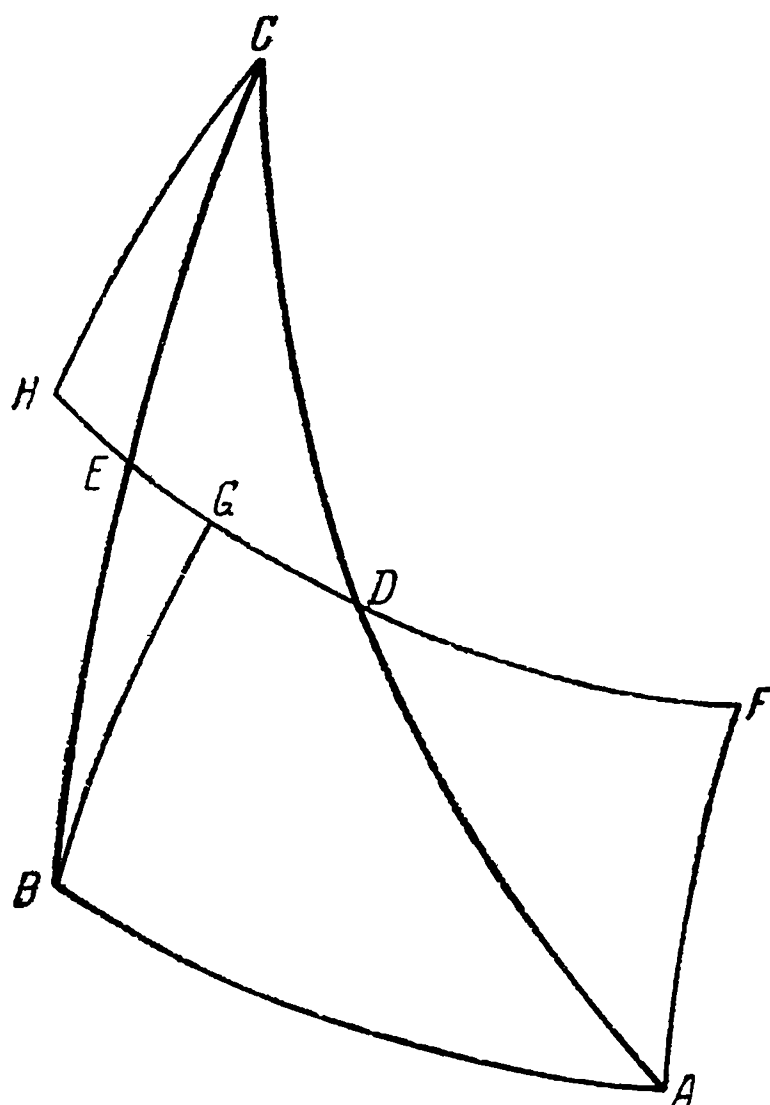
Если перпендикул из B к DE падает в E (чер. 57), то здесь $\triangle BDE$ одинаков с $\triangle AFD$; следовательно, поверхность треугольника ABC снова будет та же, что четыреугольника $AFEC$, где сумма всех углов опять $S+\pi$.



Чер. 57

Если перпендикул CH из C к DE падает вне треугольника ABC (чер. 58), то здесь, как и в первом случае, $\triangle AFD$ одинаков с $\triangle DCH$, $\triangle BGE$ с $\triangle ECH$, следовательно, снова поверхность четыреугольника $AFGB$, равна с $\triangle ABC$, к которому придается $\triangle AFD$, равный

сумме двух отнятых DCE, BGE. В четыреугольнике $ABGF$ опять сумма всех углов $S + \pi$, потому что с треугольниками придается угол FAD вместо суммы двух углов ACB, GBC, да сверх того прибавляются прямые углы при точках F, G.



Чер. 58

Итак, во всяком случае поверхность треугольника ABC (чер. 56) та же, что поверхность четыреугольника $AFGC$, который ограничивается боком $AC < \pi$ в треугольнике и перпендикулами AF, CG из концов его к дуге, проведенной через середины двух остальных боков. В этом четыреугольнике сумма всех углов будет более двумя прямыми против суммы углов в треугольнике. Отсюда следует, что сумма углов и величина поверхности остаются те же во всех треугольниках, поставленных на том же боку $AC < \pi$, тогда как их острие в третьем угле на равном расстоянии от дуги, проведенной через середины боков этого третьего угла [56].

В данном треугольнике ABC (чер. 59) через точки D, E, взятые на середине боков AB, BC, ведем дугу DE, а к ней параллельный круг BF, покуда встретит точку F на продолжении в ту же сторону бока ACF. После чего перпендикул FG из F к кругу DEG будет равен перпендикулу к той же дуге из точки B (ст. 66), следовательно, поверхность и сумма углов в треугольнике ABC те же, что в треугольнике, который получим, соединяя точку F дугами с точками A, C, ведя первую через середину H дуги KG между перпендикулами к ней AK, FG.

Между тем этот последний треугольник обращается в вырезок* $AHFCA$ вместе с тем, как угол при C делается π. В этом вырезке сумма двух углов $S - \pi$, следовательно, величина треугольника ABC должна быть $\frac{1}{2}(S-\pi)$ [57].

Пусть опять в треугольнике сумма всех углов S, но где предположим один бок более полкруга. Заменив этот бок дополнением его к целому кругу, составляем с двумя другими новый треугольник, где, следовательно, сумма трех углов $4\pi - S$, а величина поверхности $\frac{1}{2}(3\pi - S)$ должна составлять π с величиною поверхности в прежнем треугольнике. Отсюда находим поверхность данного треугольника снова $\frac{1}{2}(S - \pi)$.

Это предложение доказывают обыкновенно другим образом. Называем A, B, C углы сферического треугольника ABC (чер. 60), где бок AB продолжаем, покуда составится полный круг, потом и другие два бока чрез их общую точку C до встречи с этим кругом. Кроме данного треугольника, который означим L, произойдут еще три M, N, P, так что сумма всех $L + M + N + P = \pi$. Между тем, $L + P = C$, $L + M = A$, $L + N = B$, после чего $L = \frac{1}{2}(A + B + C - \pi)$. Недостаток этого доказательства заключается в том, что величину треугольников надобно предполагать, оставляя способ измерения неизвестным; да к тому в уравнении $P + L = C$, собственно, должен быть вместо P оборотный его треугольник◇.

Из нашего предложения следует уже само собой, что в оборотных треугольниках поверхности равны△. Впрочем, к этому заключению можно придти другой дорогой, не принимая в рассуждение самой величины треугольников. В сферическом тре-

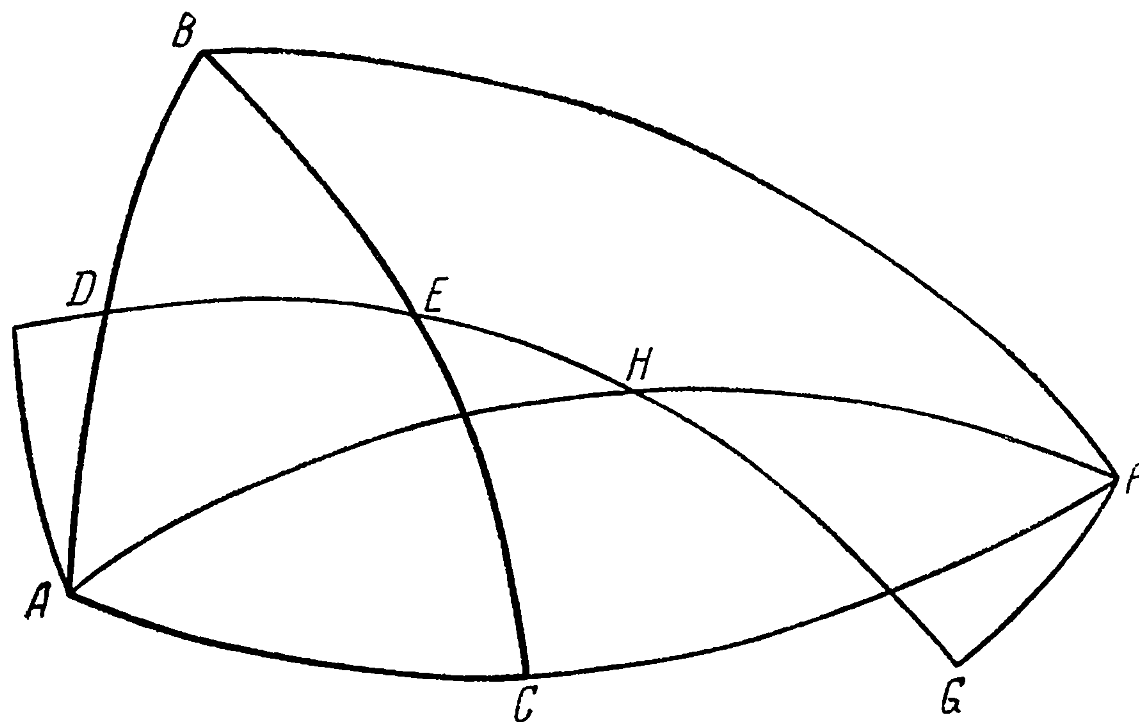
---

* Двуугольник.

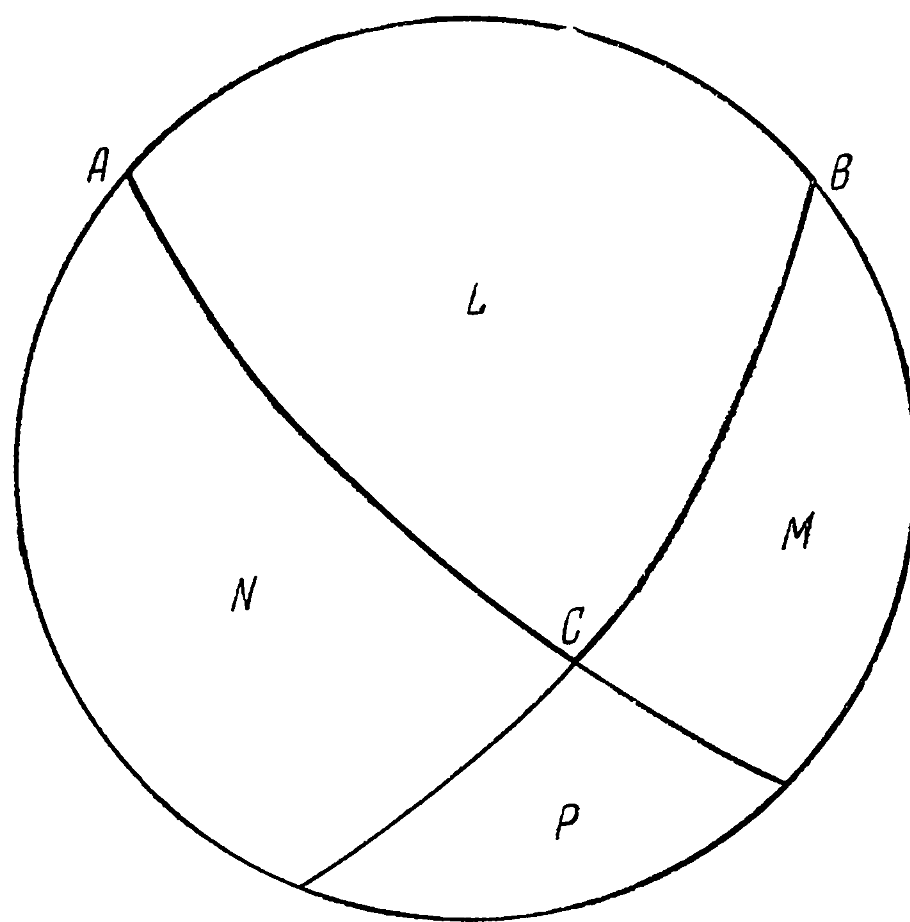
◇ Лобачевский более подробно излагает это доказательство в «Геометрических исследованиях» (см. стр. 37 настоящего издания).

△ Так как углы в двух таких треугольниках соответственно равны, и, следовательно, равны и суммы этих углов.

угольнике ABC (чер. 61) дуги $A'D$, $B'D$, $C'D$, выходя перпендикулярно к бокам из середин A', B', C', встречаются в общей точке D на равных расстояниях AD, BD, CD от остриев. Действительно, когда вместо треугольника BDA' берем оборотный



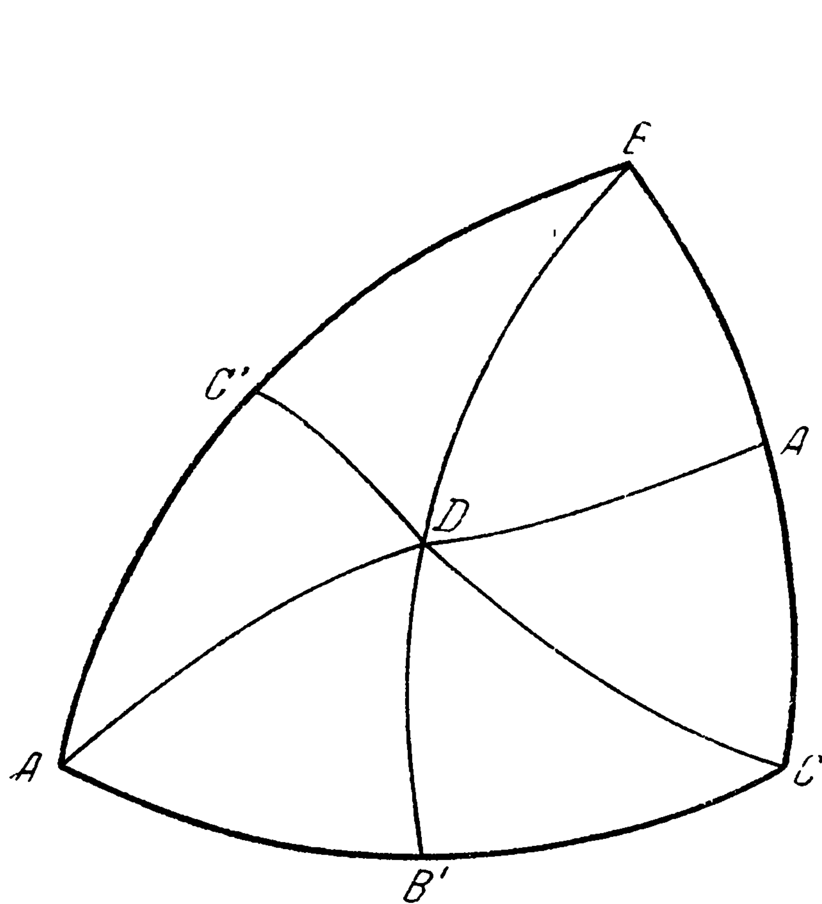
Чер. **59**



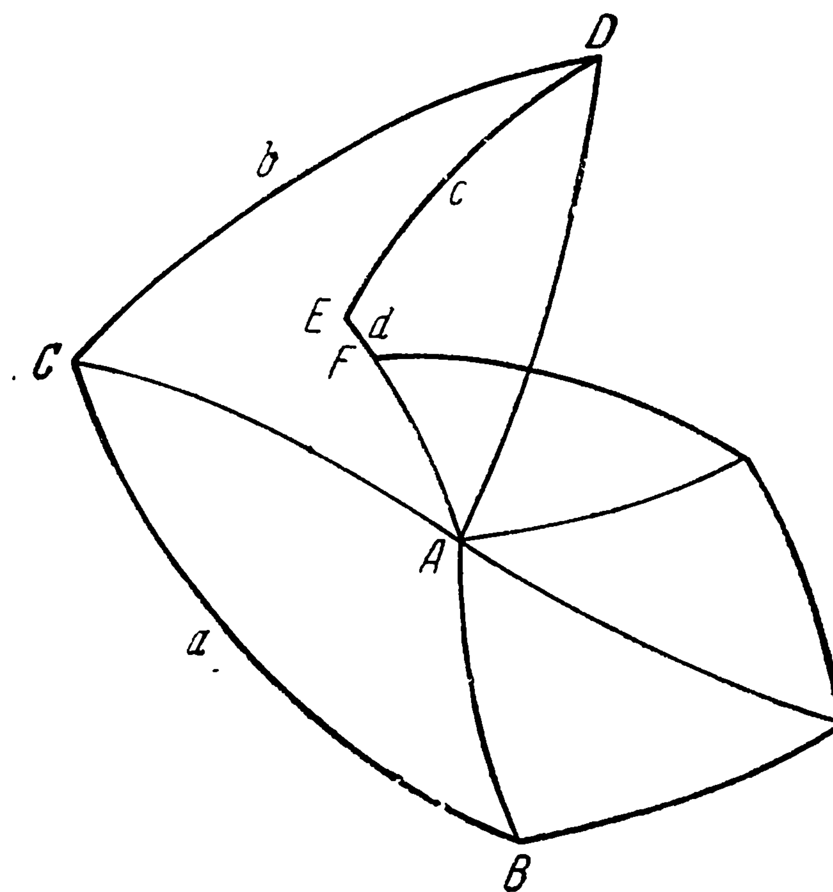
Чер. *60*

его, которого бок BA' полагаем на $A'C$ от точки A', то перпендикулярность DA' в обоих треугольниках заставит BD покры-

вать CD. Подобным образом можем доказывать, что $BD = AD$, когда в точке D пересекаются два перпендикула $A'D$, $C'D$. В эту же точку должен приходить и перпендикул $B'D$ (ст. 65). Так данный треугольник ABC разделяется на равнобедренные ADB, BDC, CDA, которым отвечают те же в оборотном. Доказательство не переменяется также в том случае, когда точка D вне треугольника; но только для составления треугольника потребуется либо вычитать один равнобедренный треугольник из суммы двух других, либо, наоборот, сумму двух вычитать из третьего [58].



Чер. 61



Чер. 62

69. Сферический многоугольник можно составить из треугольников, когда ведем дуги ко всем остриям от произвольно взятой точки на сфере. После такого замечания легко видеть, что величина многоугольника зависит от суммы в нем углов.

От точки A (чер. 62), взятой где-нибудь внутри многоугольника, ведем дуги AB, AC, AD, AE к концам боков a, b, c многоугольника. Может случиться, что вновь проведенная дуга, например AD, прибавляет к прежнему треугольнику ABC другой ACD. Это будет тогда, как с новой дугой AD угол вокруг A

растет от прибавления DAC. Может еще случиться, что вновь проведенная дуга, например AE, от прежней поверхности отнимает треугольник AED. Это будет с тем вместе, как из угла вокруг A вычтется DAE.* Наконец, иногда дуга к новому острию сливается с проведенной прежде, как, например, AE с AF: тогда ни к поверхности многоугольника, ни к углу вокруг A ничего не прибавится. Пусть теперь n — число боков многоугольника, где сумма всех углов S; m — число треугольников, которые прикладываются, и M — сумма в них углов; p — число вычитаемых треугольников и P — сумма в них углов; следовательно, $n - m - p$ число боков, которые сливаются с дугами, проведенными к остриям из точки A. Поверхность всех треугольников, которые прикладываются, должна быть $\frac{1}{2}(M - m\pi)$; подобным образом, как и поверхность тех, которые вычитаются, будет $\frac{1}{2}(P - p\pi)$; после чего величину всего многоугольника находим

$$\frac{1}{2}(M - P) - \frac{1}{2}(m - p)\pi.$$

Между тем, когда растет угол вокруг A, то к углам многоугольника прибывают углы треугольников, что составит во всех таких треугольниках M. Далее, с уменьшением угла вокруг A из углов многоугольника вычитаются углы треугольников, но с прибавлением на каждый 2π*, следовательно, в состав всей суммы войдет $2p\pi - P$. Наконец, всякий раз, когда дуга, проведенная к острию, сливается с боком, то к углам многоугольника прибавляется π◊, всего же $(n - m - p)\pi$; да кроме того, надобно вычесть угол 2π вокруг A, не принад-

* Так как появляется еще новый внутренний угол в многоугольнике, составляющий дополнение до 2π к соответствующему углу отнимаемого треугольника.

◊ Сумма углов треугольника, три несовпадающие вершины которого лежат на одной дуге, равна π, причем для результата подсчета безразлично, прибавляется или отнимается такой треугольник.

лежный к углам многоугольника, где сумма всех должна, следовательно, быть

$$S = M + 2p\pi - P + (n - m - p)\pi - 2\pi = \\ = M - P + (n - m + p - 2)\pi.$$

Отсюда, вставляя значение $M - P$*, получим величину сферического многоугольника

$$\frac{1}{2}\{S - (n - 2)\pi\}.$$

То же бы самое нашли, когда бы взяли точку A вне многоугольника, или на боку между двух остриев, или в самом острие. Во втором из этих случаев надобно число треугольников принимать единицей менее, вычитая в треугольниках из суммы всех углов π, который при точке A к многоугольнику не принадлежит. Два другие случая не требуют переменять в треугольниках сумму всех углов ◇; но когда точка взята вне многоугольника, то с последним △ треугольником не должно к углам прибавлять 2π, потому что, хотя здесь угол вокруг A уменьшается, но треугольник лежит весь вне многоугольника. Если же точка A взята в самом острие, то число треугольников надобно почитать менее двумя.

Итак, *телесный угол не может составиться, как скоро число плоскостных n и сумма всех их S таковы, что $S - (n-2)\pi$ не будет положительным числом.*

Сказанное до сих пор относится к многоугольникам с одинаковой окружностию○. Если же она двойная ⊗, то, соединив

---

* В формулу для площади многоугольника.

◇ Т. е. не нужно вычитать угол 2π, который был образован вокруг внутренней точки A вспомогательными дугами и не входил ранее в состав углов многоугольника.

△ Вычитаемым.

○ Т. е. контур которых гомеоморфен окружности.

⊗ Т. е., если многоугольник гомеоморфен кольцу.

линией наружную со внутренней, вправе почитать окружность одинакой, принимая соединительную линию за бок, по которому должно переходить от одной окружности к другой, потом опять возвращаться к первой. Итак, в общем выражении для поверхности число n теперь уже заменяется $n+2$. К этому же заключению приходим, рассматривая данный многоугольник за разность двух. Пусть n' — число боков наружной окружности, n'' — внутренней; пусть S' — сумма углов в большем, S'' — в меньшем многоугольнике; следовательно,

$$n = n' + n'',$$

$$S = S' + 2n''\pi - S''.$$

Поверхность большего многоугольника

$$\frac{1}{2}\{S' - (n' - 2)\pi\},$$

меньшего

$$\frac{1}{2}\{S'' - (n'' - 2)\pi\}.$$

Их разность дает поверхность многоугольника с двойной окружностию

$$\frac{1}{2}\{S - n\pi\}\,*.$$

Говоря здесь о разделении сферических многоугольников на треугольники, кстати заметим, что разделение прямолиней-

---

* Лобачевский не рассматривает формулу для площади сферической многоугольной области более высокого порядка связности, хотя путь вывода ее ясен из вышеизложенных рассуждений или из ст. 73. Получаем

$$\sigma = \frac{1}{2}[S - (n + 2h - 4)\pi],$$

где h — порядок связности (т. е. число ограничивающих простых замкнутых контуров).

ных таково же. Даже как те, так и другие могут быть разделены на треугольники, которые все складываются. Бок a в произвольно взятом угле, продолжив, если бы понадобилось, отклоняем к другому b, покуда встретим острие где-нибудь на расстоянии c от общей точки линий a, b. Может случиться, что конец бока b будет вместе тем самым острием, которое встречаем в первый раз, обращая линию a; тогда, следовательно, c будет то же, что b. Теперь к двум бокам a, c* третья линия между концов вырезывает треугольник, внутри которого нет других остриев и боков многоугольника. Если б a, b принадлежали к одной, тогда как линия c встречалась бы с другой окружностию в многоугольнике, то с отнятием треугольника не нужно делать уже различия между двух окружностей, которые таким образом соединяются в одну. Еще заметим, что линия c всегда многоугольник с одной окружностию разделяет на два, где в каждом уже менее боков, нежели в данном. Так, следовательно, продолжая, можем, наконец, весь многоугольник разделить на треугольники. Если полагаем m их число, а боков в многоугольнике n, то в числе $3m$ всех боков у треугольников необходимо заключаются n боков многоугольника, которые входят в треугольники по одиночке, тогда как прочие $3m - n$ в них общие по два. Между тем, многоугольник с одной окружностию делится на m таких треугольников, у которых общих боков должно быть $m - 1$. После чего

$$\frac{1}{2}(3m - n) = m - 1,$$

откуда $m = n - 2$ — самое меньшее число треугольников, на которое делится многоугольник с n боками. Напротив, в многоугольнике с двойной окружностию m его треугольников должны быть с m общими боками; следовательно, здесь $3m - n = 2m$, откуда $m = n$. Углы всех этих треугольников в том и

* Очевидно, c не является, кроме рассмотренного выше случая, стороной многоугольника; однако c оканчивается в вершине многоугольника и является общей стороной двух треугольников.

другом случае составляют углы самого многоугольника; а как в сферическом треугольнике удвоенная поверхность равна сумме углов без π, то в сферическом многоугольнике с n боками в одинакой окружности удвоенная поверхность должна быть равна сумме всех углов без $(n-2)\pi$, как и выше было доказано.

70. Грани *правильного телесного угла* пересекают сферу, для которой вершина служит центром, в правильном многоугольнике (ст. 67)*. *Ось* в этом угле будет из вершины проведенная линия через центр правильного многоугольника. *Правильное тело* называется то, которое граничат одинаковые правильные многоугольники◊, смыкаясь в равном числе для составления правильных телесных углов. *Центр* этих тел отстоит на равных расстояниях от остриев и бывает в точке пересечения как осей, так и перпендикулов к граням из их центров. Воображаем две смежные грани A, B; ведем из центров перпендикулы: p, q к плоскостям граней; a, b к общему ребру c в средину (ст. 52). Плоскость, где лежат a, b, перпендикулярна к c (ст. 56) и к граням A, B (ст. 59). Она должна также заключать перпендикулы p, q к граням из центров (ст. 59), пересекая поверхность тела в многоугольнике, когда встречает все ребра граней перпендикулярно в их средине, либо попеременно проходит через острие грани, потом уже через середину ребра перпендикулярно [[59]]. Первый случай тот, когда число боков у граней четное; второй — когда нечетное. В первом случае плоскость перпендикулов p, q, следуя направлению линий a, b, встречает бока граней всякий раз одинаково, разрезывая, таким образом,

* Это — определение правильного телесного угла.

◊ В конечном числе. В геометрии Лобачевского существуют правильные многогранные поверхности, состоящие из бесконечного числа правильных многоугольников (граней), см. примечание [[60]]. Поэтому в проводимых рассуждениях неявно предполагается, что рассматриваемое правильное тело ограничено (расположено в конечной части пространства), т. е. его поверхность образована лишь конечным числом правильных многоугольников.

поверхность тела в правильном многоугольнике*, к центру которого должны сходиться прямые p, q (ст. 67). Если же число боков у граней нечетное, то плоскость по направлению линий a, b пройдет наперед чрез острие двух граней A, B, так чрез все вершины правильных телесных углов и чрез их оси, которых след◇ на гранях делит здесь углы пополам и, таким образом приходя в центр△, бывает продолжением линий a, b. Далее, плоскость, вступая в смежную грань, опять проходит через центр и снова потом через середину ребра перпендикулярно○. Так, в пересечении плоскости с поверхностию тела происходит многоугольник, где все бока равные попеременно смыкаются под тем и другим углом⊗. Теперь всякий раз, когда прямая делит который-нибудь из этих углов пополам, разделяет вместе многоугольник на две одинаковые части; после чего такие линии должны необходимо сходиться к общей точке, в чем увериться легко, полагая многоугольник самого на себя боками равных углов⊕. Доказав это, рассматриваем

* Если не предполагать, что тело ограничено конечным числом правильных многоугольников (см. предыдущую сноску и примечание [60]), то может оказаться, что эта линия (по которой плоскость перпендикуляров p, q «разрезает» поверхность тела) состоит из бесконечного числа звеньев. Например, может получиться ломаная (с равными звеньями и углами), вписанная в предельную линию (см. главу VIII) или эквидистанту.

◇ Проекция.

△ Грани.

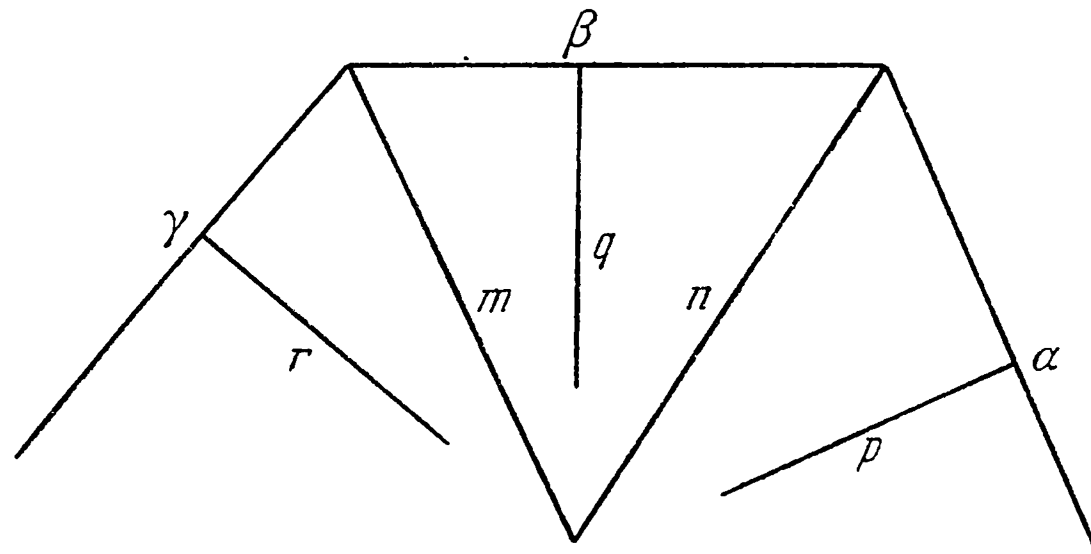
○ Лобачевский пропустил случай, когда плоскость проходит через вершину и далее идет через ребро, общее для двух граней, смежных с данной, и только потом вступает в следующую грань через ее вершину. См. примечание [59] на стр. 519.

⊗ Т. е. у этого многоугольника все стороны равны, а углы будут равными у вершин, расположенных через одну.

Лобачевский пропустил случай, рассмотренный в примечании [59], который дает у многоугольника сечения аналогичную картину и для длин сторон. В дальнейших рассуждениях этот случай не учтен, и доказательство теоремы о центре правильного тела не полно.

⊕ Если прямая делит один из углов многоугольника сечения пополам, то она разделяет многоугольник на две конгруэнтные части, распо-

в многоугольнике три бока α, β, γ с ряду (чер. 63). На них должны быть центры граней в равных расстояниях от остриев, как видели выше. Из центров воображаем перпендикулы к бокам



Чер. 63

α, β, γ в самой плоскости многоугольника. Пусть к α, β будут они те самые, которые называли до сих пор p, q; а перпендикул к третьему γ назовем r. Обозначим n, m линии, которые делят углы пополам, между α и β, между β и γ. Перпендикул q будет, следовательно, выходить из

ложенные симметрично относительно этой прямой. Биссектриса соседнего угла входит внутрь такой части и, следовательно, должна из нее выйти (ст. 25). Но пересечь сторону многоугольника, принадлежащую к такой части, она не может, так как это противоречило бы симметрии многоугольника относительно этой второй биссектрисы. Следовательно, она пересекает разделяющий отрезок прямой в некоторой внутренней точке. Биссектриса угла, симметричного этому второму относительно разделяющего отрезка, пересечет (по симметрии) разделяющий отрезок в той же точке.

Итак, биссектрисы трех последовательных углов пересекаются в одной внутренней точке. Отсюда следует, что все биссектрисы проходят через одну внутреннюю точку.

Заметим, что при этом доказательстве существенно предполагается *ограниченность* рассматриваемого правильного тела (и, следовательно, ограниченность получающегося в сечении многоугольника). Если бы правильное тело не было ограниченным [примечание [6с]], то биссектрисы m, n, ... углов рассматриваемого многоугольника попарно не пересекались бы.

бока β в треугольнике, которого два другие бока n, m. Если q встречает m, то встречает в этой же точке перпендикул r потому, что центры граней на β, γ в равных расстояниях от общей точки β с γ. Если же q встречает n, то в этой же точке встречает p, потому что центры граней на α, β в равных расстояниях от общей точки α с β. До сих пор, следовательно, справедливо, что можно сыскать две смежные грани, к которым перпендикулы из центров пересекаются. Теперь, какие бы то ни были две смежные грани, с общим ли боком или только с общей точкой, они всегда принадлежат к одному телесному углу*, находясь в одной плоскости с осью, на которой и могут только пересекаться. А как одна грань заменяет другую без различия, тогда как и перпендикул одной заступает место перпендикула другой, то все вообще перпендикулы к граням этого телесного угла должны приходить в одну точку. Удержав две грани с общим боком, можем перейти в другой телесный угол и так до последнего. Отсюда заключаем, что все перпендикулы к граням из центров сходятся в общей точке, которая также будет общею точкой осей, в равных расстояниях как от всех граней, так от всех остриев на теле.

71. Телесный угол, который составляется плоскостями◇ через бока граней к центру△, будем называть *угол при центре внутри правильного тела*. Он должен быть, следовательно, всегда кратное число от 2π○. Пусть n — число граней, каждая с m боками; пусть r — число, по сколько граней смыкается в один телесный угол на поверхности правильного тела. Значение телесного угла при центре находим из его плоскостных

* Следует вставить по смыслу пропущенные в оригинале слова: «и их перпендикулы из центров находятся» и выбросить слово «находясь».

◇ Проведенными.

△ Правильного тела.

○ 2π — это величина телесного угла, соответствующего всей поверхности шара (ст. 39).

(ст. 69), и, таким образом, получим уравнение

$$\frac{2\pi}{n} = \frac{1}{2}\left\{m\frac{2\pi}{r} - (m-2)\pi\right\},$$

которое дает

$$n = \frac{4r}{4-(m-2)(r-2)}. \qquad (4)$$

Здесь как m, число боков в грани, так r, число, по сколько граней сомкнуто, не могут быть менее 3. С другой стороны, n не должно быть отрицательным или бесконечно великим [60], а следовательно, ни m, ни r нельзя принимать более 5. Затем, испытывая в этих границах целые числа m, r, находим все случаи:

$m = 3$, $r = 3$, $n = 4$, тело называется *четырегранник* (тетраедр),
$m = 3$, $r = 4$, $n = 8$ ... *осьмигранник* (октаедр),
$m = 3$, $r = 5$, $n = 20$ ... *двадцатигранник* (икосаедр),
$m = 4$, $r = 3$, $n = 6$ ... *шестигранник* (куб),
$m = 5$, $r = 3$, $n = 12$ ... *двенадцатигранник* (додекаедр) *.

Итак, число правильных тел не переходит за 5, тогда как число правильных многоугольников бесконечно. В последних число боков такое же, как углов, тогда как в правильных телах, кроме четырегранника, число граней с числом телесных углов различные. Пусть t — число в них углов◇, следовательно, число всех плоскостных△ в телесных при центре○ должно быть nm то же, что tr вокруг осей⊗. Таким образом, находим

$$t = \frac{4m}{4-(m-2)(r-2)},$$

* Пять правильных тел найдены Лобачевским в абсолютной геометрии, т. е. эти рассуждения проведены независимо от теории параллелей и применимы как в эвклидовой геометрии, так и в геометрии Лобачевского. Хотя названия тел заимствованы из эвклидовой геометрии, однако здесь не требуется, чтобы углы граней куба были прямыми, и т. п.

◇ t — число телесных углов (вершин) в правильном многограннике.

△ Т. е. двугранных углов.

○ Правильного многогранника.

⊗ В первом случае число двугранных углов у телесного угла при центре многогранника подсчитывается сначала по каждой грани (m), во втором — сначала по каждой вершине (r).

откуда число всех остриев

в четыреграннике	4
— кубе	8
— осьмиграннике	6
— двенадцатиграннике	20
— двадцатиграннике	12

72. Предполагаем вообще тело, где число граней n, телесных углов t и всех ребер p. Пусть внутри может быть отыскана такая точка, куда плоскости через бока граней приходят, не пересекая поверхность тела двух раз и составляя, таким образом, от каждой грани вокруг общей точки телесные углы, которых сумма всех будет, следовательно, 2π. Называем α число граней с a боками, β с b, γ с c и т. д. После чего

$$n = \alpha + \beta + \gamma + \ldots,$$

$$2p = \alpha a + \beta b + \gamma c + \ldots$$

Замечая, что сумма всех плоскостных углов вокруг остриев тела $2\pi t$, находим другое выражение для суммы телесных углов вокруг общей точки внутри тела (ст. 69). Так получим уравнение

$$4\pi = 2\pi t - \alpha(a-2)\pi - \beta(b-2)\pi - \gamma(c-2)\pi - \ldots$$

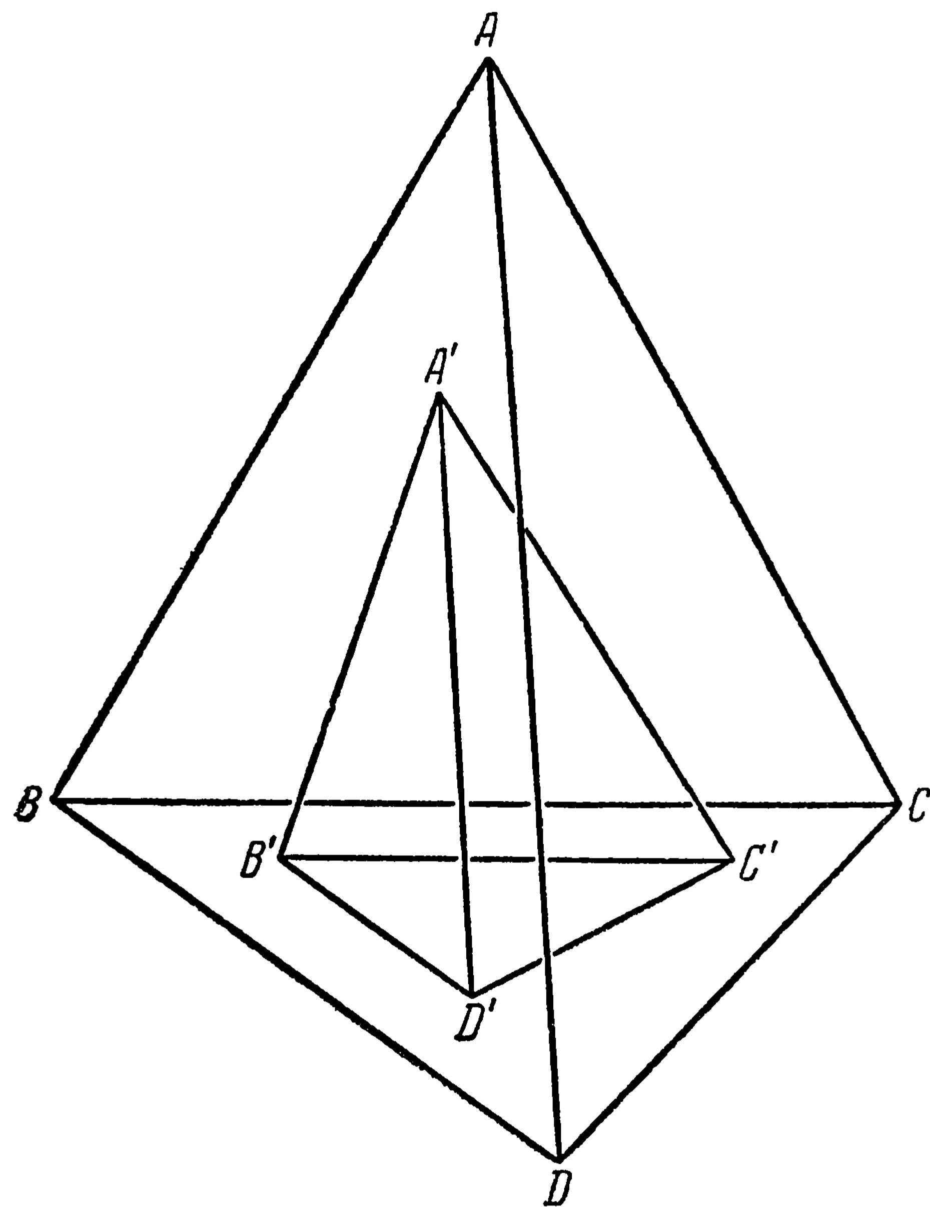
Отсюда с помощию значений n, p заключаем

$$p = n + t - 2. \tag{5}$$

Правильные тела принадлежат к тому случаю, который мы здесь рассматривали. В них уже знаем, какое может быть число граней и телесных углов. После чего находим число ребер:

В четыреграннике	6
— кубе	12
— осьмиграннике	12
— двенадцатиграннике	30
— двадцатиграннике	30

Зависимость между собой в телэ числа граней с числом ребер и телесных углов первый Ейлер сделал известным в записках С. Петербургской Академии 1758 года; потом другое доказательство дал Лежандр (Eléments de Géométrie); наконец, Г. Коши (Journal de l'école polyt. Tome IX, p. 76). Между тем, не должно принимать это предложение во всей обширности. Например, тела, где находятся грани с двойной окружностию, представляют исключение. Если поверхность тела состоит из шести полных треугольников: ABC, ABD, ACD, $A'B'C'$, $A'B'D'$, $A'C'D'$ (чер. 64), с одним неполным BCD, где внутренняя окружность* означает вырезанный треугольник $B'C'D'$, то здесь числа $p = 12$, $n = 7$, $t = 8$ не поверяют уравнения (5).



Чер. 64

73. Чтобы найти во всяком теле, как число ребер определяется числом граней и телесных углов, надобно составлять многоугольник из треугольников, а многогранник из четырегранников. Так можно прямо прийти к уравнению (5) для тел, где все грани с одинаковой окружностию, потом даже к уравнению (4) для правильных.

---

* Внутренний контур.

Прямолинейный многоугольник разделяется на треугольники, которые вокруг одной точки на той же плоскости частию складываются, частию вычитаются, как мы видели подобное составление на сфере (ст. 69), будет ли многоугольник с одной наружной окружностию или также с внутренними. Стоит только соединять из этих последних каждую с наружной и потом рассматривать соединительные прямые за сомкнутые бока того же многоугольника (ст. 69). Подобно тому, как многоугольник разделяется на треугольники, все многогранные тела делятся на четырегранники. Предполагаем тело с одной только наружной поверхностию, разделенной на треугольники. Ведем через их бока плоскости к одной, где-нибудь взятой точке, составляя, таким образом, вокруг нее телесные углы, а с треугольниками на поверхности — четырегранники, которых соединение производит так же тело, как треугольники дают его поверхность. Если грань разделена на треугольники линиями, проведенными к остриям от точки в той же плоскости, то четырегранники составляются сложением и вычитанием их, вместе с треугольниками, так что с возрастанием линейного угла вокруг точки на плоскости прибывает плоскостной угол вокруг линии, которая соединяет общую точку треугольников с общей точкой четырегранников. Как из треугольников, следовательно, происходит грань на поверхности, так и четырегранники соединяются в одно тело, которое называют *пирамида*, где треугольники — *бока** смыкаются в одну точку — *вершину*, прилегая затем все к остальной грани — *основанию*. Четырегранник тоже принадлежит к пирамидам и называется *трехсторонней*◊, тогда как прочие пирамиды по числу боков бывают: *четыреугольная*, *пятиугольная* и т. д. Теперь, когда пирамиды составились, то следует их соединение, которое бы производило данное тело. Ясно, что здесь надобно складывать или вычитать пирамиды, смотря по тому, растут или уменьшаются телесные углы при

---

* Боковые грани.

◊ Треугольная.

вершине. Отсюда заключаем: *тело с гранями происходит от соединения трехсторонних пирамид* вокруг их общей вершины, когда вновь прибавленная к связи прежних пирамида всякий раз покрывает один, два или три бока, выходя своим основанием на поверхность, где треугольник ее прилегает одним, двумя или всеми боками к связи прежних. Даже разделить многогранник можно на такие пирамиды, которые все складываются, подобно тому, как это бывает в разделении многоугольника на треугольники (ст. 69). Именно, начиная с какого-нибудь плоскостного угла, надобно грань отклонять к другой, покуда встретим острие, которое приняв за вершину, а самую грань в прежнем ее положении — за основание, выделяем уже пирамиду. Так продолжая, наконец, и все тело разделяем на пирамиды, которые, вместе с тем как их основания делятся на треугольники, сами подразделяются на трехсторонние.

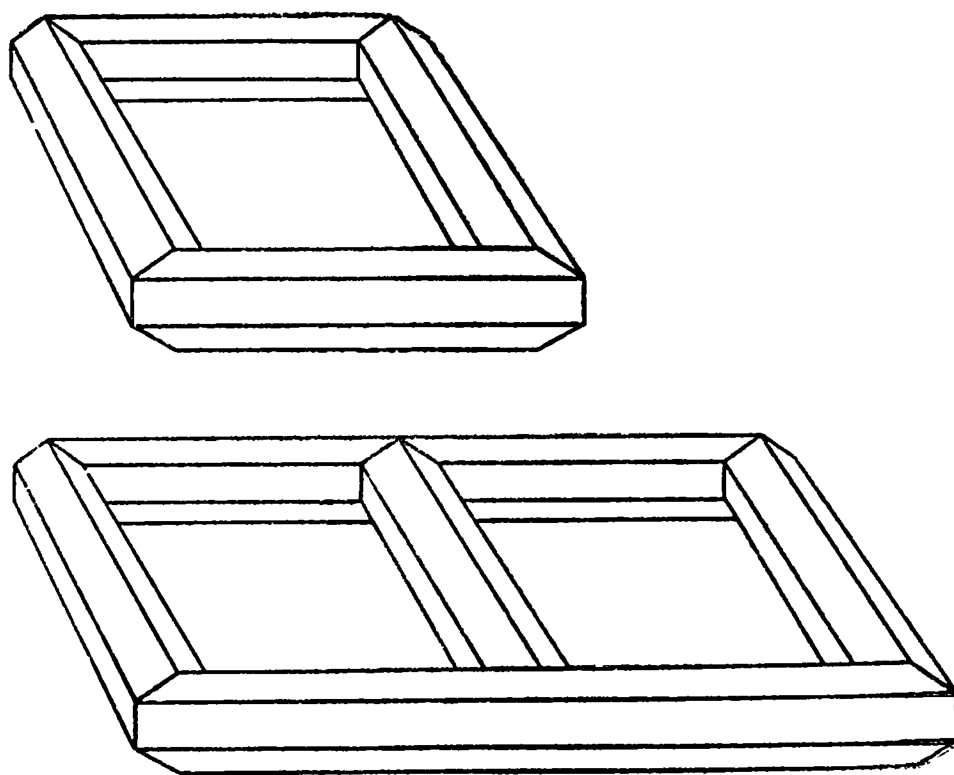
Означаем n — число граней, p — ребер и t — телесных углов, разумея здесь под гранями все без исключения треугольники на поверхности тела, под ребрами — все бока треугольников, а под телесными углами — все те, которые происходят от соединения треугольников вокруг одной точки. Далее, допускаем уменьшение в числах n, p, t только то, которое должно быть необходимым следствием от покрытия боков у пирамиды во всяком случае. Когда теперь новую пирамиду прикладываем одним боком, то число граней n увеличивается двумя, число телесных углов t одним, число ребер p тремя, следовательно, $p - n - t$ остается то же. Когда пирамиду прикладываем двумя гранями вместе, то n, t, p не переменяются. Когда, наконец, пирамиду прикладываем тремя гранями, то n, t, p делаются $n - 2$, $t - 1$, $p - 3$, так что $p - n - t$ снова то же число. Эта разность $p - n - t$, будучи постоянной с прибавлением пирамид, не должна, следовательно, переменяться также с отнятием пирамид. В четыреграннике разность эту находим -2, после чего во всех уже телах с треугольными гранями должны принимать $p - n - t = -2$. Остается рассмотреть соединение нескольких треугольников в одну грань. Когда два тре-

угольника принадлежат к одной плоскости*, то числа n, p делаются $n - 1$, $p - 1$, тогда как число t не переменяется. Вообще, когда несколько смежных треугольников случатся в одной плоскости, то число телесных углов t останется то же, тогда как n, p уменьшатся равно. Если же все m треугольников вокруг точки составляют одну плоскость, то числа n, t, p делаются $n - m + 1$, $t - 1$, $p - m$. Наконец, если m треугольников на плоскости составляют многоугольник с двойной окружностию, то числа n, t, p в этот раз будут $n - m + 1$, t, $p - m$.

Итак, уравнение (5) справедливо для всякого тела, как скоро в нем нет граней с двойной окружностию или когда не составляют его два тела прикосновением только своих остриев и ребер◊.

* Т. е., если два прилежащих треугольника расположатся на одной плоскости.

◊ Соотношение (5) справедливо для тел (многогранников), гомеоморфных шару, у которых притом все грани односвязны (ограничены одним контуром). Для многогранников иной топологической природы алгебраи-



Чер. 64а

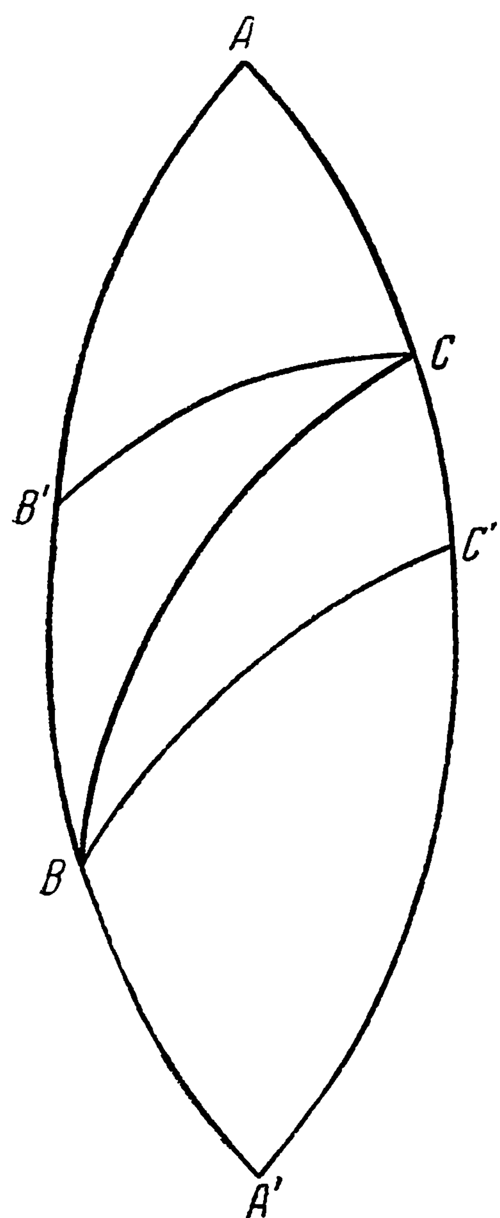
ческая сумма $n + t - p$ (называемая теперь *эйлеровой характеристикой* и являющаяся топологическим инвариантом) принимает значение, отличное от двух. Например, для многогранников, гомеоморфных тору или «кренделю» (черт. 64а), эйлеровы характеристики имеют значения 0, —2.

К уравнению (5) присоединив другое (ст. 71)

$$nm = tr,$$

к тому замечая, что в правильном теле $2p = nm$, легко находим опять уравнение (4).

74. *Сумма двух углов в сферическом треугольнике бывает вместе с суммою двух противоположных боков* $>\pi$, $=\pi$, $<\pi$*.



Чер. 65

В $\triangle ABC$ (чер. 65) пусть сумма двух боков $AB + AC = \pi$. Продолжаем их через точки B, C до новой встречи в A'. Так составится другой треугольник $A'BC$ из равных боков с прежним, именно бок BC общий, далее $A'B = AC$, $A'C = AB$ (ст. 33)◊. Треугольники ABC, $A'BC$ одинаковы, в чем можем увериться, наложив один на другой равными углами при точках A, A'. Отсюда следует равенство двух углов ACB, $A'BC$; потом

$$\angle ACB + \angle ABC = \angle A'BC + \angle ABC = \pi.$$

Вместо точки B берем другую B' на том же боку AB ближе к A. Составится треугольник $AB'C$, где $AC + AB' < \pi$. Между тем, углы

$$ACB' + AB'C = ACB - BCB' + \pi - BB'C =$$
$$= 2\pi - ABC - BCB' - BB'C < \pi \text{ (ст. 68)}^{\triangle}.$$

* Теорема высказана и ее доказательство проведено в предположении, что ни одна из сторон треугольника не превосходит π.

◊ Ссылка на ст. 33, повидимому, результат недосмотра.

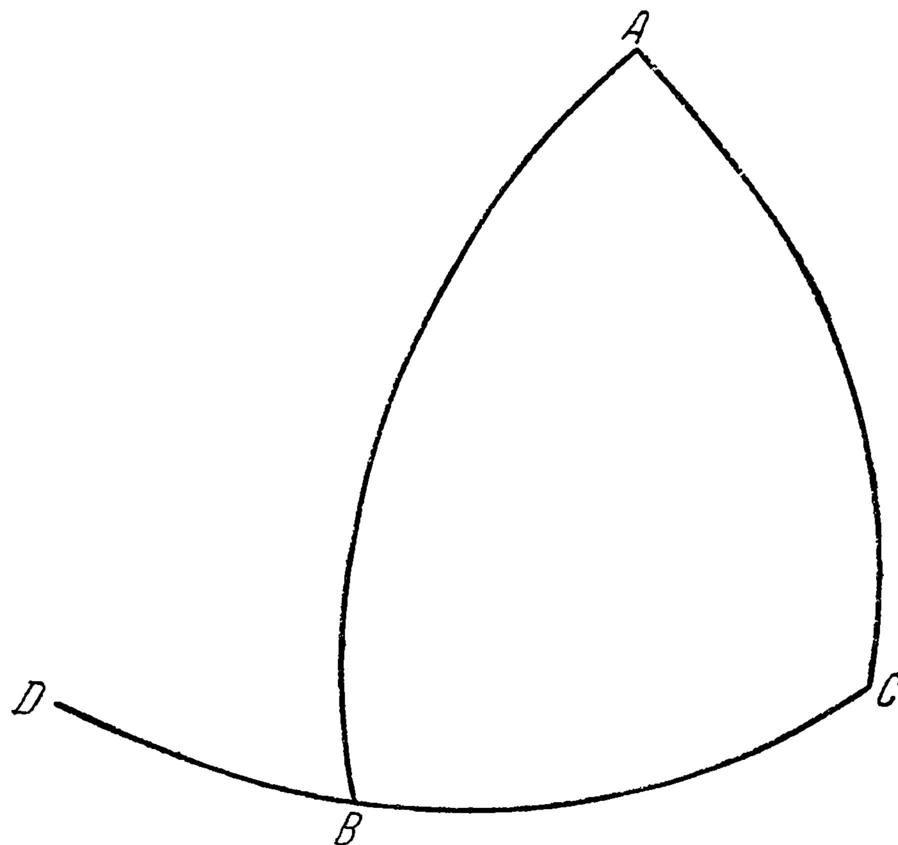
△ Из ст. 68 следует, что сумма углов сферического треугольника больше π.

На дуге ACA' берем точку C' ближе к A', нежели C. Произойдет треугольник ABC', где сумма боков $AB + AC' > \pi$. Им противоположные углы

$$AC'B + ABC' = AC'B + ABC + CBC' = AC'B + BCC' + \\ + CBC' > \pi \text{ (ст. 68).}$$

Отсюда следует:

В сферическом треугольнике внешний угол от продолжения бока бывает более, равен или менее внутреннего, смотря по тому, сумма двух боков, за исключением им общего, $< \pi$, $= \pi$, $> \pi$. В $\triangle ABC$ (черт. 66) пусть BD — продолжение бока BC через точку B. Произойдет угол $ABD > ACB$, когда $AB + AC < \pi$; $ABD = ACB$, когда $AB + AC = \pi$; $ABD < ACB$, когда $AB + AC > \pi$. Также $ABD > BAC$, когда $AC + BC < \pi$; $ABD = BAC$, когда $AC + BC = \pi$; $ABD < BAC$, когда $AC + BC > \pi$.



Чер. 66

Когда в сферическом треугольнике сумма каждых двух боков $< \pi$, *то прямой или тупой угол может быть один только* *. Например, это бывает в треугольниках, где каждый бок менее $\frac{1}{2}\pi$ ◊.

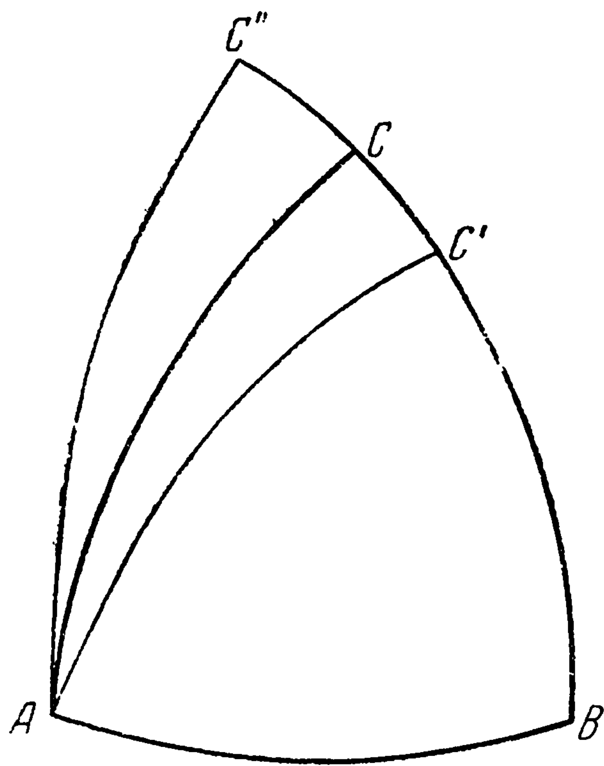
75. *Когда в сферическом прямоугольном треугольнике*

* Действительно, если (черт. 66) угол ABC прямой или тупой, то внешний угол ABD прямой или острый, а потому углы BAC и BCA, каждый из которых меньше этого внешнего, острые.

◊ Причем один из боков может быть равен $\frac{\pi}{2}$.

катет $<\pi$, *то другой вместе с противоположным углом* $<\frac{1}{2}\pi$, $=\frac{1}{2}\pi$, $>\frac{1}{2}\pi$.

Пусть в $\triangle ABC$ (чер: 67) бок $AB<\pi$, при нем углы CAB, CBA, прямые, следовательно, два другие бока $AC=\frac{1}{2}\pi$, $BC=\frac{1}{2}\pi$ (ст. 59). Дуга AC, отклонившись к AB, покуда выходит из той же точки A, не может пересекать бок AB, не встретив наперед дуги BC где-нибудь в C'. Отклонившись по другую сторону, пересечет она продолжение дуги BC где-нибудь в C'' прежде, нежели достигнет продолжение дуги AB. Итак, в $\triangle ABC'$ бок $BC'<\frac{1}{2}\pi$ вместе с противоположным углом; в $\triangle ABC$ бок $BC=\frac{1}{2}\pi$, тогда как противоположный угол $CAB=\frac{1}{2}\pi$; в $\triangle ABC''$ бок $BC''>\frac{1}{2}\pi$, когда противоположный угол $BAC''>\frac{1}{2}\pi$.



Чер. 67

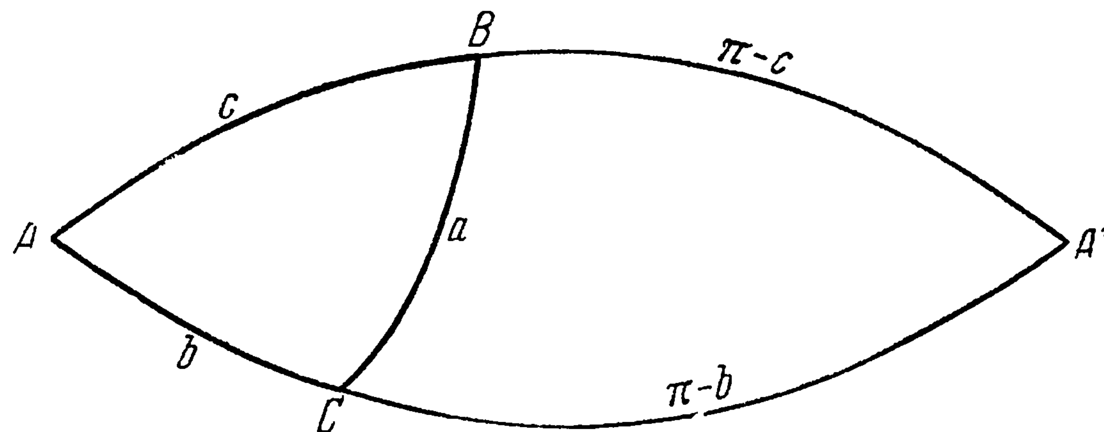
Отсюда следует, что *перпендикул* $<\frac{1}{2}\pi$ *падает в острый угол*; *перпендикул* $>\frac{1}{2}\pi$ *в отверстие тупого* *.

76. *В сферическом треугольнике против большего бока бывает угол более, либо менее, смотря по тому, третий бок* $<\pi$ или $>\pi$.

---

* Если перпендикуляр опускать из какой-либо точки общей стороны двух неравных смежных углов на другую сторону, то получим два перпендикуляра (ст. 62), причем меньший $\frac{\pi}{2}$ будет лежать внутри острого угла, а больший $\frac{\pi}{2}$ — внутри тупого.

Называем a, b, c бока в треугольнике (чер. 68) против углов A, B, C, полагая $c > a$, $b < \pi$. Продолжаем b, c через острия B, C, покуда встретятся в точке A'. Так произойдет



Чер. 68

$\triangle A'BC$, где сумма двух боков $a + \pi - c < \pi$; следовательно, угол $BA'C = A < C$ (ст. 74)*.

Если же бок $b > \pi$, то, заменив его дополнением к целому кругу, получим треугольник, где против боков a, c будут углы $\pi - A$, $\pi - C$, а третий бок $2\pi - b < \pi$, следовательно, $\pi - C > \pi - A$, откуда $A > C$.

Обратное предложение подразумевается здесь уже само собою. *В сферическом треугольнике против большего угла бок более, когда к тому третий бок* $< \pi$, во-первых, потому, что неравенство боков должно быть вместе с неравенством углов (ст. 64); далее потому, что всякое другое предположение было бы противно доказанному выше.

77. *В сферическом треугольнике сумма двух боков более того третьего, который сам менее* π.

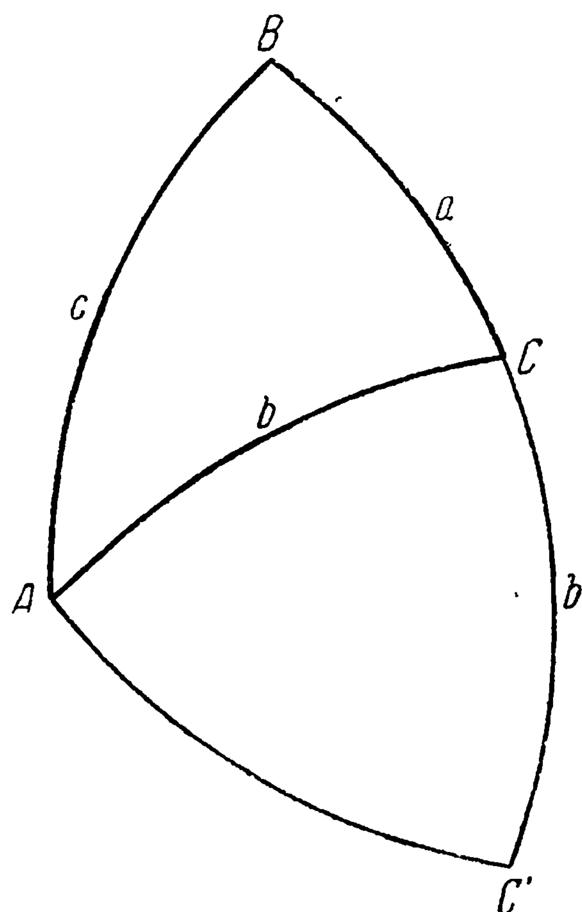
В $\triangle ABC$ (чер. 69) называем a, b, c бока против остриев A, B, C, полагая к тому $b < \pi$, следовательно, также угол $B < \pi$ (ст. 46). Продолжаем a через точку C, покуда продолжение CC' сделается b. Так составится треугольник ACC', где против боков b углы CAC', $AC'C$ равны (ст. 64), следовательно,

---

* Действительно, внешний угол ACB (треугольника $A'BC$) больше (ст. 74) внутреннего не смежного с ним угла A', равного углу A.

угол $BAC' > BC'A$; потом в $\triangle ABC'$ бок $AC' < \pi$ (ст. 46), бок $BC' > AB$ (ст. 76), или $a + b > c$*.

Так как расстояние двух точек на сфере, взятых не на концах одного поперечника, менее полукруга, то, заменяя всегда дугу двумя другими между теми же точками, должны заключить, что *дуга большого круга представляет самое меньшее расстояние на сфере двух точек.*



Чер. 69

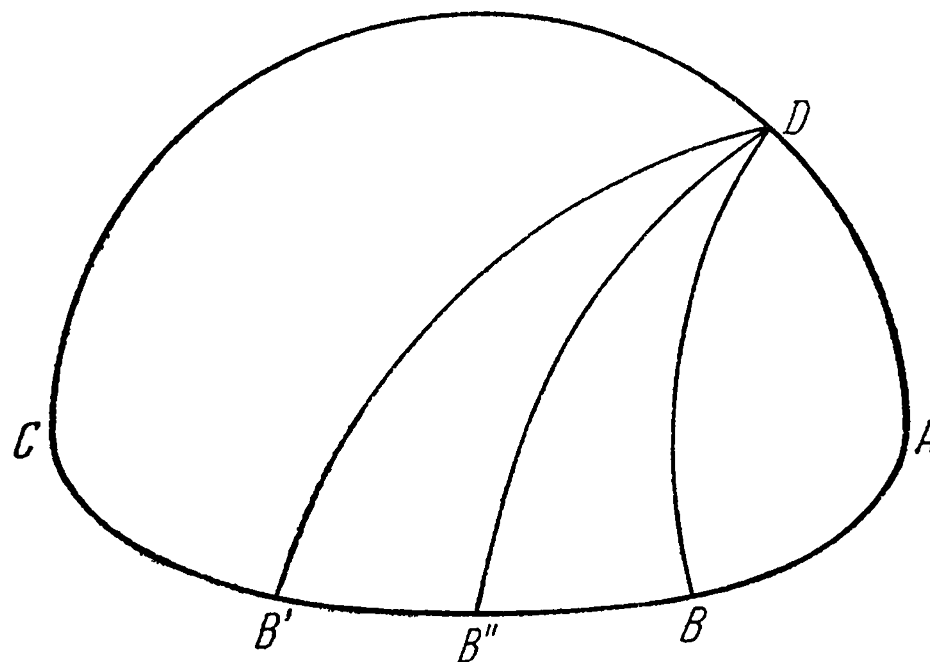
78. *Перпендикул на сфере, будучи менее* $\frac{1}{2}\pi$, *дает кратчайшее расстояние точки до круга, так что всякая дуга между точкой и кругом тем более, чем она ближе к противоположному перпендикулу, который измеряет самое большое расстояние до круга и бывает всегда* $> \frac{1}{2}\pi$.

Пусть ABC — полкруга (чер. 70), на котором стоит еще половина круга CDA перпендикулярно, так что часть его $DA < \frac{1}{2}\pi$, другая $CD > \frac{1}{2}\pi$. Вершину перпендикула DA с какой-нибудь точкой B на первом полукруге соединяем дугой DB. Составится прямоугольный треугольник DBA, где бока $BA < \pi$, $AD < \frac{1}{2}\pi$, угол $DBA < \frac{1}{2}\pi$ (ст. 75), следовательно, бока $DB > DA$ (ст. 76). Теперь, когда возьмем другую точку B' на том же полукруге ABC, но далее, нежели B от A, то произойдет $\triangle BDB'$, где углы $DBB' > \frac{1}{2}\pi$, $DB'B < \frac{1}{2}\pi$; следовательно, $B'D > BD$. Таким образом, дуга BD растет, подвигаясь от A по кругу до противоположной

* Следует доказать, что неравенство $a+b > c$ имеет место при $c < \pi$. Но доказательство достаточно провести при условии $a < \pi$, $b < \pi$ (ибо в противном случае неравенство очевидно), что и делает Лобачевский.

точки C, которой расстояние CD до точки D самое большое делается перпендикулярным к кругу CBA.

Это предложение непосредственно заключается в одном из тех, которые были доказаны выше (ст. 66); но здесь можем прибавить еще новое. *Кратчайшее расстояние до круга бывает вместе самый меньший угол, который из данной точки дуга делает с кругом** . Пусть DB'' — дуга, перпендикулярная к DA, встречает круг ABC в точке B''; а потому $DB'' = \frac{1}{2}\pi, AB'' = \frac{1}{2}\pi$, угол $DB''A$ равен дуге AD (ст. 43). Теперь в $\triangle DBB''$◇ сумма боков $DB + DB'' < \pi$△, следовательно, углы $DBA > DB''A$ (ст. 74). В $\triangle DB''B'$○, напротив, $DB' + DB'' > \pi$, следовательно, углы $DB''A < DB'A$ (ст. 74).



Чер. 70

Отсюда следует. *Если в прямоугольном сферическом треугольнике катет* $< \frac{1}{2}\pi$, *то другой вместе с гипотенузой бывает* $< \frac{1}{2}\pi$, $= \frac{1}{2}\pi$, $> \frac{1}{2}\pi$. *Если же катет* $> \frac{1}{2}\pi$, *то другой или менее* $\frac{1}{2}\pi$, *когда гипотенуза* $> \frac{1}{2}\pi$, *или равен* $\frac{1}{2}\pi$ *вместе с гипотенузой, или, наконец, более* $\frac{1}{2}\pi$, *когда гипотенуза* $< \frac{1}{2}\pi$.

---

* Иначе: кратчайшее расстояние на сфере от данной точки до данного большого круга равно наименьшему из углов, образованных дугами больших кругов, проходящих через данную точку, с данным большим кругом.

◇ Где B — точка на дуге B''

△ Согласно началу ст. 78, $DB < DB''$, а $DB'' = \frac{\pi}{2}$.

○ Где B' — точка на дуге $B''C$.

В $\triangle DB'A$ катет $DA < \frac{1}{2}\pi$, другой $AB' > \frac{1}{2}\pi$, гипотенуза $DB' > \frac{1}{2}\pi$. В $\triangle DCB'$ катет $DC > \frac{1}{2}\pi$, другой $CB' < \frac{1}{2}\pi$, гипотенуза $DB' > \frac{1}{2}\pi$ и т. д.

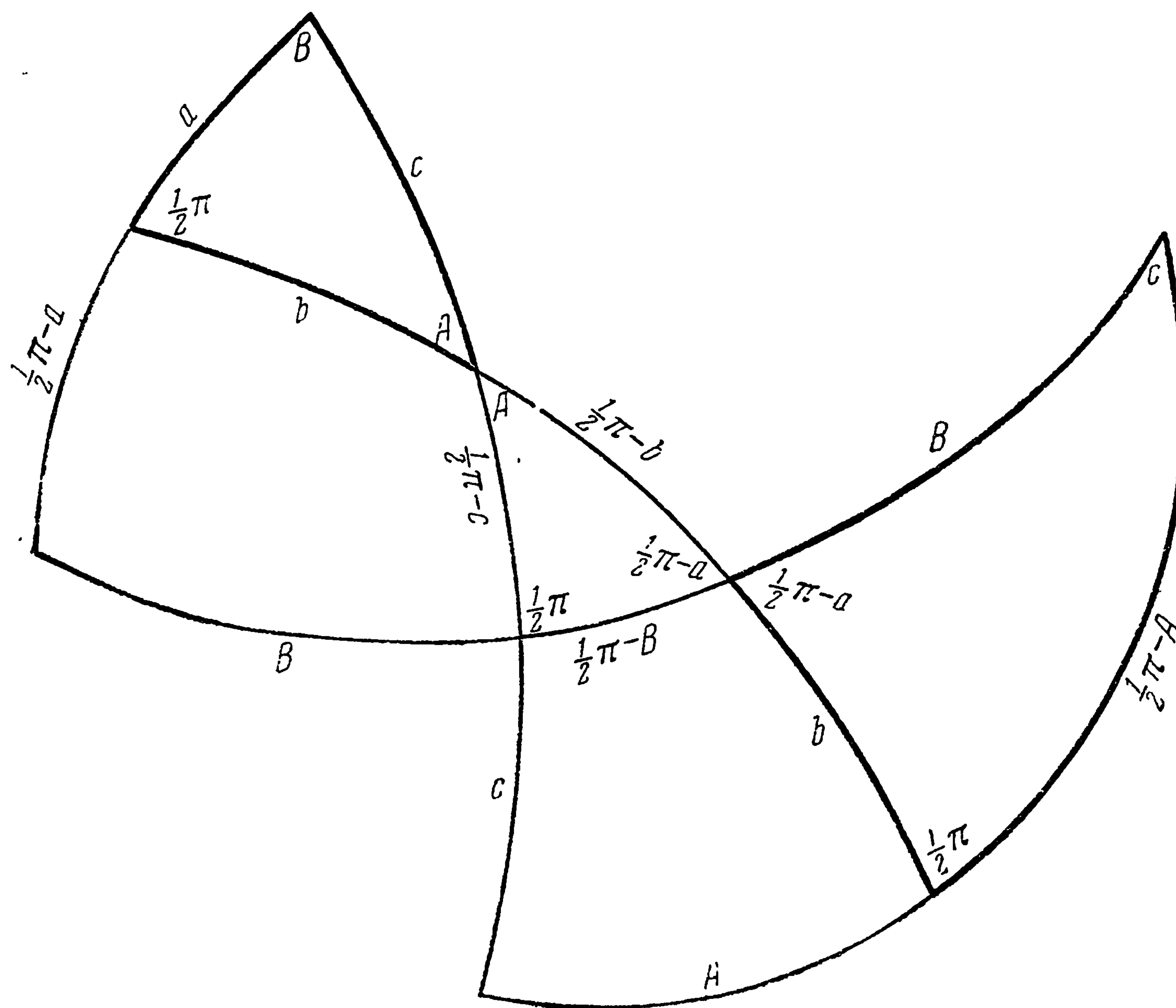
79. *Когда в сферическом треугольнике каждый бок менее полкруга, то можно составить треугольник, где бока будут дополнениями до полкруга к углам в данном, и, наоборот, углы дополнениями к бокам в данном.*

Предложение состоит в том, что, когда $a < \pi$, $b < \pi$, $c < \pi$ — бока в треугольнике; A, B, C — им противоположные углы, то можно составить треугольник, где $\pi - A$, $\pi - B$, $\pi - C$ бока, $\pi - a$, $\pi - b$, $\pi - c$ углы против них.

Заметим, что, когда составлен треугольник из боков A, B, $\pi - C$ с углами против них a, b, $\pi - c$, то стоит только продолжать бока A, B по другую сторону бóка $\pi - C$ до встречи друг с другом, чтобы получить треугольник с боками $\pi - A$, $\pi - B$, $\pi - C$ и углами против них $\pi - a$, $\pi - b$, $\pi - c$. От этого последнего треугольника переходим обратно к треугольникам: или с боками A, $\pi - B$, C и с углами против них a, $\pi - b$, c; или с боками $\pi - A$, B, C и с углами против них $\pi - a$, b, c.

Полагаем наперед $C = \frac{1}{2}\pi$, $a < \frac{1}{2}\pi$, $b < \frac{1}{2}\pi$, следовательно, $c < \frac{1}{2}\pi$ (ст. 78). Продолжаем a, c по другую сторону b, покуда продолжения сделаются $\frac{1}{2}\pi - a$, $\frac{1}{2}\pi - c$ (чер. 71), которых концы соединяем дугой B. Теперь продолжаем дуги b, B по другую сторону $\frac{1}{2}\pi - c$ до взаимной встречи. Здесь составится прямоугольный треугольник с гипотенузой $\frac{1}{2}\pi - b$, катетами $\frac{1}{2}\pi - c$, $\frac{1}{2}\pi - B$, с углами против них $\frac{1}{2}\pi - a$, A. В этом треугольнике продолжаем бока $\frac{1}{2}\pi - b$, $\frac{1}{2}\pi - c$ по другую сторону бока $\frac{1}{2}\pi - B$, делаем продолжения b, c и соединяем их концы дугой A, которую ведем далее

вместе с боком $\frac{1}{2}\pi - B$ по другую сторону b, покуда, встретясь, составят прямоугольный треугольник с гипотенузой B, катетами b, $\frac{1}{2}\pi - A$, с углами против них c, $\frac{1}{2}\pi - a$. Не нужно принимать в рассуждение самое направление, в котором следуют здесь бока друг за другом, потому что направление

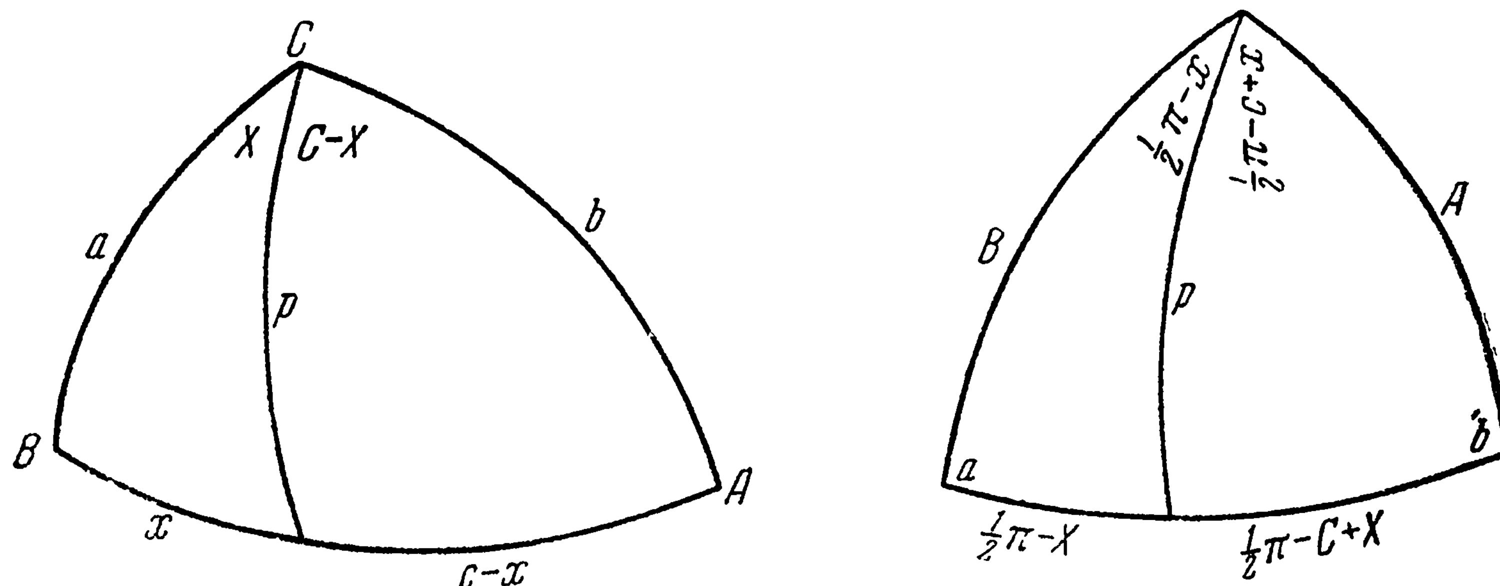


Чер. 71

переменяется всегда в противное с переходом треугольника в оборотный (ст. 44).

Пусть, вообще, $a < \frac{1}{2}\pi$, $b < \frac{1}{2}\pi$, $c < \pi$ (чер. 72). В таком треугольнике должны найтись два угла острых (ст. 74) [61], например A, B, которые по необходимости таковы в случае

$c > a$, $> b$. Из острия C ведем перпендикул $p < \frac{1}{2}\pi$ к боку c, который разделится, таким образом, на две части: x под a, $c - x$ под b (ст. 75); против частей X, $C - X$ в угле C. Заметим к этому, что здесь $x < \frac{1}{2}\pi$, $c - x < \frac{1}{2}\pi$ (ст. 78),

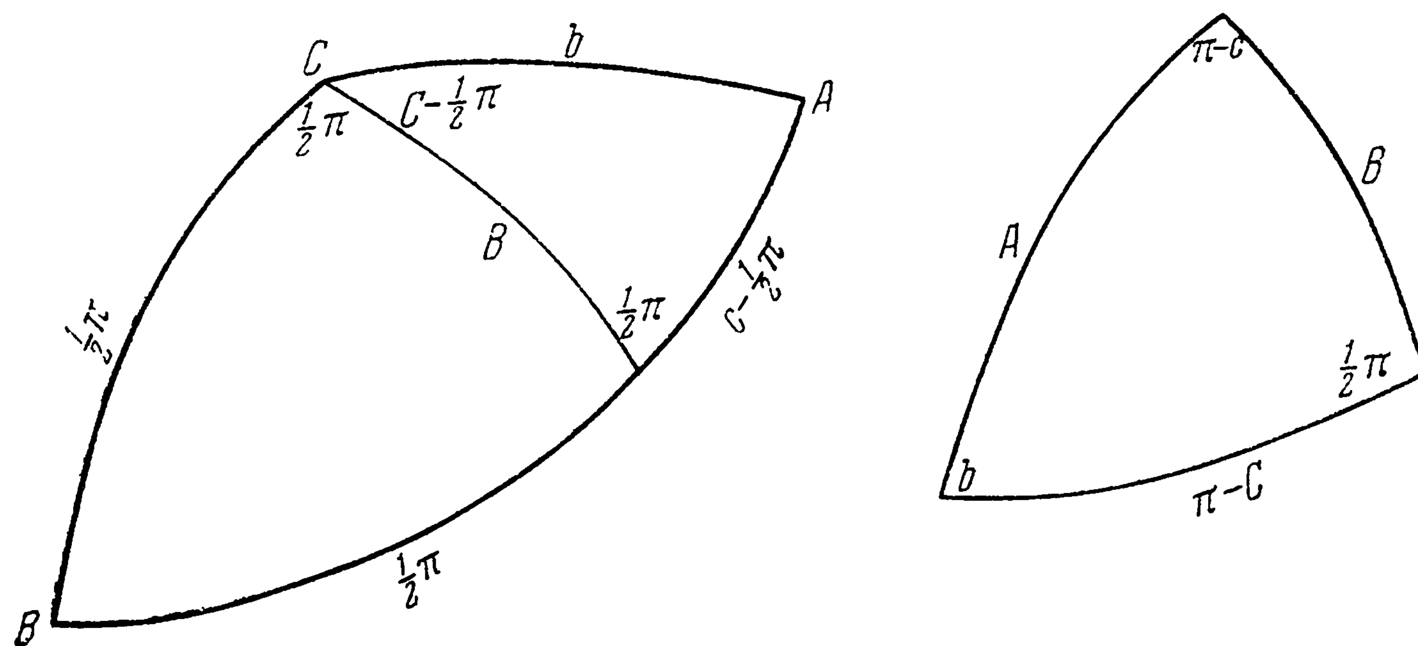


Чер. 72

также $X < \frac{1}{2}\pi$, $C - X < \frac{1}{2}\pi$ (ст. 75). Основываясь на доказанном впереди, можем составить два прямоугольных треугольника: в одном катеты p, $\frac{1}{2}\pi - X$, против них углы a, $\frac{1}{2}\pi - x$, гипотенуза B; в другом катеты p, $\frac{1}{2}\pi - C + X$, против них углы b, $\frac{1}{2}\pi - c + x$, гипотенуза A. Прикладывая треугольник к другому катетом p, получим такой, где бока A, B, $\pi - C$, углы против них a, b, $\pi - c$. От этого треугольника переходим, как заметили выше, к другому, где бока будут $\pi - A$, $\pi - B$, $\pi - C$, углы против них $\pi - a$, $\pi - b$, $\pi - c$, так же, как можем составить треугольник с боками A, $\pi - B$, C и с углами $a, \pi - b$, c; или с боками $\pi - A, B, C$, с углами против них $\pi - a$, b, c; так что все вновь составленные здесь треугольники должны допускать, как скоро в данном найдутся два бока, каждый $< \frac{1}{2}\pi$, лишь бы третий был $< \pi$.

Пусть $a = \frac{1}{2}\pi$, $b < \pi$, $c = \frac{1}{2}\pi$, следовательно, $A = \frac{1}{2}\pi$,

$C=\frac{1}{2}\pi$, $B=b$. Продолжив a, b по другую сторону c до пересечения, получим здесь треугольник, где бока $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$, $\pi-B$; углы против них $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$, $\pi - b$. Предложение, таким образом, в этом случае поверяется.



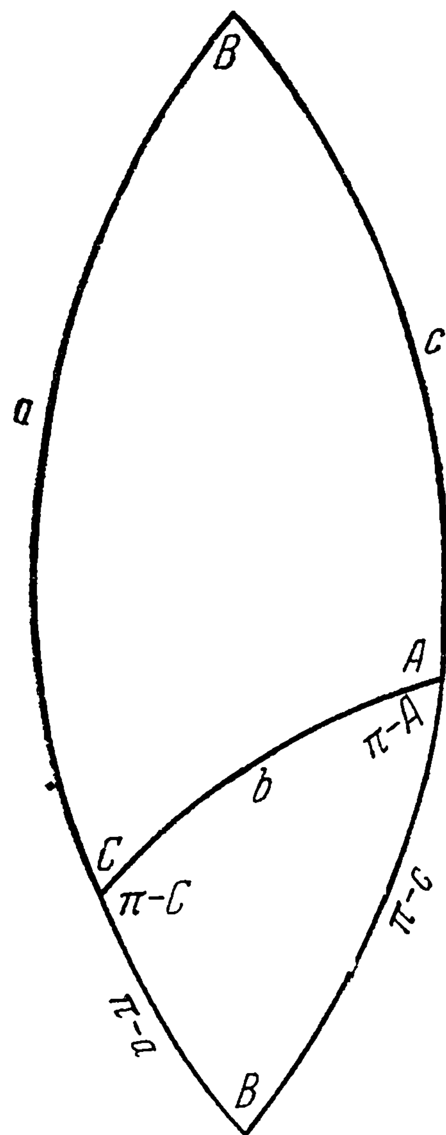
Чер. 73

Пусть $a=\frac{1}{2}\pi$, $b<\frac{1}{2}\pi$, $c>\frac{1}{2}\pi$, $<\pi$. На бок c полагаем от острия B дугу $\frac{1}{2}\pi$ (чер. 73), которой конец соединяем с острием C. Составится треугольник, где бока b, B, $c-\frac{1}{2}\pi$; против них углы $\frac{1}{2}\pi$, A, $C-\frac{1}{2}\pi$. К тому здесь $c-\frac{1}{2}\pi<\frac{1}{2}\pi$, $B<\frac{1}{2}\pi$, $A<\frac{1}{2}\pi$ (ст. 75); следовательно, может быть и такой прямоугольный треугольник, где гипотенуза A, катеты B, $\pi-C$ с углами против них b, $\pi-c$*. Продолжив A, B по другую сторону $\pi-C$ до пересечения, получим треугольник с боками $\pi-A$, $\pi-B$, $\pi-C$ и с углами против них $\frac{1}{2}\pi$, $\pi-b$, $\pi-c$.

---

* Здесь по прямоугольному треугольнику ACD найден другой прямоугольный треугольник, согласно вспомогательному предложению настоящей статьи (стр. 192—193).

Пусть $a > \frac{1}{2}\pi$, $< \pi$; $b < \pi$; $c > \frac{1}{2}\pi$, $< \pi$. Продолжаем a, c до пересечения по другую сторону b. Произойдет треугольник (чер. 74) с боками $\pi - a < \frac{1}{2}\pi$, $b < \pi$, $\pi - c < \frac{1}{2}\pi$, с углами против них $\pi - A$, B, $\pi - C$. От этого треугольника можем, следовательно, перейти к другому с боками A, $\pi - B$, C и с углами против них a, $\pi - b$, c; потом к треугольнику с боками $\pi - A$, $\pi - B$, $\pi - C$, с углами против них $\pi - a$, $\pi - b$, $\pi - c$.



Чер. 74

Так предложение доказано во всех случаях для боков $a < \pi$, $b < \pi$, $c < \pi$ [62]. Отсюда легко заключить, что *в таком треугольнике сумма всех боков бывает всегда менее полного круга* (ст. 68)*.

80. *Поверхность сферического треугольника всегда менее самого меньшего бока, когда сумма каждых двух менее полукруга*◊.

В $\triangle ABC$ (чер. 75) пусть из трех боков a, b, c в случае неравенства c — самый больший, a — самый меньший, или вообще c не менее, a — не более других; притом сумма каждых двух $< \pi$, а следовательно, против a, b углы A, B острые (ст. 74)△. Перпендикул p из острия C к боку c менее $\frac{1}{2}\pi$ (ст. 75) и делит c на две части: x под b, $c - x$ под a (ст. 75); далее b с x, a с $c - x$ менее четверти

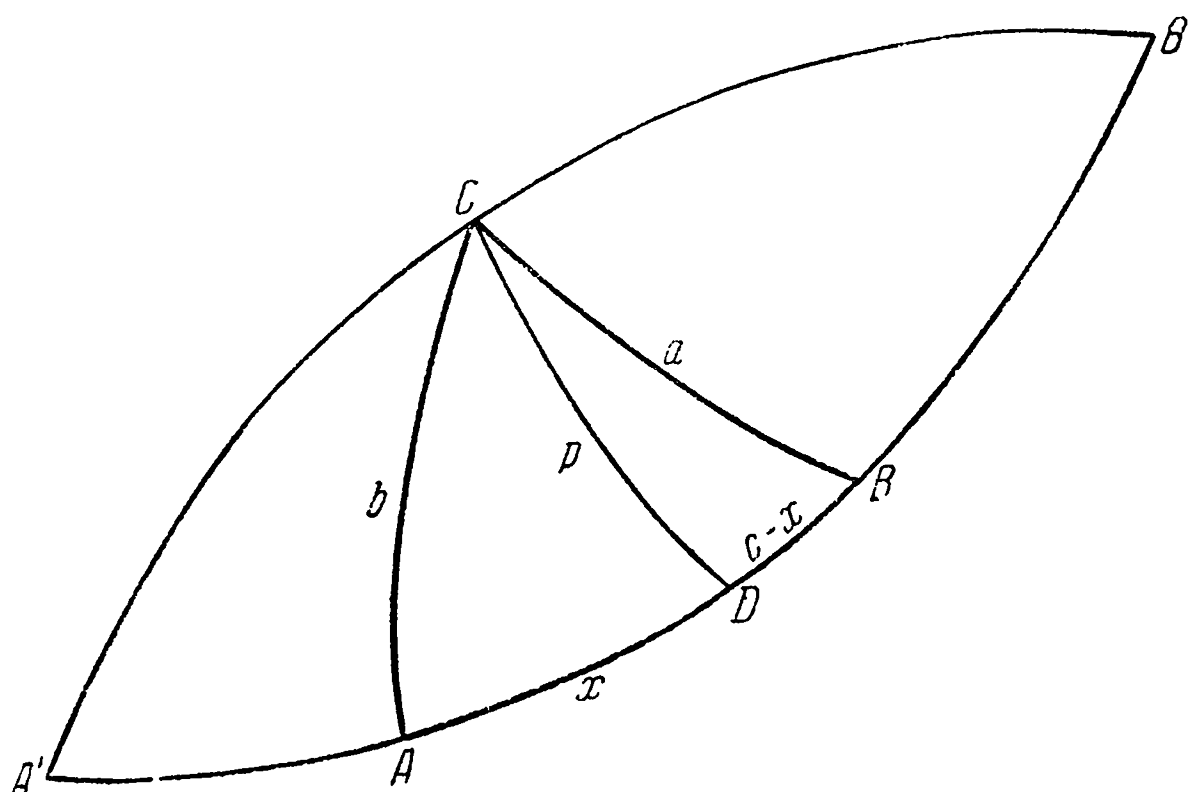
* Из ст. 68 имеем, что сумма углов сферического треугольника больше π. Рассмотрев, согласно ст. 79, треугольник с углами $\pi - a$, $\pi - b$, $\pi - c$, находим

$$\pi - a + \pi - b + \pi - c > \pi, \quad a + b + c < 2\pi.$$

◊ Формулировка предложения ст. 80 предполагает, что введены согласованные по Лобачевскому единицы измерения линейных и телесных углов (ст. 39).

△ См. примечание [61].

круга*; $a > p$ (ст. 78). Два полукруга, $A'ABB'$, $A'CB'$, перпендикулярные к p в концах, ограничивают вырезок, которого поверхность p и в котором помещается данный треугольник ABC, следовательно, поверхность этого треугольника менее p, тем еще менее, нежели a. Итак, с уменьшением одного бока, когда сумма двух других $<\pi$, поверхность уменьшается в треугольнике беспредельно, а сумма всех углов подходит к π так близко, как угодно.



Чер. 75

С уменьшением двух боков уменьшается третий бок беспредельно, потому что сумма двух первых делается более последнего, а сумма каждых двух становится, наконец, постоянно $<\pi$. Отсюда заключаем, что с уменьшением двух боков поверхность треугольника может быть сделана как угодно малой, а сумма в нем углов — как угодно близкой к π.

---

* Каждый в отдельности.

Глава VI

ОДИНАКОВОСТЬ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

81. Одинаковость двух треугольников требует как одинакового расположения, так равенства всех углов и боков в одном с углами и боками в другом. Однако ж иногда, при том же расположении, равенство только некоторых *частей* — так будем называть, вообще, в треугольниках и многоугольниках бока с углами — предполагает уже равенство прочих и производит одинаковость самых треугольников. Исследование подобных случаев составляет предмет этой главы, где для краткости будем всегда говорить, каких и сколько частей дается равных, разумея, собственно, что все такие части в одной фигуре равны таким же частям в другой. Различая к тому фигуры буквами, станем одинаковость выражать знаком $\backsimeq$.

В прямолинейном многоугольнике все равно, какому направлению ни следуют бока в своем порядке, потому что направление переходит одно в другое с обращением плоскости на противоположную сторону. В сферических многоугольниках это направление меняется в переходе к оборотному многоугольнику, который отвечает вершинному телесному углу, когда плоскости продолжаются через центр сферы. Говоря здесь об одинаковости, будем, однако ж, из двух оборотных многоугольников без различия брать один вместо другого*.

* Таким образом, на сфере Лобачевский называет одинаковыми как фигуры, совмещаемые вращением вокруг центра, так и симметричные относительно центра, которые, вообще говоря, вращением совмещены быть не могут.

Составление многоугольников, прямолинейных и сферических, представляем себе, когда прикладываем всякий раз под известным углом один бок за другим покуда, наконец, последний сомкнется с первым. Бока с углами, таким образом, должны быть те существенные части, которые производят одинаковость и с ней определяют все прочие принадлежности, так же как и все, вообще, свойства многоугольника. Ясно, что последний из боков с его наклонениями к двум соседним в многоугольнике определяется величиною всех других углов и боков.

Составление многоугольников, из его боков с углами по порядку, приводит, таким образом, к предложениям:

Многоугольники одинаковы, когда в числе всех n боков будут $n - 1$ равных с $n - 2$ углами при них.

Многоугольники одинаковы, когда в числе всех n боков, $n - 2$ равных с $n - 1$ углами при них.

О треугольниках прямолинейных и сферических в особенности должно сказать:

Треугольники одинаковы, когда два бока с углом между ними равны.

Треугольники одинаковы, когда бок с углами при нем равны. Отсюда следует:

Прямоугольные треугольники одинаковы, когда катеты равны, потому что равенство прямых углов подразумевается.

Прямоугольные треугольники одинаковы, когда катет и при нем угол равны.

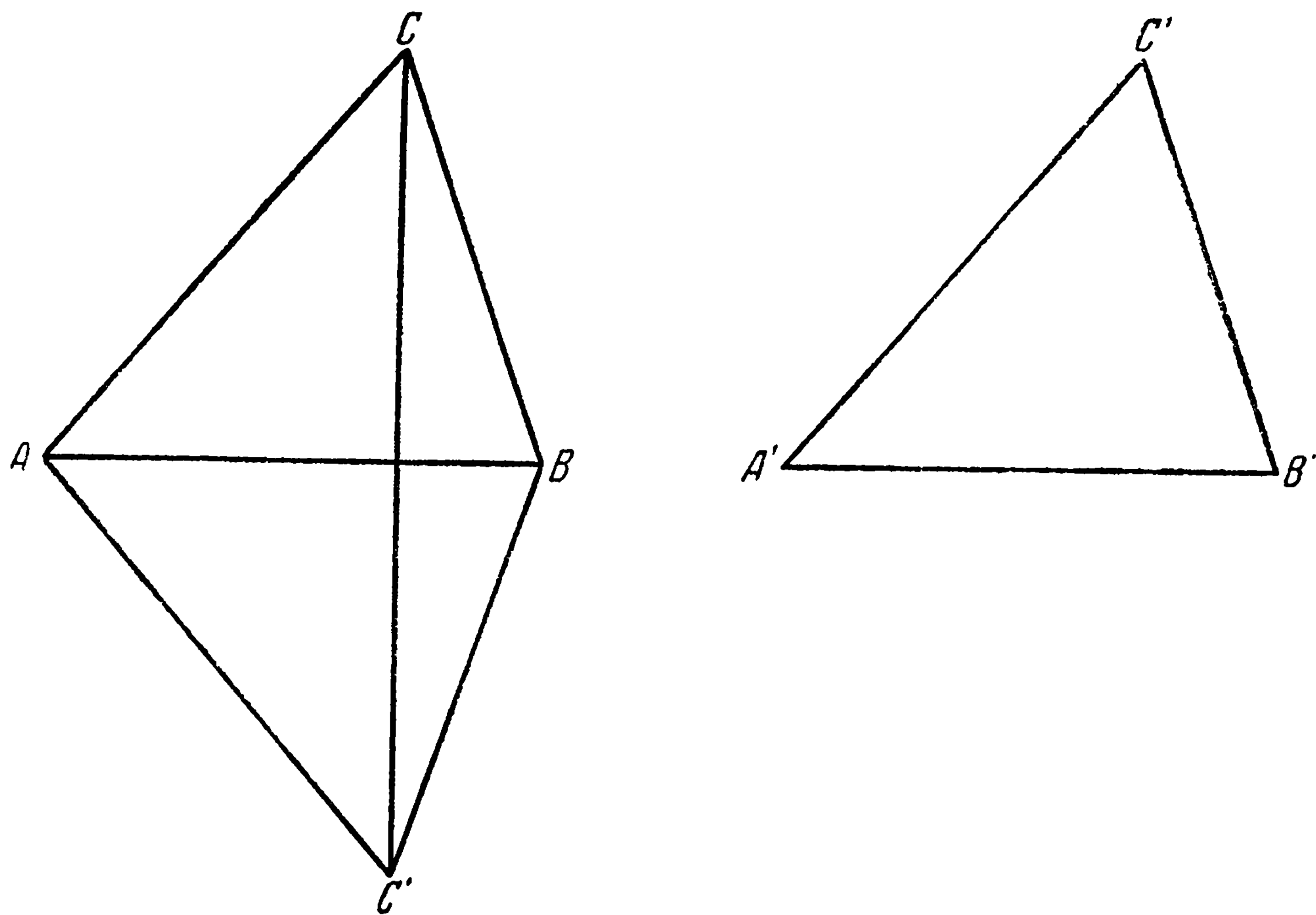
В круге против равных хорд углы равны, потому что равенство полупоперечников дополняет здесь одинаковость треугольников*.

82. *Прямолинейные треугольники одинаковы, когда три бока равны.*

---

* Эту теорему следовало бы поместить после ст. 82, так как доказательство ее опирается на признак конгруэнтности треугольников по трем сторонам. Возможно также, что произошла описка,— что Лобачевский высказывал обратную теорему: *в круге против равных углов хорды равны.*

В треугольниках ABC, $A'B'C'$ (чер. 76) предполагаем бока $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$. Пусть AB тот из них, при котором углы A, B острые (ст. 49). Прикладываем $\triangle A'B'C'$ к $\triangle ABC$, боком $A'B'$ к равному с ним AB, точкой A' в A, B' в B. Соединяем теперь острия C, C' линией, которая должна проходить между концов A, B перпендикулярно к боку AB,



Чер. 76

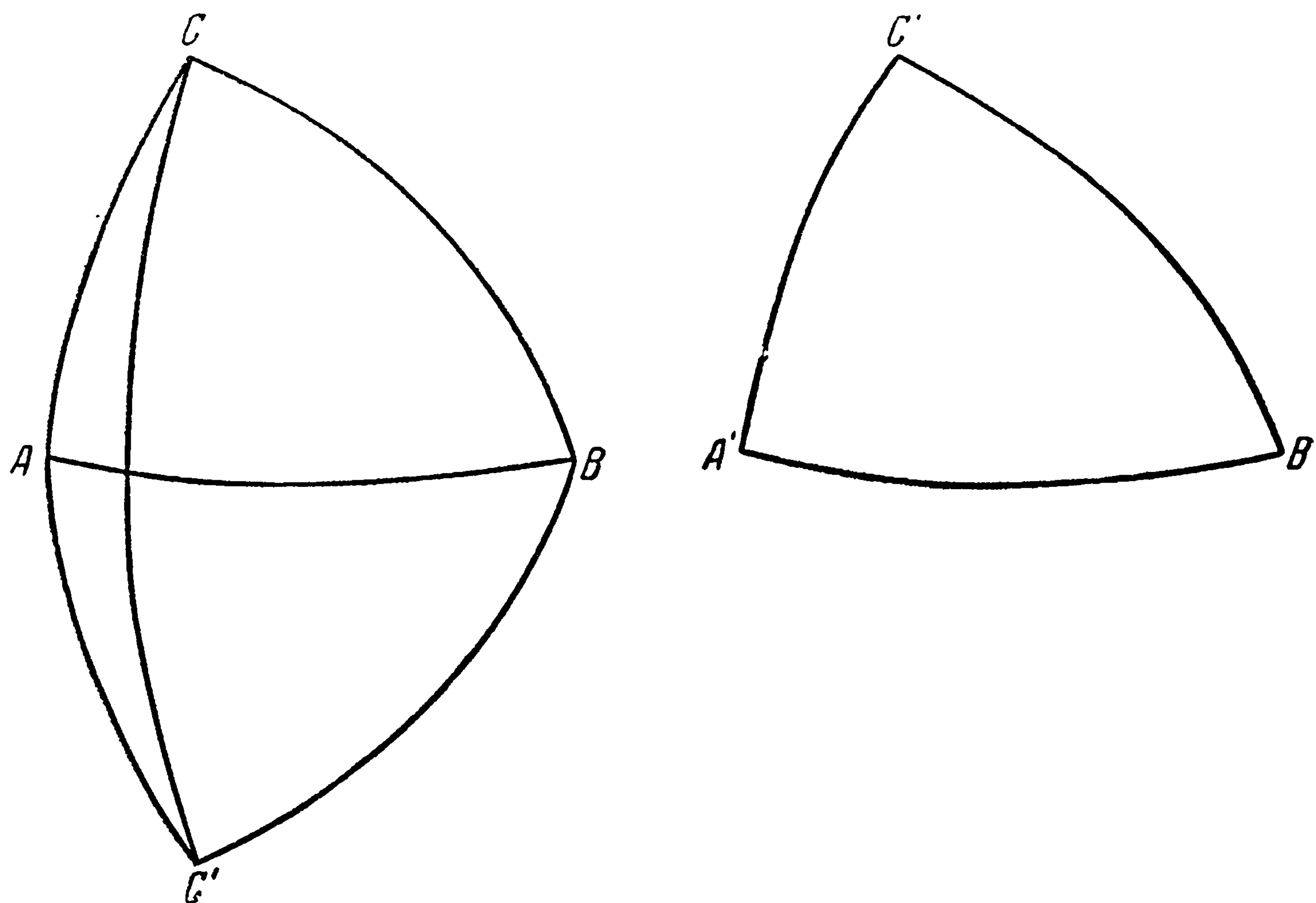
потому что служит основанием в двух равнобедренных треугольниках ACC', BCC', где бок AB проходит чрез вершины (ст. 52). В треугольниках ACB, $AC'B$ углы при точках C, C' равны, составляясь из равных частей (ст. 50), следовательно, самые треугольники одинаковы (ст. 81): это значит $\triangle ACB \backsim \triangle A'C'B'$.

83. *Сферические треугольники одинаковы, когда три бока равны.*

В треугольниках ABC, $A'B'C'$ (чер. 77) полагаем бока $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$. Прикладываем $\triangle A'B'C'$ к $\triangle ABC$ точкой A' в A, B' в B*, потом острия C, C' соединяем

* Предполагается, что C и C' расположатся по разные стороны AB. Если этого нет, то нужно вместо одного из треугольников рассмотреть симметричный ему.

дугою, которая пусть пересекает бок AB. Составятся два равнобедренных треугольника ACC', BCC', где при точках C, C' углы равны (ст. 64), следовательно, в треугольниках ACB, $AC'B$ тоже как и всякий раз, будет ли дуга проходить внутри треугольников или вне (чер. 78), или, наконец, сливаясь с одним из боков (чер. 79). Во всех случаях делается $\triangle ABC \backsimeq ABC' \backsimeq A'B'C'$ (ст. 81).



Чер. 77

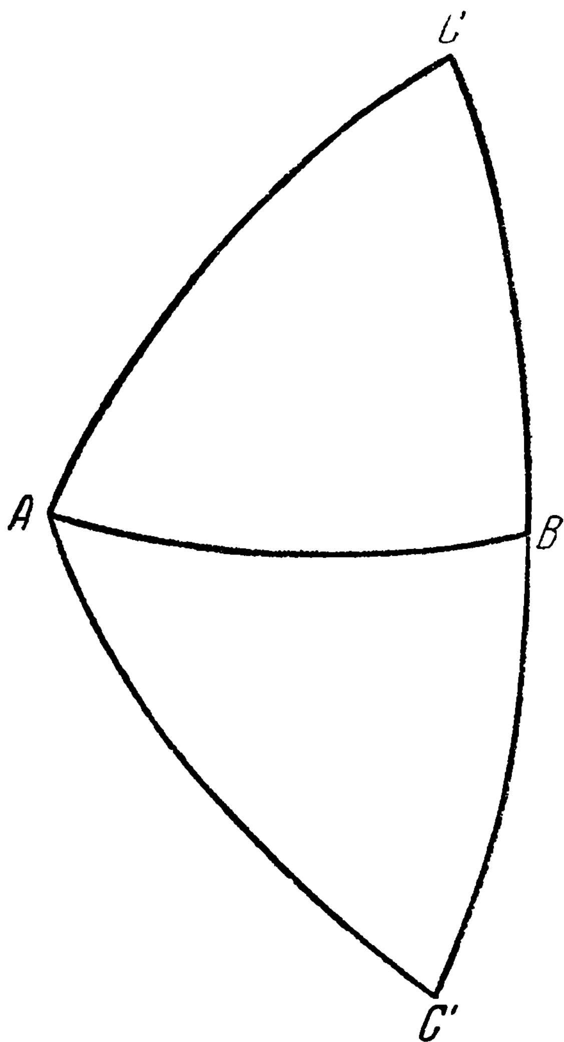
84. *Прямолинейные треугольники одинаковы, когда равны два бока с углом против большего.*

Пусть в треугольниках ABC, $A'B'C'$ (чер. 80) бока $BC = B'C'$, $AC = A'C'$, $AC > BC$, углы $B = B'$. Полагаем $\triangle A'B'C'$ на $\triangle ABC$ меньшим боком $B'C'$ на BC, точкой B' в B, C' в C. Тогда бок $A'B'$, следуя направлению BA, должен окончиться в A, потому что точка A' не может быть ни по ту, ни по другую сторону. Иначе составился бы $\triangle ACA'$, равнобедренный с острыми углами при основании AA', из которых к одному смежный тупой принадлежал бы треугольнику ABC, либо

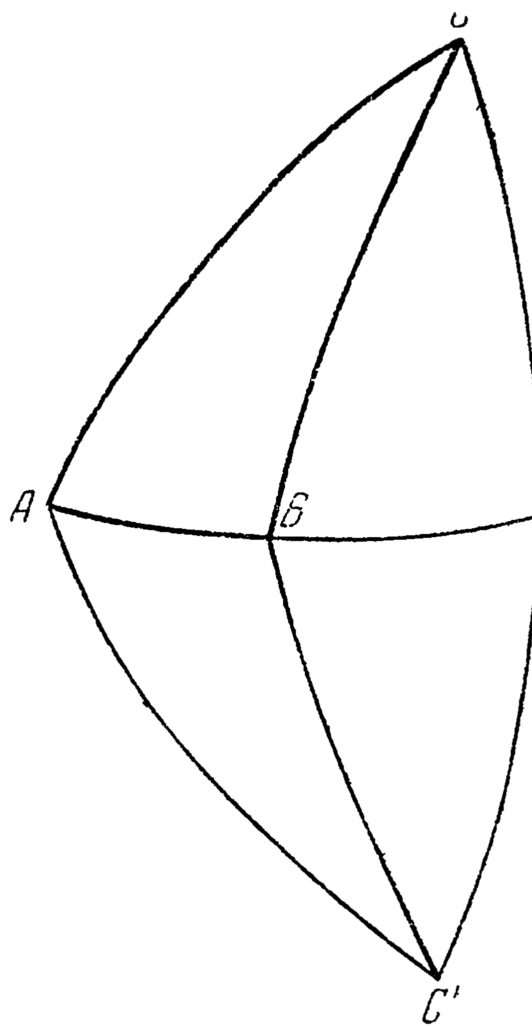
треугольнику $A'BC$, где был бы вместе самым большим углом (ст. 49), тогда как он лежит против меньшего бока BC, либо $B'C'$ (ст. 54).

Отсюда следует, что *прямоугольные треугольники одинаковы, когда катет и гипотенуза равны*, потому что прямой угол не только равен, но лежит еще против большего бока.

85. *Прямолинейные треугольники одинаковы, когда равны два бока с углом против меньшего; притом оба треугольника вместе остроугольные, либо тупоугольные**.



Чер. 78

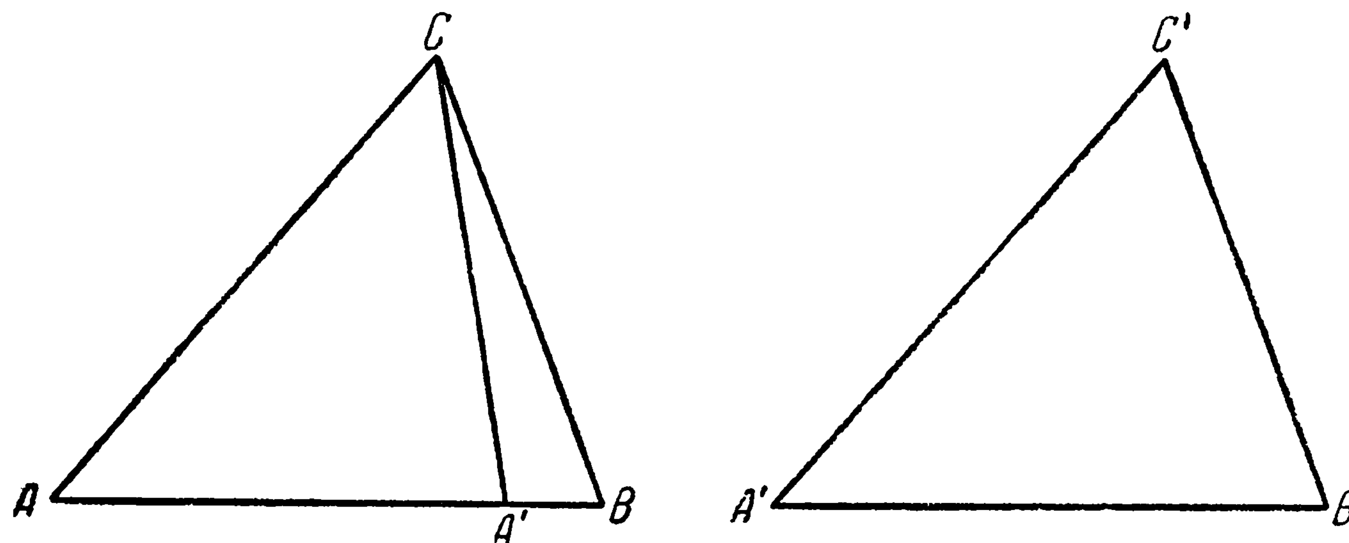


Чер. 79

Пусть в треугольниках ABC, $A'B'C'$ (чер. 81) бока $AC = A'C'$, $BC = B'C'$, $AC > BC$, углы $A = A'$. Должно предполагать углы: либо все острые, либо который-нибудь тупой, а два других острые. В первом случае треугольники покрывают друг друга, когда переносим точкой A' в A; C' в C. Третья B' не мо-

* Вторая часть формулировки не вполне точна. Должно быть: притом в обоих треугольниках против большего из соответственно равных боков лежат вместе либо острые, либо не острые углы.

жет помещаться ни между двух A, B, ни по другую сторону B на продолжении AB. Иначе произошел бы треугольник CBB' равнобедренный с острыми углами при основании BB', из которых один был бы смежный с тупым либо в $\triangle ABC$, либо в $\triangle AB'C$.



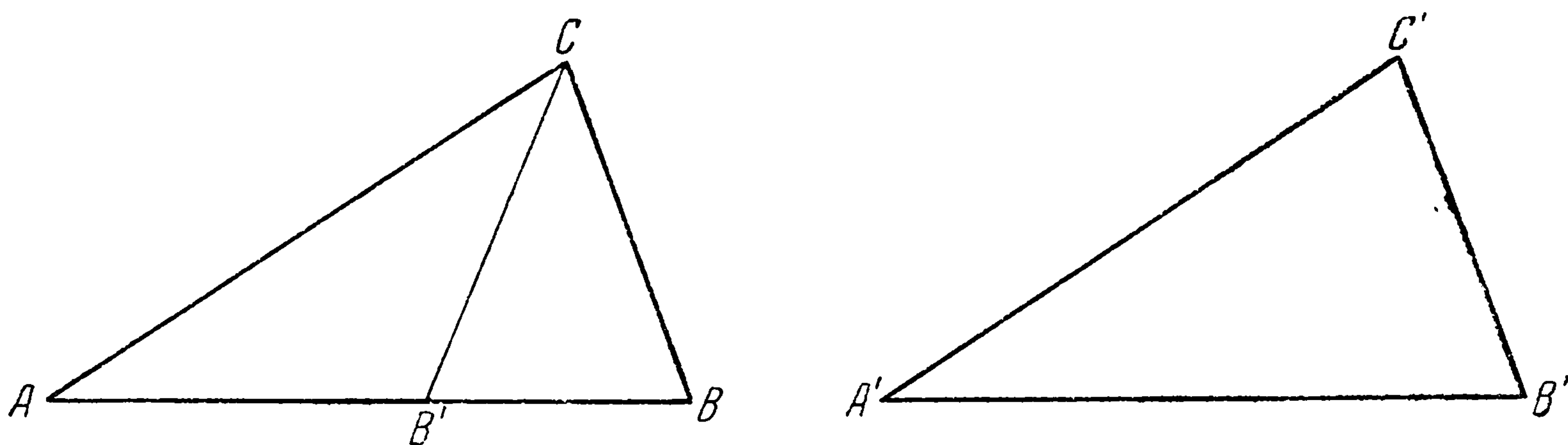
Чер. 80

Если в треугольниках ABC, $A'B'C'$ один угол тупой, так он должен быть против самого большого бока, следовательно, либо против $AC = A'C'$, либо против AB и $A'B'$. В том и другом случае при наложении треугольников точка B' не может приходить в другое место, кроме B, чтобы не составился равнобедренный треугольник BCB', в котором один из острых углов принадлежит либо треугольнику ABC против AC, либо треугольнику $AB'C$ против AC, либо производит смежный угол тупой в данном треугольнике, сверх тупого угла при точках C, C'.

Итак, если треугольники ABC, $A'B'C'$ не должны быть одинаковы, хотя в них бока $AC = A'C'$, $BC = B'C'$, $\angle A = \angle A'$, то разность их произойти может от того только, что в одном против большего бока тупой угол, тогда как в другом острый. Пусть, например, угол $B < \frac{1}{2}\pi$ в $\triangle ABC$, тогда как $AC > BC$. Описывая круг около C полупоперечником CB, находим еще точку B' пересечения между концов A, B (ст. 51). Так составится треугольник $AB'C$, который должен быть одинаков с $A'B'C'$ и где, следовательно, B' тупой угол.

86. *Сферические треугольники одинаковы, когда равны два бока с углом против равных боков, но под условием чтобы углы против других равных боков были вместе* $<\frac{1}{2}\pi$, $=\frac{1}{2}\pi$, $>\frac{1}{2}\pi$ *.

Пусть в треугольниках ABC, $A'B'C'$ (чер. 82) бока $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $\angle A = \angle A'$. Полупоперечником BC чертим на сфере круг около точки B◊. Он может коснуться дуги AC в одной только точке C, либо, кроме C, пересекать еще в одной тот круг, которого AC составляет часть (ст. 66)△. В первом слу-



Чер. 81

чае BC перпендикулярна к AC так же, как и в $\triangle A'B'C'$ бок $B'C'$ к $A'C'$. В другом случае, будет ли точка пересечения C' между концов A, C или в C'' на продолжении AC через острие C, всегда произойдет равнобедренный треугольник BCC' или BCC'', где углы при основании равны. Далее, треугольник ABC' не может быть одинаков с $\triangle A'B'C'$, потому что, когда угол $B'C'A' = BC'A$, то $\angle B'C'A' + \angle BCA = \angle BC'A + \angle BCA = \pi$. Треугольник $A'B'C'$ также не может быть одинаков с $\triangle ABC''$, потому что как скоро $\angle B'C'A' = \angle BC''A$, то $\angle B'C'A' + \angle BCA = \angle BC''A + \angle BCA = \pi$. Остается необходимой одинаковость только треугольников $A'B'C'$ с ABC.

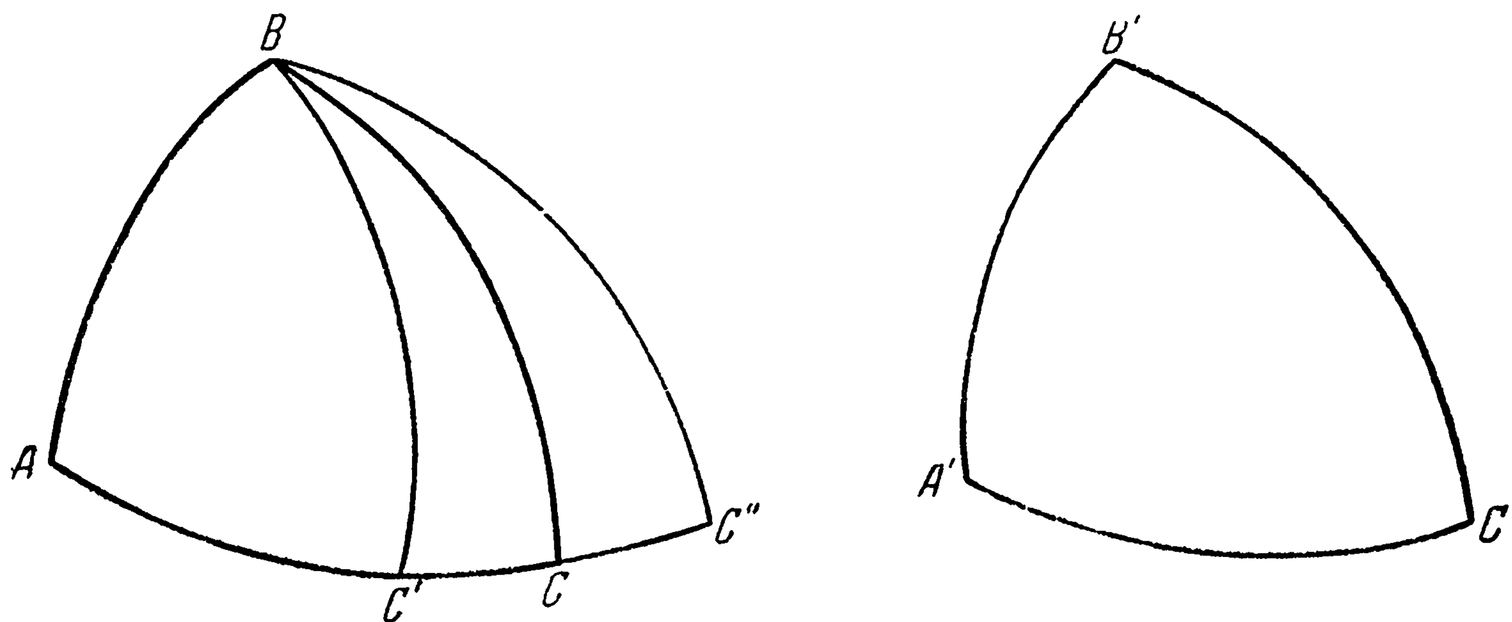
* Чтобы эта теорема была верна, нужно еще потребовать, чтобы соответственно равные стороны треугольников не были обе перпендикулярны к третьей, т. е. чтобы вершина, через которую проходят эти стороны, не являлась полюсом третьей стороны, что возможно во втором случае.

◊ Этот круг будет малым, если только дуга BC не равна $\frac{\pi}{2}$.

△ Либо совпадать с ним, когда B — полюс дуги AC.

Отсюда следует *одинаковость треугольников, когда равны два бока с углом прямым или тупым против одного из этих боков, которых сумма предполагается менее полкруга*, потому что против другого бока в обоих треугольниках должен быть острый угол (ст. 74)*.

87. *Прямолинейные треугольники одинаковы, когда равны бок, при нем угол и другой против него.*



Чер. 82

Пусть в треугольниках ABC, $A'B'C'$ (чер. 81) бок $AC = A'C'$, углы $A = A'$, $B = B'$. Когда переносим $\triangle A'B'C'$ на $\triangle ABC$ равными боками $AC = A'C'$, точкой A' в A, то бок $A'B'$ пойдет по направлению AB и должен окончиться в точке B. Иначе составится треугольник BCB', где один из равных углов B, B' будет при линии BB' внутренний, а другой внешний, который, однако ж, всегда более внутреннего (ст. 53).

Итак, *прямоугольные треугольники одинаковы, когда равны гипотенуза с одним острым углом, либо катет с противоположным углом*, потому что равенство прямых углов дополняет одинаковость.

88. *Сферические треугольники одинаковы, когда в них равны: бок, при нем угол и другой против него, под условием, чтобы*

* Третья сторона в обоих треугольниках предполагается $<\pi$ (ст. 74 и сноска* на стр. 186).

сумма двух других боков против равных углов не составляла полкруга.

Пусть в треугольниках ABC, $A'B'C'$ (чер. 82) бок $AB = A'B'$, углы $A = A'$, $C = C'$. Когда полагаем $\triangle A'B'C'$ на $\triangle ABC$ равными боками $A'B'$ на AB, то бок $A'C'$, начинаясь в A, пойдет по AC* и не может оканчиваться ни в C' по сю, ни в C'' по ту сторону точки C на продолжении AC. Иначе составится либо треугольник CBC', либо CBC'', где по равенству углов внешнего с внутренним при дуге AC'' надобно, чтобы сумма противоположных боков, следовательно, $BC + B'C'$ составляла π (ст. 74).

Если притом угол $C = \frac{1}{2}\pi$, следовательно, $C' = \frac{1}{2}\pi$, то треугольники BCC', BCC'', делаясь равнобедренными, требуют, чтобы $BC = B'C' = \frac{1}{2}\pi$, также $AB = A'B' = \frac{1}{2}\pi$, наконец, угол $A = A' = \frac{1}{2}\pi$ (ст. 62). Итак, *прямоугольные сферические треугольники одинаковы, когда равны гипотенуза с одним острым углом.*

89. *Сферические треугольники одинаковы с тремя равными углами.*

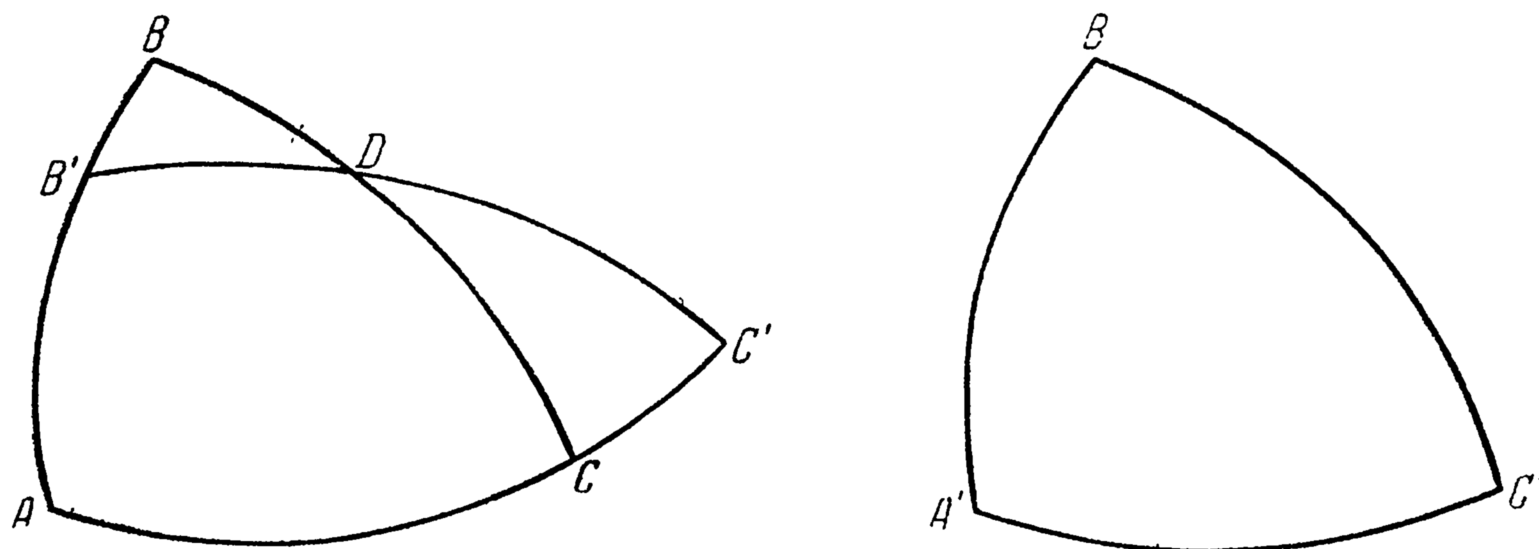
Пусть в треугольниках ABC, $A'B'C'$ (чер. 83) углы $A = A'$, $B = B'$, $C = C'$. Это предполагает поверхности треугольников равные (ст. 68), следовательно, когда переносим $\triangle A'B'C'$ на $\triangle ABC$ боками двух равных углов, например углов A, A'◊, то неодинаковость треугольников требует, чтобы каждый выходил частию вон из другого. Пусть $A'B' < AB$, следовательно, $A'C' > AC$, так что $B'C'$, начинаясь на боку AB внутри треугольника, пересекает BC в точке D, потом уже в точке C' встречает продолжение AC за точку C. Произойдут два треугольника

---

* Возможно, что вместо $A'B'C'$ придется рассматривать треугольник, симметричный $A'B'C'$, чтобы при наложении сторона AC и ей соответствующая пошли одна по другой.

◊ И притом так, чтобы вершины углов B, B' лежали на одной стороне (возможно, что для этого придется треугольник $A'B'C'$ заменить симметричным).

BDB', CDC', где $BD+B'D=\pi$, $CD+C'D=\pi$ (ст. 74), следовательно, $BC+B'C'=2\pi$; но как BC, $B'C'$ вместе с углом A должны быть либо $<\pi$, либо $=\pi$, либо $>\pi$ (ст. 46), можно допускать только $BC=B'C'=\pi$. Однако ж и в этом последнем случае треугольники ABC, $A'B'C'$, делаясь вырезками сферы, бывают одинаковы при равенстве плоскостных углов [63].



Чер. 83

90. *В прямолинейном треугольнике сумма всех углов не может быть* $>\pi$.

Называем в треугольнике сумму всех углов S. В случае неравенства полагаем A самый меньший или, вообще, не более двух других. Мы видели (ст. 53), что всякий треугольник ABC (чер. 47) может быть обращен в другой AFC, где сумма всех углов остается та же, тогда как сумма которых-нибудь двух $ABC+ACB$ из первого треугольника составляет один угол ACF в новом, следовательно, третий BAC переходит сюда, разделяясь на два AFC, FAC. Итак, пусть ABC — тот самый треугольник, где сумма всех углов S, затем угол $BAC=A$ не более двух других. В новом треугольнике AFC сумма всех углов опять S; один из углов при точках A, F должен быть $\leqslant \frac{1}{2}A$. Между тем в треугольнике ACF

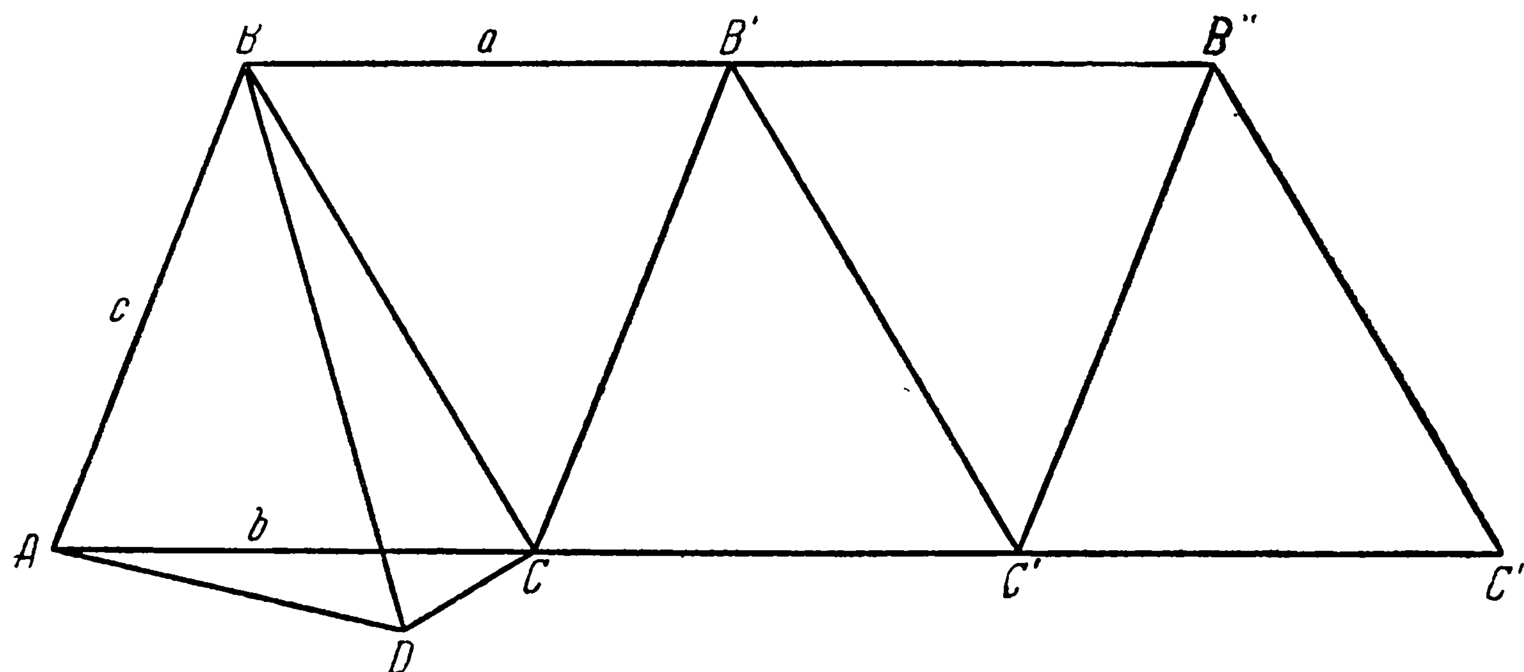
$$S=\angle ACF+\angle FAC+\angle AFC=\pi-\angle FCD+A<\pi+A.$$

Разделяя в последнем треугольнике бок пополам против угла $\leqslant\frac{1}{2}A$ и продолжая таким образом все превращать один

треугольник в другой, должны заключить вообще, что

$$S < \pi + 2^{-n} A,$$

где n — целое положительное число может быть как угодно велико, с этим вместе $2^{-n}A$ как угодно мало; после чего нельзя допускать, чтоб $S - \pi$ был какой-нибудь положительный угол, но дозволяется только принимать или $S = \pi$, или $S < \pi$.



Чер. 84

Это предложение первый доказывал Лежандр в своей Геометрии (Eléments de Géométrie)*, замечая наперед, что в треугольнике бок растет вместе с противоположным углом. Так, в $\triangle ABC$ (чер. 84) пусть бок $BC \geqslant AB$, следовательно, угол BCA острый. Даем боку BC новое положение BD, уменьшив угол ABC. Произойдут два треугольника: равнобедренный BCD с острым углом BDC, да треугольник BDA с острым углом BDA против бока AB, следовательно, сумма углов $ADB + BDC < \pi$. Это значит, что точки B, D находятся на противоположных сторонах линии AC, которая с AD и с CD составляет, таким образом, треугольник ADC, где угол $ACD = BDC - BCA < ADC$; после

* До Лежандра это предложение было доказано Саккери (1733 г.) и Ламбертом (1786 г.).

чего бок $AD < AC$ (ст. 54)*. Теперь называем b, c бока в треугольнике ABC против остриев B, C. Бок b продолжаем в одну сторону через точку C, а на продолжении кладем непрерывно b, подвигая вместе $\triangle ABC$ по направлению от A к C, так что во всех одинаковых треугольниках ABC, $CB'C'$, $C'B''C''$,... бока $AC = CC' = C'C''$..., также $AB = CB' = C'B''$...; $BC = B'C' = B''C''$...; углы $BAC = B'CC' = B''C'C''$..., $BCA = B'C'C = B''C''C'$... Соединив вершины всех этих треугольников по порядку линиями BB', $B'B''$..., получим еще треугольники BCB', $B'C'B''$..., где при точках C, C',... углы должны быть менее, нежели ABC, если предположим сумму трех углов более π в $\triangle ABC$. Тогда все бока BB', $B'B''$,... выдут равны между собой и каждый $< b$. Означив буквой a бок BB' и буквой n число таких боков, должны получить (ст. 55)◇

$$2c > n(b - a),$$

что невозможно для всякого целого положительного n.

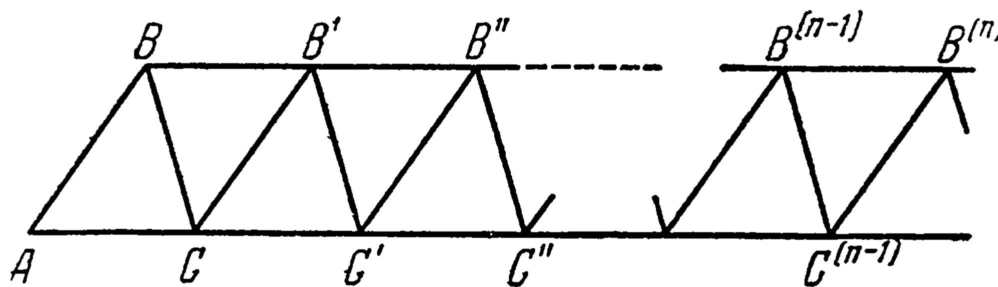
Отсюда следует, что *внешний угол от продолжения бока может быть или равен, или более суммы двух углов внутренних, с ним не смежных в треугольнике.*

---

* Таким образом, Лобачевский доказал, что если, оставляя две стороны треугольника неизменными, уменьшать угол между ними, то третья сторона также уменьшается. Далее он излагает доказательство Лежандра.

◇ Так как ломаная $ABB^{(n)}C^{(n-1)}$ имеет бóльшую длину, чем прямолинейный отрезок $AC^{(n-1)}$ (см. черт. 84а), то

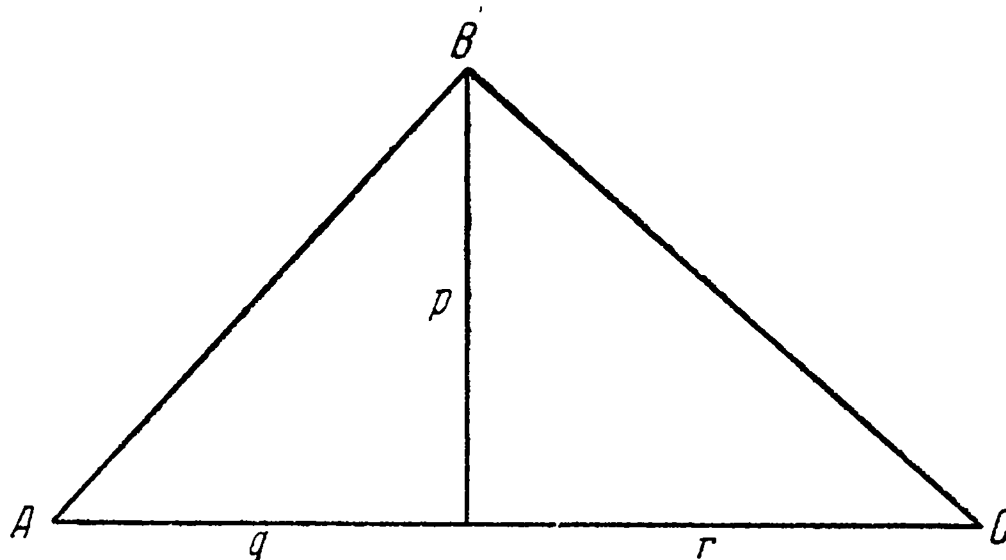
$$c + na + c > nb.$$



Чер. 84а

91. *Если в одном треугольнике сумма всех углов* π, *то во всяком другом та же.*

В треугольнике ABC (чер. 85) полагаем углы A, C острые. а сумму всех π. Из острия B опускаем перпендикул p к боку AC, который разделится, таким образом, на две части q, r*, а самый треугольник на два прямоугольных: один с катетами



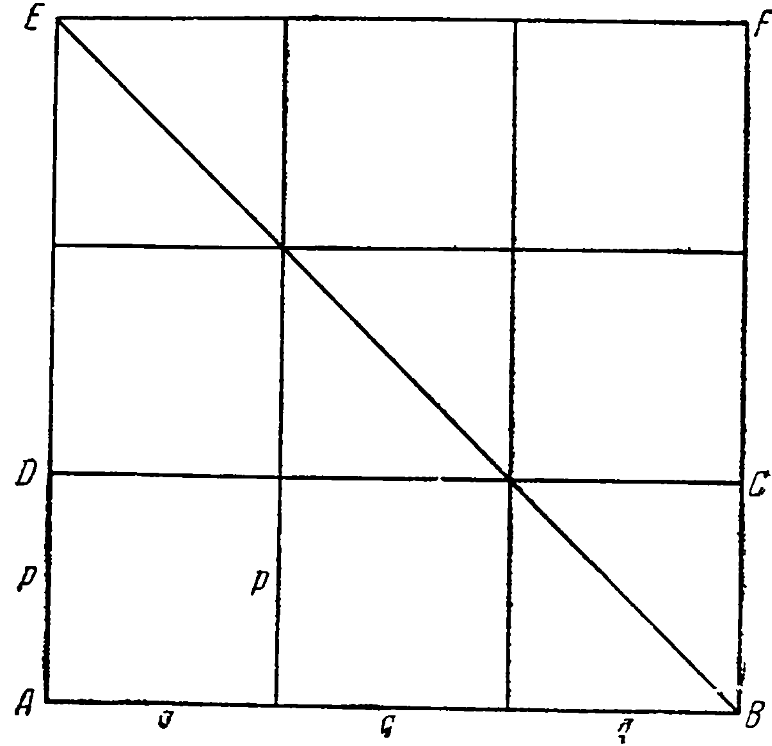
Чер. 85

p, q, где сумму трех углов положим $\pi - \alpha$; другой с катетами p, r, где пусть эта сумма $\pi - \beta$. В данном треугольнике ABC сумма всех углов должна быть $\pi - \alpha - \beta = \pi$, но как α, β нельзя принимать отрицательными числами (ст. 90), то $\alpha = 0$, $\beta = 0$. Это значит, что в том и в другом прямоугольном треугольнике сумма трех углов π, а сумма двух острых $\frac{1}{2}\pi$. К треугольнику с катетами p, q, приставляя такой же, гипотенузу к гипотенузе, притом еще так, чтобы равные линии не смыкались, но были друг против друга, получим четыреугольник с прямыми углами (чер. 86), который от этого называют *прямоугольник*. Из n таких прямоугольников, прикладывая бок p к p, составляем новый $ABCD$, где бок $AD = BC = p$, $AB = DC = nq$. Подобным образом приходим к прямоугольнику

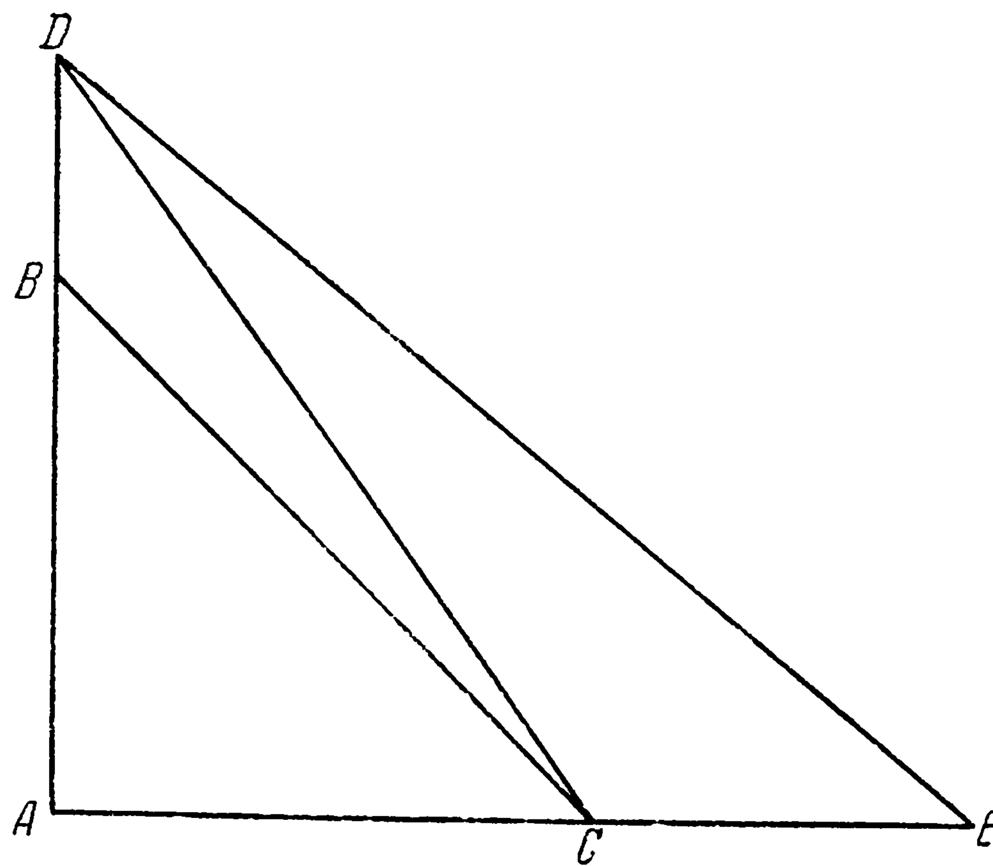
---

* Упасть вне AC перпендикуляр не может, так как тогда образовался бы прямоугольный треугольник, по отношению к которому один из углов A или C был бы внешним и, следовательно (ст. 53), больше прямого, что противоречит условию.

$ABFE$, где бока $AB = EF = nq$, $AE = BF = mp$, разумея под n, m произвольные целые числа. Линией BE разделяем прямоугольник $ABFE$ на два прямоугольных одинаковых треугольника ABE, BEF (ст. 81), где сумма трех углов в том и другом равны, следовательно, в каждом π. Теперь какой бы треугольник ABC (чер. 87) с прямым углом BAC ни был дан, всегда можем взять так велики целые числа n, m, чтобы катет $AB < mp$, $AC < nq$. После чего, продолжая AB, AC за точки B, C и делая $AD = mp$, $AE = nq$, получим треугольник DAE,



Чер. 86



Чер. 87

где сумма всех углов π, и где внутри помещается треугольник ABC, так что, проведя линию DC, разделим треугольник ADE

на три: DCE, BCD, ABC. Если в этих последних треугольниках полагаем суммы углов $\pi - \alpha$, $\pi - \beta$, $\pi - \gamma$, то в треугольнике ADE должна бы выходить она $\pi - \alpha - \beta - \gamma = \pi$, так как после соединения всех углов отнимается 2π при точках B, C. Между тем α, β, γ не могут быть отрицательными, следовательно, $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$. Уверившись, что $\gamma = 0$, с этим вместе доказали, что во всяком прямоугольном треугольнике сумма трех углов π; а как и всякий, вообще, треугольник разделяется на два прямоугольных, то сумма трех углов должна быть π во всех треугольниках.

Это предложение доказывал также Лежандр (Eléments de Géométrie*); но мы, кроме того, продолжая теперь Геометрию, будем допускать как то, так и другое предположение, которые до сих пор остаются еще возможными. *Употребительная Геометрия*, согласно с измерениями на самом деле, принимает сумму трех углов в треугольниках равною двум прямым. Основанием *Воображаемой Геометрии*, которую можем постигать только в нашем уме, служит другое предположение, что сумма трех углов во всяком треугольнике должна быть менее двух прямых. Эта сумма в таком случае растет с уменьшением боков в треугольнике; например, какой бы ни был угол BAC (чер. 87), если сумма всех трех углов будет $\pi - \alpha$ в $\triangle ABC$, $\pi - \beta$ в $\triangle BCD$, $\pi - \gamma$ в $\triangle DCE$, то находим ее $\pi - \alpha - \beta - \gamma$ в $\triangle ADE$.

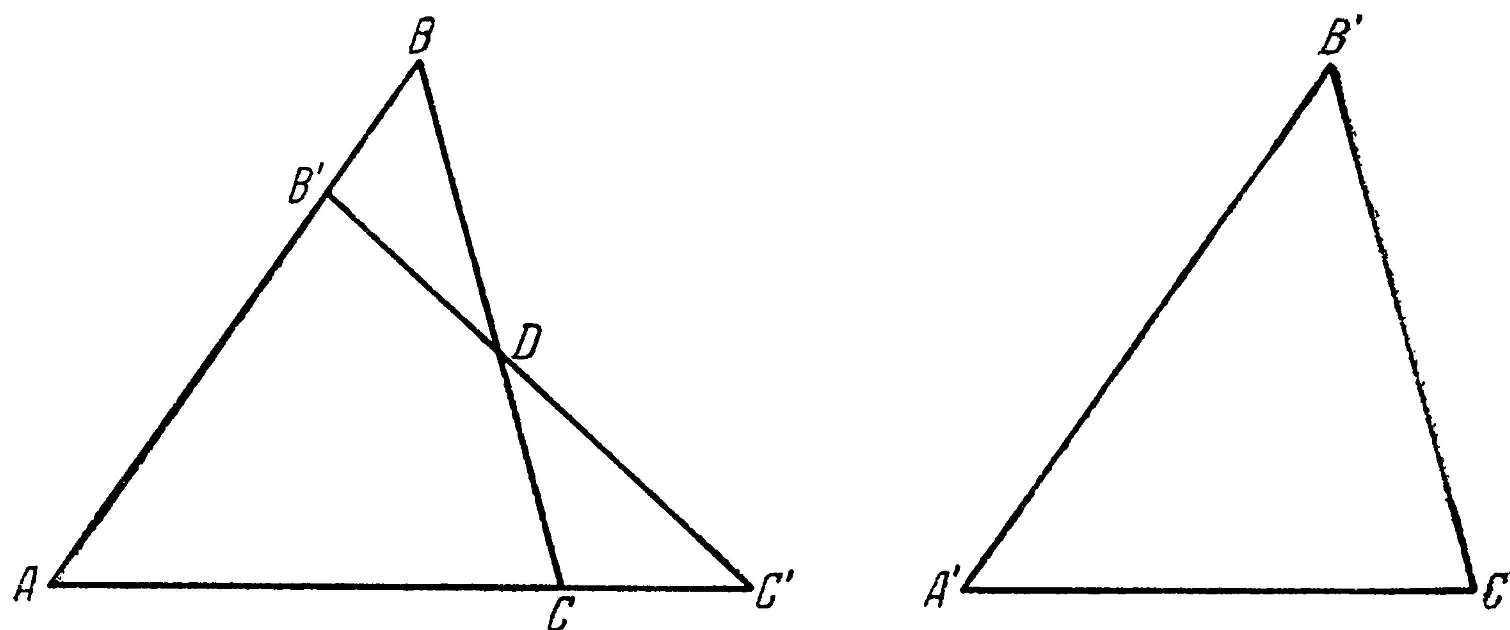
Если же во всех треугольниках принимаем π сумму трех углов, то в многоугольнике с одной окружностью и с n боками будет она $(n - 2)\pi$, так как $n - 2$ самое меньшее число треугольников, на которые данный многоугольник может разделяться (ст. 69). Это следует также из выражения для поверхности сферического треугольника (ст. 69), которую должно теперь почитать нулем [64].

92. *Прямолинейные треугольники одинаковы с равенством трех углов, которых сумму не принимаем* π◊.

* До Лежандра это предложение было доказано Саккери.

◊ Это — первое предложение «Новых начал», которое принадлежит *только* «Воображаемой геометрии».

Пусть в прямолинейных треугольниках ABC, $A'B'C'$ (чер. 88) углы $A=A'$, $B=B'$, $C=C'$, $A+B+C<\pi$. Если полагаем $\triangle A'B'C'$ на $\triangle ABC$ боками равных углов A, A', то треугольники не могут один помещаться в другом* (ст. 91). Если ж один будет выходить частию только вон из другого, например точка B' упадет на боку AB между концов A, B, тогда как точка C' выдет вон из треугольника ABC на продолжении AC,



Чер. 88

то [бок] $B'C'$, пересекая BC в точке D, произведет два треугольника BDB', CDC', где сумма трех углов в каждом $\pi+\angle BDB'$, что невозможно (ст. 90).

С предположением суммы трех углов π треугольники могут быть не одинаковы, несмотря на равенство трех углов, которое значит, собственно, равенство двух только, тогда как один бок остается произвольным (ст. 81).

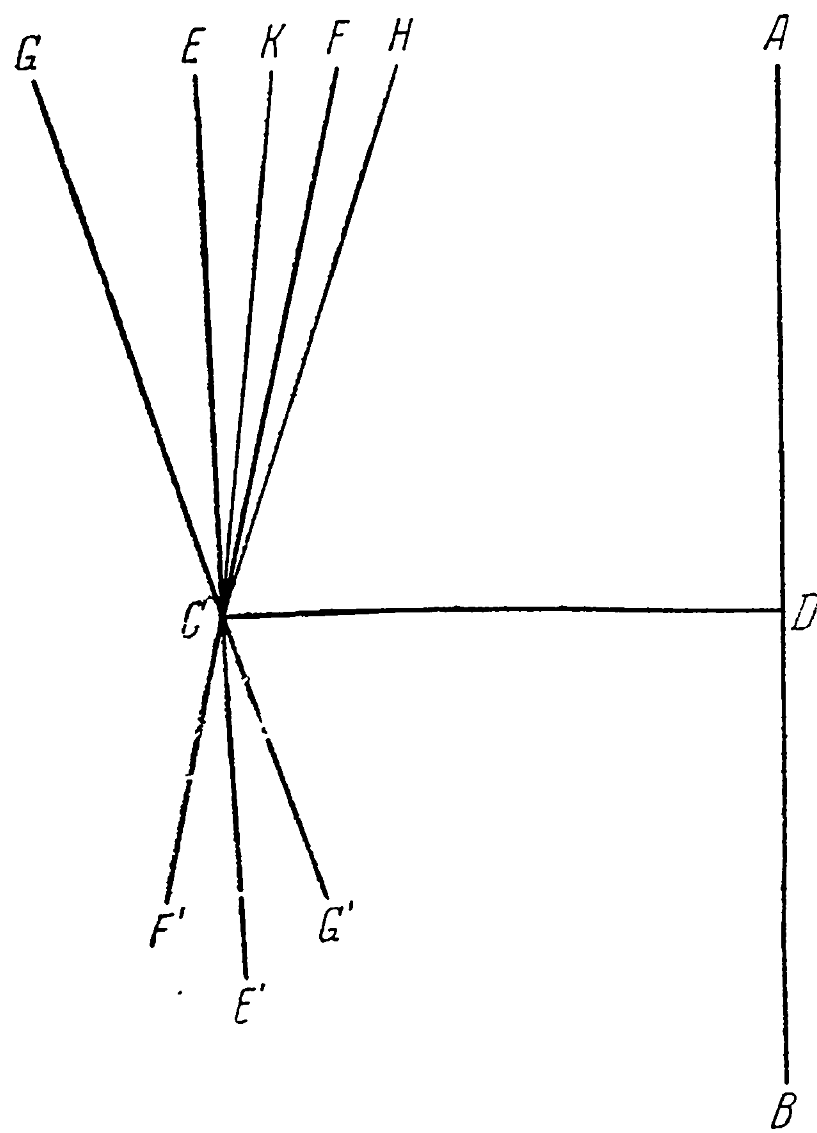
---

* Если треугольник ABC целиком помещается внутри другого, большего треугольника (черт. 87), то в треугольнике ABC дефект (см. сноску на стр. 24) меньше, а потому сумма углов больше, чем во втором треугольнике. В треугольниках же ABC и $A'B'C'$ сумма углов одинакова.

Глава VII

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ЛИНИИ

93. Линии, выходя из одной точки, либо пересекают данную прямую в той же плоскости, либо никогда с ней не встречаются, сколько бы ни продолжались Надобно, следовательно, различать между такими линиями в отношении к одной данной: *встречные*, или *сводные* и *невстречные*, или *несводные*, к которым принадлежат *параллельные*, составляя переход от одних к другим — *разводным**. Две параллельные к данной разделяют плоскость на четыре части: в двух противоположных заключаются сводные, в двух остальных — разводные линии.



Чер. 89

Пусть AB — прямая (чер. 89) дана с точкой C в одной плоскости, где все линии, выходя из точки C, должны либо пересекать AB, как, например, перпендикул CD к AB; либо не встречаться с AB, как, например, перпендикул CE на CD (ст. 48). Эта линия CD, обращаясь около точки C,

* Расходящимся.

переходит от сводных в угле FCG' к несводным в угле FCG, потом опять в угле GCF' к таким, которых продолжение за точку C пересекает AB; наконец, к несводным в угле $F'CG'$. Здесь бока четырех углов происходят от пересечения двух линий FF', GG', которые, представляя переход от сводных к несводным, будут параллельны с AB*. Заметим к этому, что все линии остаются попрежнему сводными либо несводными, когда под тем же углом переходят на другую сторону перпендикула CD. Итак, обе параллельные будут известны, как скоро знаем положение CF одной из них в прямом угле ECD. Тогда CG под тем же углом $GCE=ECF$ на противоположной стороне EC дает другую параллельную с AB. Наконец, две параллельные CF, CG с их продолжениями CF', CG' за точку C составляют два вершинных◊ угла GCF, $G'CF'$, где заключаются все разводные линии с AB.

Говоря, что линия параллельна другой, мы будем разуметь в последствии только тот случай, когда обе проведены в одну сторону какой-нибудь третьей соединительной их линии. Так CF параллельна к DA, CG' к DB, находясь на одной стороне линии CD. Из данной точки ко всякой линии может, следовательно, быть одна только параллельная, которой отличительное свойство заключается в том, чтобы с малейшим отклонением в одну сторону делалась сводной, а в другую разводной. Например, если CF параллельна к AD, то CH сводная, CK разводная с AD, как бы притом углы FCH, FCK малы ни были.

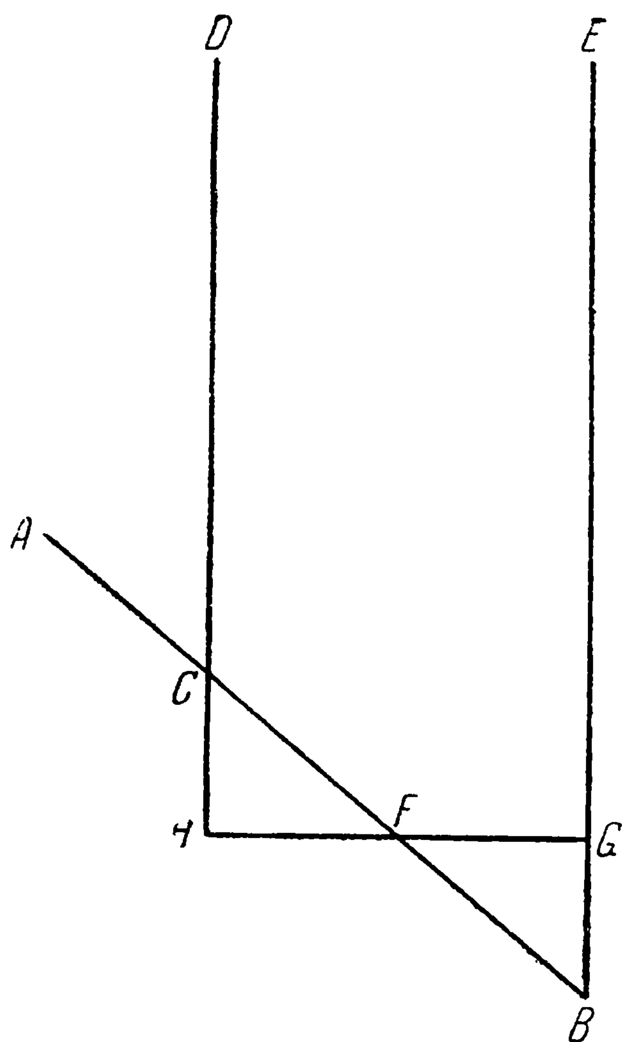
Под этим видом параллельность уже рассматривается во всей обширности. Евклид, не будучи в состоянии дать удовлетворительное доказательство, допускал в Употребительной Геометрии тот частный случай, когда две параллельные должны быть вместе перпендикулами к одной прямой. Таким образом, угол ECF, как и весь угол GCF, с его вершинным $F'CG'$ здесь

---

* См. примечание [6].

◊ Вертикальных.

уничтожаются, следовательно, все линии, кроме параллельной, должны пересекать AB, достаточно продолжаясь в ту, либо другую сторону. Евклидовы последователи затрудняли только предмет дополнительными положениями, либо произвольными, либо совсем темными, стараясь убеждать в справедливости принятой истины, которую по существу самой Геометрии доказывать невозможно.



Чер. 90

Наклонение линии к опущенному перпендикулу на другую, с первой параллельную*, будем называть *угол параллельности к этому перпендикулу*. Самый угол означим $\Pi(p)$, когда p — перпендикул. Заметим, однако ж, что выражение $\Pi(p)$ не представляет покуда никакой аналитической функции, но только служит знаком, который указывает на принадлежность угла $\Pi(p)$ к линии p.

94. *Две линии не сходятся, когда третья встречает их на той же стороне под одним углом.*

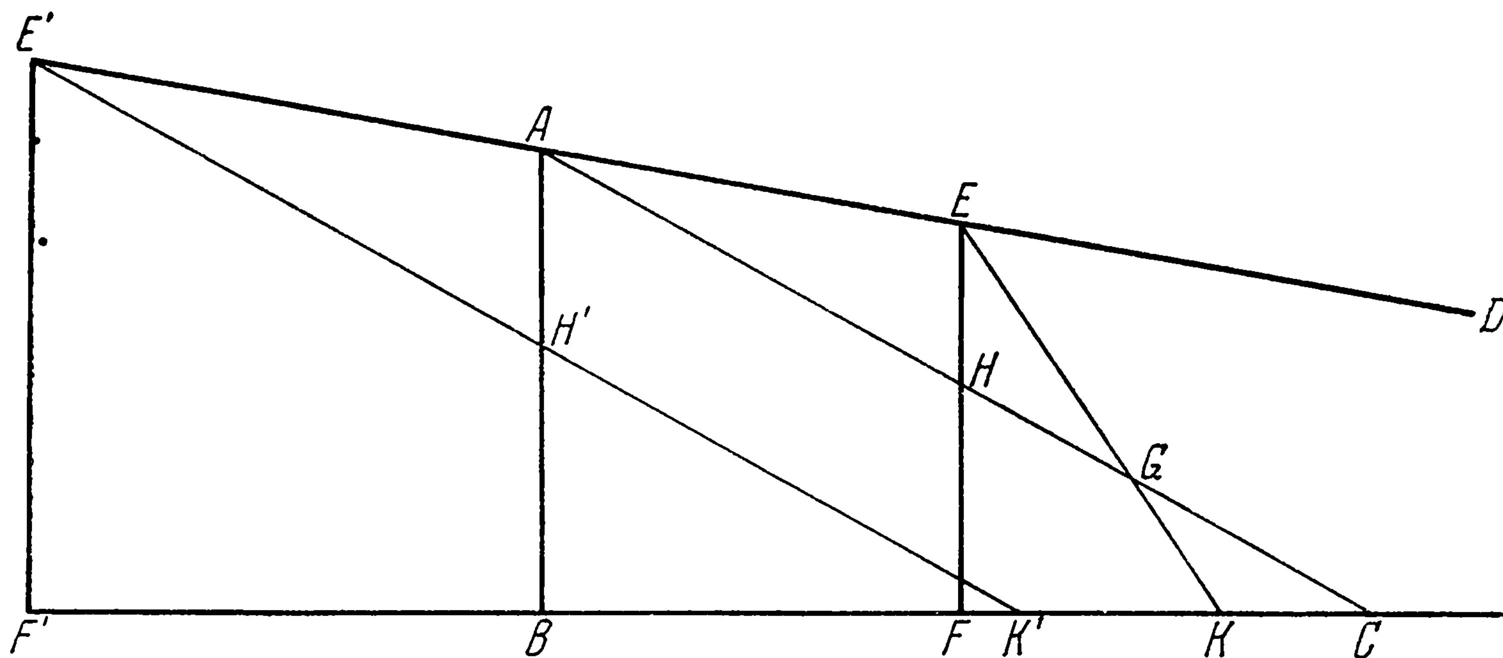
Пусть прямая AB (чер. 90) встречает две линии CD, BE на одной стороне под углом $ACD = ABE$, который если будет прямой, то CD, BE не должны сходиться (ст. 48); если ж острый, то с ним смежный будет тупой. Итак, полагаем ABE острый угол, в отверстие которого падает перпендикул FG к BE из средины F линии BC, тогда как из той же средины FH приходит в точку H перпендикулярно к продолжению DC. Составятся два прямоугольных треугольника $CHF \backsimeq GFB$, потому что $CF = FB$, $\angle FCH = \angle FBG$ (ст. 87); следовательно, два рав-

* Выражение «с первой параллельную» не обосновано, пока не доказано предложение о взаимности понятия параллельности (ст. 96).

ных угла CFH, BFG, как вершинные, должны происходить от пересечения прямых BC, GH; из этих к последней GH две перпендикулярные DH, GE не могут сходиться [65].

95. *На линии всякую точку можно почитать за начало, откуда выходит она параллельно другой.*

Пусть AB (чер. 91) — перпендикул к прямой BC из точки A, откуда выходит линия AD, параллельная с BC. Это значит, что всякая другая линия AC, от A проведенная в угле параллельности, пересекает BC. Должно доказывать, что будет ли взята



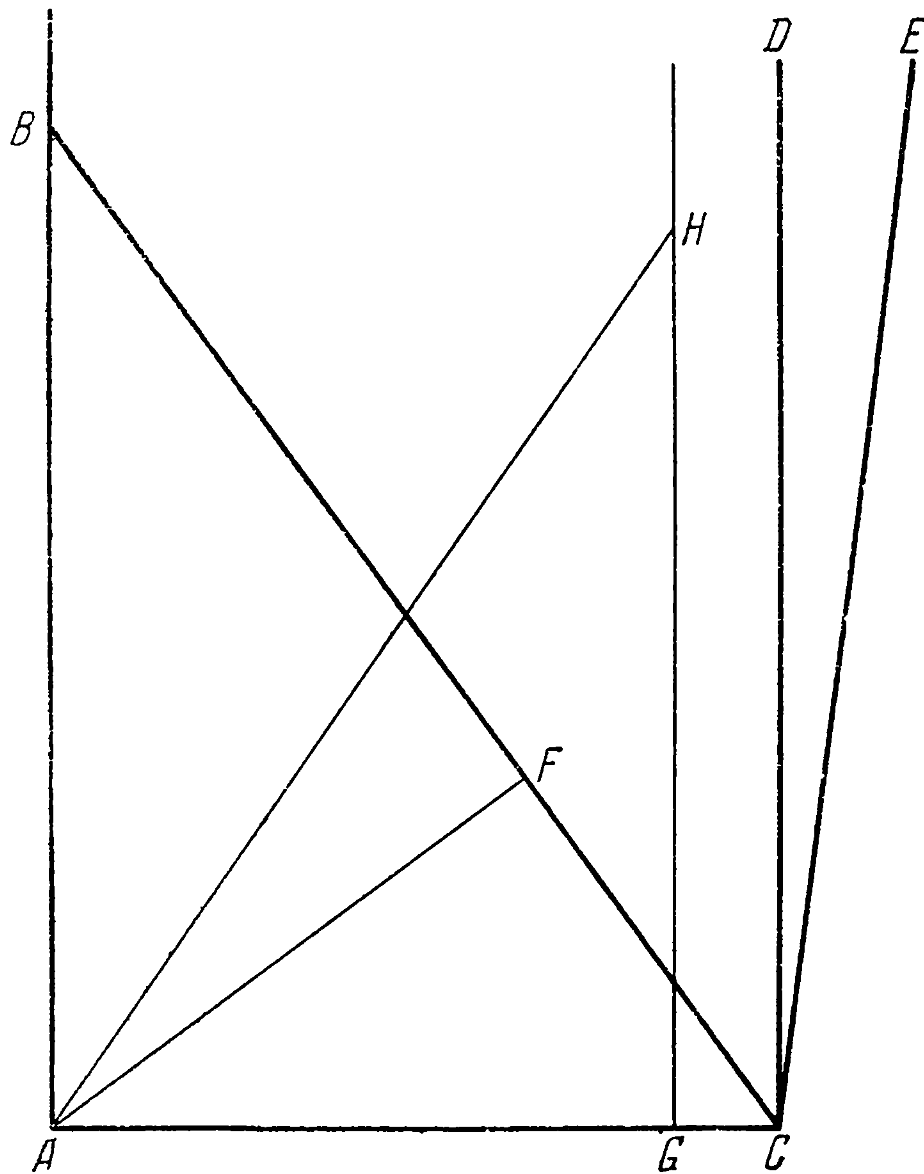
Чер. 91

где-нибудь точка E по ту, либо точка E' по другую сторону точки A на линии AD с ее продолжением AE' за точку A, всегда перпендикулы EF, $E'F'$ к BC с $E'D$ составляют угол параллельности DEF, $DE'F'$, в отверстии которого линия, проведенная из острия E, E', пересекает $F'C$.

В отверстии угла DEF ведем из острия E какую-нибудь линию EG. Конец ее G, покуда не пересекает она BC, соединяем с A прямою AG, которая в продолжении должна встретить EF где-нибудь в H, потом и BC, где-нибудь в C. Составится треугольник FHC, куда войдет EG, но по невозможности пересекать в другой раз ни HF, ни HC должна пройти чрез FC где-нибудь в K*.

* Аксиома Паша (см. примечание [2]).

В отверстии угла $DE'F'$ ведем из острия E' произвольно линию $E'K'$, которая внутри четыреугольника $ABF'E'$ не может пересекать в другой раз ни $E'F'$, ни $E'A$, но должна пройти либо через бок BF', либо через AB где-нибудь в точке H'. Этот последний случай рассматривая, полагаем, что в $\triangle ABC$, куда входит линия $E'H'$, бок AC наклонен к параллельной AD под углом $DAC = DE'K'$, так как первый из них совершенно произвольный. Теперь $E'K'$, не пересекая более AC (ст. 94), ни в другой раз AB, должна сойтись с боком BC треугольника в какой-нибудь точке K'.



Чер. 92

Итак, полагая $p = AB, EF, E'F'$, получим угол $\Pi(p) = DAB, DEF, DE'F'$, где бы точки A, E, E' ни были взяты на параллельной.

96. *Когда линия параллельна другой, то, наоборот, эта вторая также параллельна первой.*

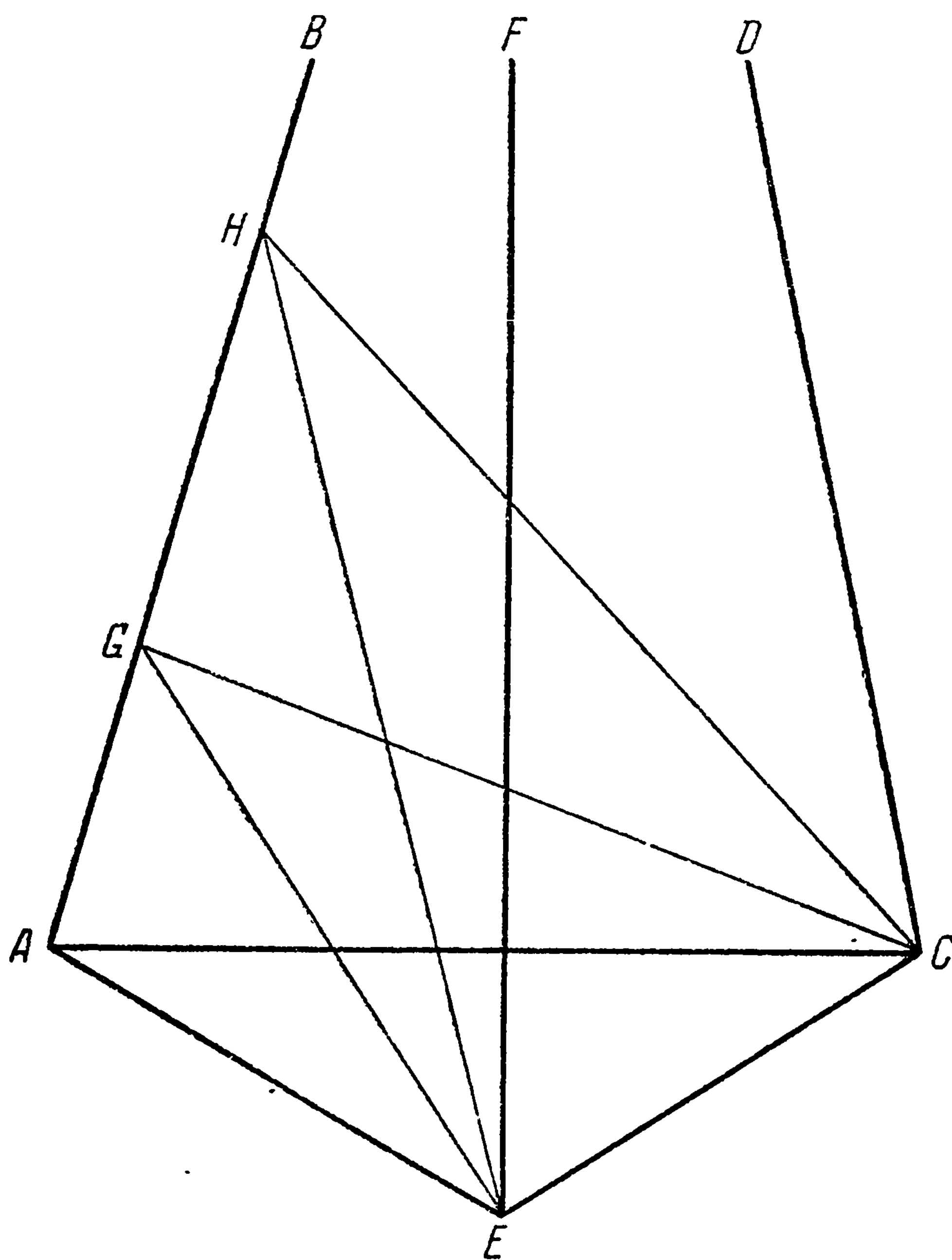
Пусть из точки A (чер. 92) проведены линии AB параллельная, AC перпендикулярная к CD. Ясно, что всякая линия CE, отклонившись от CD не в ту сторону, где лежит AB, не может и пересекать AB. Остается доказывать, что всякая линия CF, отклонившись от CD в противную сторону, непременно встретит AB, как бы мал ни был угол отклонения DCF.

Опускаем из точки A перпендикул AF к CF; делаем $AG = AF$, ставим перпендикул HG к AC в конце G линии AG, потом

из A ведем AH к AG под углом $HAG=BAF$. Линия AH должна пересекать CD (ст. 93), следовательно, пересекать и GH также где-нибудь в точке H. Составится прямоугольный треугольник AHG, где гипотенуза AH назначает расстояние AB, на котором CF в продолжении встречает AB, потому что $\triangle ABF \cong \triangle AHG$ (ст. 81).

Итак, *параллельность двух линий бывает всегда взаимной.*

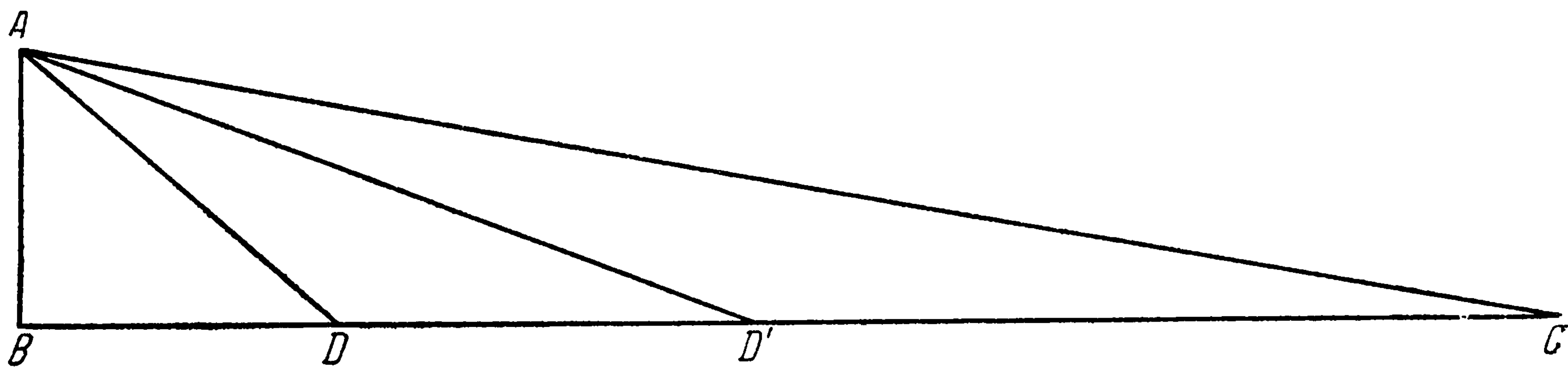
97. *Две параллельные бывают параллельны третьей, в которой пересекаются плоскости, проведенные через две первые.*



Чер. 93

Пусть параллельные AB, CD (чер. 93) лежат в плоскостях, которых линия пересечения FE. От произвольной ее точки E ведем перпендикул EA к AB в A, потом отсюда другой перпендикул AC к CD и, наконец, линию CE, которая с двумя перпендикулами составит треугольник ACE. Угол BAC между линий AB, AC может быть острый или прямой (ст. 93), следовательно, перпендикул из C к AB должен падать куда-нибудь в точку G, которая будет или та же точка A, или на каком-нибудь расстоянии AG от A. Соединительная линия GE точек G, E также либо должна не различаться с AE, либо проходит в отверстии угла AEF. Теперь параллельность линий EF с AB надобно доказывать, уверясь в том, что всякая линия

пересекает AB, как скоро выходит из острия E в угле FEA. Ясно, что не может быть иначе в той части AEG всего угла AEF, которая принадлежит треугольнику AEG. В остальной части FEG, проведя линию EH, потом воображая через нее с другой EC плоскость, получим в пересечении с плоскостью BAC линию CH, которая в угле DCG должна встречать AB, параллельную с CD где-нибудь в точке H, куда, следовательно, придет и линия EH, как бы мал угол HEF ни был. Подобным образом доказывается параллельность EF с CD.



Чер. 94

Итак, если на плоскости может быть проведена параллельная линия с данной вне плоскости, то всякая другая плоскость, проходя через данную линию, в пересечении с данной плоскостию, производит параллельную к данной линии. В таком случае говорят, что данная *плоскость и линия* друг к другу *параллельны*.

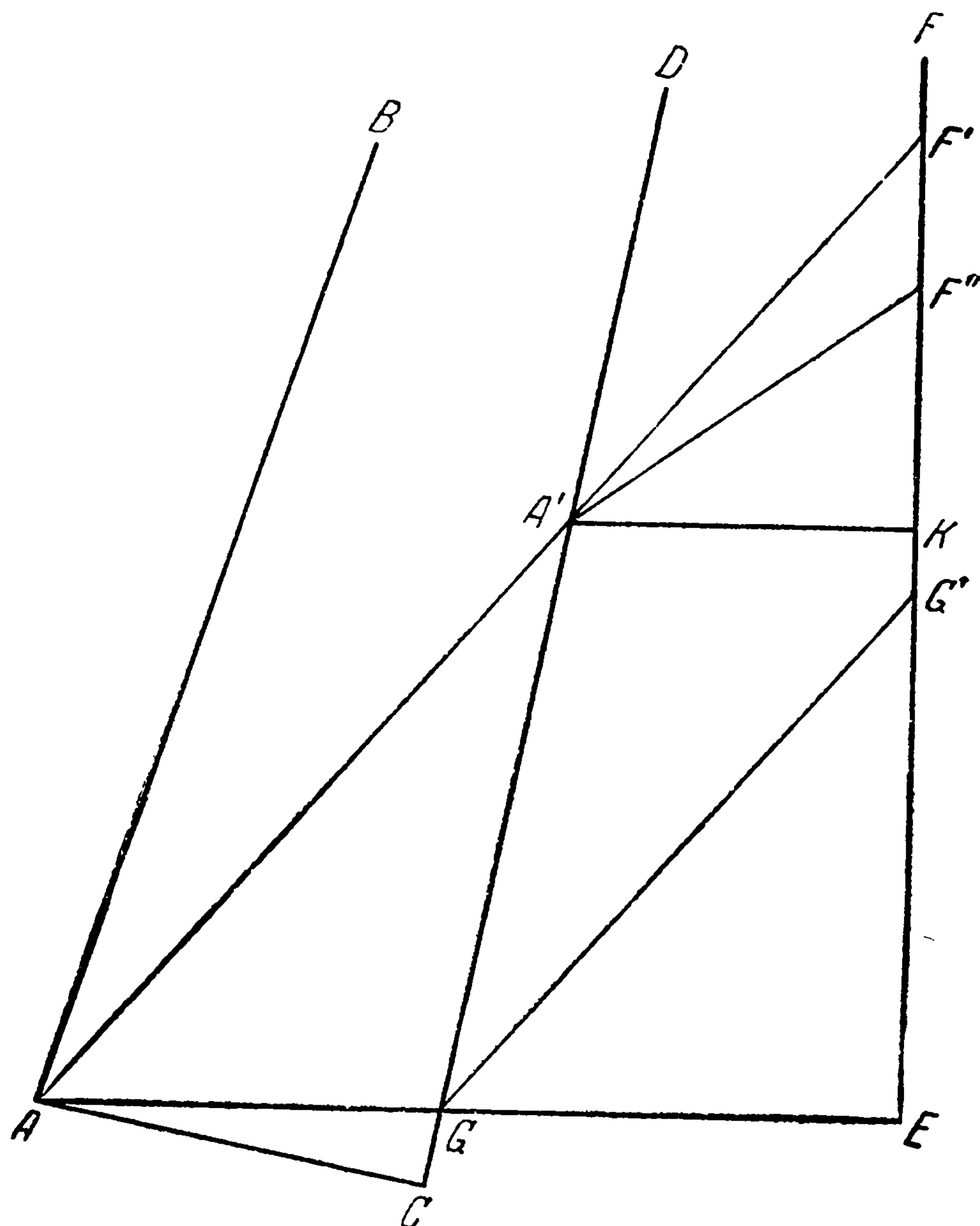
98. *От точки всегда можно провести линию так, чтобы с данной составился как угодно малый угол.*

Пусть AB (чер. 94) — перпендикул из точки A к линии BC. Мы знаем уже, что точка D чем далее взята будет от конца B перпендикула AB, тем угол ADB выдет менее (ст. 53). Теперь остается доказывать, что с возрастанием BD может он сделаться менее, нежели всякий данный угол. На боку DC, внешнего угла ADC от продолжения бока BD в $\triangle ABD$ берем $DD'=AD$, отчего произойдет равнобедренный треугольник ADD', где углы при A, D' равны; следовательно, угол $ADB \geqslant 2AD'D$ (ст. 90). Делая $CD' = AD'$, получим угол $ACD \leqslant \frac{1}{4} BDA$. Так продол-

жая, можем уменьшать беспредельно тот угол, который BC составляет с линией, проведенной от нее к данной точке A.

99. *Две линии, параллельные с третьей**, *параллельны между собой*◊.

Рассматриваем сперва три линии AB, CD, EF (чер. 95) в одной плоскости. Предполагая крайнюю AB параллельной



Чер. 95

с двумя другими, ведем из точки A, взятой произвольно на AB, перпендикулы AC к CD, AE к EF. Последний пересечет среднюю линию CD где-нибудь в G либо между концов C, D, если угол $DGE < \frac{1}{2}\pi$△, либо в точке C, сливаясь с AC, если угол

* В одном направлении.

◊ В том же направлении.

△ По ходу доказательства нельзя заранее исключить возможность $\angle DGE > \frac{\pi}{2}$; однако и в этом предположении прямая CD пересекает отре-

$DGE = \frac{1}{2}\pi$. Из точки G пусть выходит линия GG' в отверстии угла DGE под каким-нибудь углом DGG' к DG. На DC можем взять точку A' так от C далеко, чтобы угол $AA'C$ был менее DGG' (ст. 98). Несмотря на то; продолжение линии AA' за точку A' должно пересечь EF где-нибудь в F', так как AB с EF параллельны. После чего произойдет треугольник AEF', которого бок AF' наклонен к линии $A'D$ под углом $DA'F' < DGG'$. Если же делаем угол $DA'F'' = DGG'$, то $A'F''$ при невозможности пересекать GE, не встречаясь с GG', пройдет где-нибудь чрез F'' между F', E на FE, ограничивая, таким образом, четыреугольник $A'GEF''$, где GG', не пересекая $A'F''$ (ст. 94) должна сойтись с EF'' в какой-нибудь точке G'.

Если же две крайние AB, EF параллельны к средней DC, то всякая линия AA', проведенная в отверстии угла BAE от острия A, должна пересекать DC где-нибудь в точке A', от которой пусть перпендикул к FE будет $A'K$. Теперь продолжение $A'F'$ линии AA' — вне четыреугольника $AA'KE$, следовательно, в отверстии угла $DA'K$, будет пересекать EF, параллельную с $A'D$ (ст. 96), как бы мал угол BAA' ни был.

Наконец, предполагая AB, CD параллельными с EF в разных плоскостях, можем AB почитать за линию пересечения двух плоскостей $BACD$, $BAEF$*, проведенных через две параллельные CD, EF; следовательно, третья AB должна быть также параллельна к CD (ст. 97) [66].

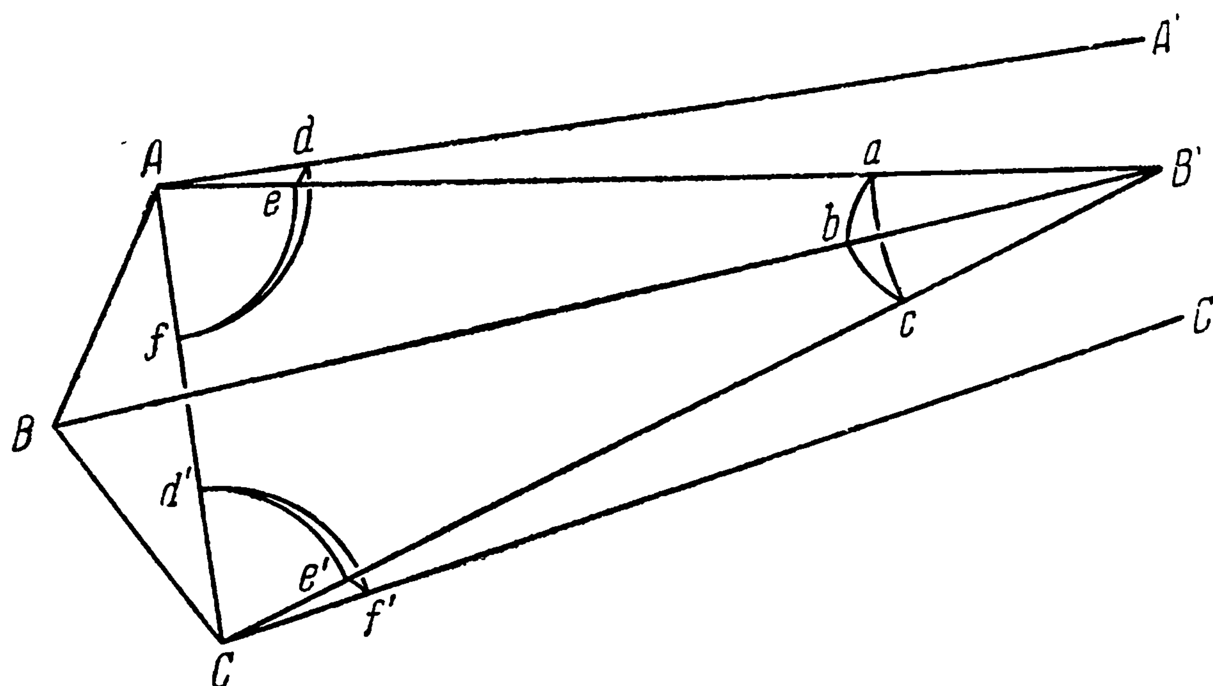
100. *Когда три плоскости пересекаются в параллельных линиях, то сумма плоскостных углов* π.

Пусть три плоскости пересекаются в параллельных линиях AA', BB', CC' (чер. 96). Берем на каждой произвольно точки A, B, C, которые соединяем линиями AB, AC, BC и воображаем через них плоскость, потом еще другую $AB'C$ через точки A, C и B' где-нибудь на BB'; наконец, описываем сферы

зок AE, концы которого лежат по разные стороны от CD; а только это и существенно для дальнейшего.

* Плоскости $ABEF$ и ACD пересекаются по прямой, которая параллельна прямой EF (ст. 97) и, следовательно, совпадает с прямой AB.

вокруг этих трех точек и чертим их дуги пересечения на плоскостях $A'AB'$, $AB'C$, $B'CC'$, $A'ACC'$. Называем α, β, γ плоскостные углы первых* трех плоскостей вокруг параллельных AA', BB', CC'; означаем δ угол отклонения плоскости $AB'C$ от



Чер. 96

$A'ACC'$; p, q, r — телесные углы def, $d'e'f'$, abc, которых вершины в A, C, B'. Плоскостной угол def находим (ст. 68)

$$2p + \pi - \alpha - \delta\ ^{\diamond},$$

угол $d'e'f'$

$$2q + \pi - \gamma - \delta.$$

После чего телесный угол

$$r = \delta - p - q - \frac{1}{2}(\pi - \alpha - \beta - \gamma)\ ^{\triangle}.$$

Угол δ можно взять как угодно малым, а с ним уменьшать беспредельно дуги de, $e'f'$, удаляя точку B' от B (ст. 93).

* Слово «первых» здесь написано по ошибке. Речь идет о плоскостях $A'AB'$, $B'CC'$, $A'ACC'$.

◇ Согласно теореме ст. 68 имеем: $p = \frac{1}{2}(\angle def + \angle fde + \angle efd - \pi)$, откуда $\angle def = 2p + \pi - \angle fde - \angle efd = 2p + \pi - \alpha - \delta$. Аналогично получается и следующее равенство.

△ Угол bac является смежным с углом def, т. е. равен

$$\angle bac = \pi - \angle def = \pi - (2p + \pi - \alpha - \delta) = \alpha + \delta - 2p.$$

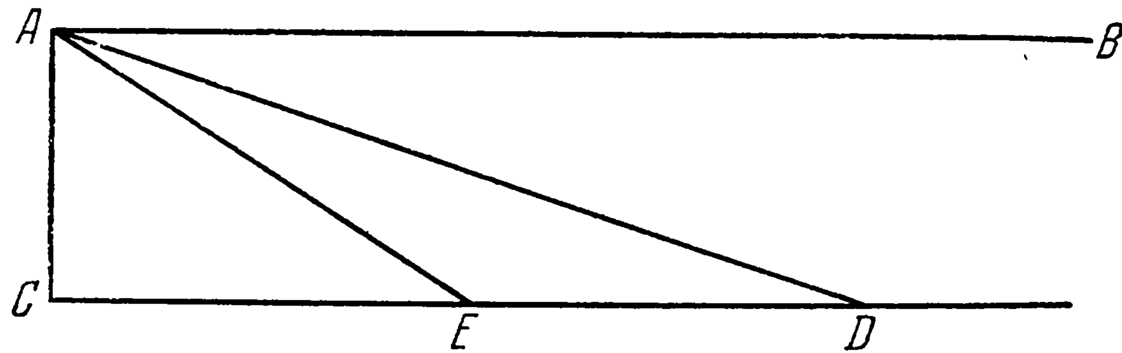
Аналогично, $\angle bca = \pi - \angle d'e'f' = \pi - (2q + \pi - \gamma - \delta) = \gamma + \delta - 2q$. Наконец, угол abc равен β. Отсюда, на основании ст. 68, получаем r.

С этим движением вершины B' исчезают, наконец, дуги ab, bc, следовательно, самый телесный угол r (ст. 80), плоскостной δ и телесные $p < \delta$, $q < \delta$, так что

$$\pi = \alpha + \beta + \gamma.$$

101. *Если в треугольниках сумма трех углов π, то два перпендикула к одной линии между собой параллельны.*

Пусть AB, CD (черт. 97) — перпендикулы к одной линии AC, которой конец A соединяем линией AD с какой-нибудь точкой D на CD. В прямоугольном треугольнике ACD сумма



Черт. 97

двух острых углов $\frac{1}{2}\pi$, так же как углы $CAD + DAB = \frac{1}{2}\pi$; следовательно, угол $BAD = ADC$; но последний может быть сделан как угодно малым (ст. 98), следовательно, AD, как бы мало ни отклонялась от AB, всегда пересекает CD. Это значит, что CD с AB параллельны (ст. 93).

Итак, в том же предположении вообще *две линии параллельны, когда третья встречает их на одной стороне под равным углом* (ст. 94); а следовательно, *две линии пересекаются всякий раз, когда бывают наклонены к третьей между ними под углами, которых сумма $< \pi$.*

Обратно, *когда допускаем параллельность каких-нибудь двух перпендикулов к линии, то в треугольниках сумма всех углов должна быть π.* Если, например, AB, CD — два перпендикула к AC — параллельны между собой, то пусть в треугольнике ACE сумма трех углов $\pi - \alpha$, следовательно, угол $BAE > \alpha$. Делаем угол $BAD = \alpha$, то линия AD пересечет CD и произведет треугольник ADC, где сумма трех углов $\pi - \alpha + \angle ADC$

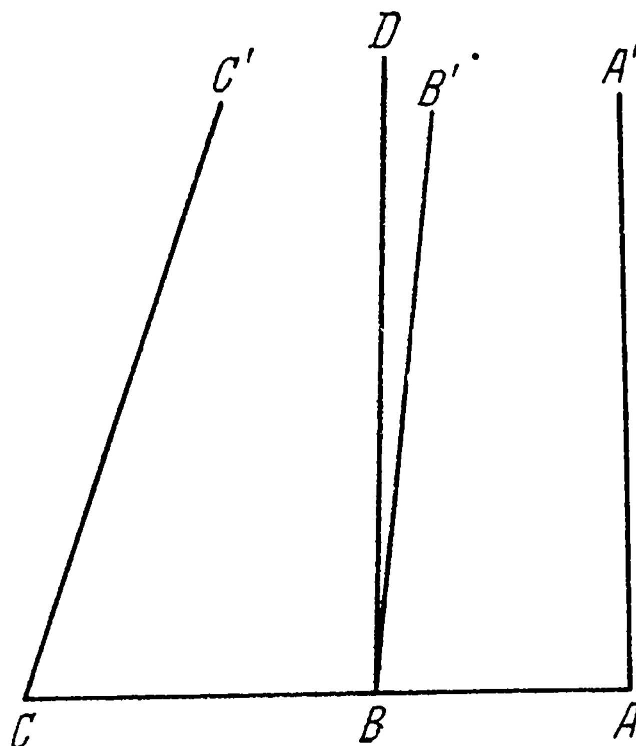
должна быть равна, либо менее, нежели сумма трех углов в треугольнике ACE (ст. 91)*. Отсюда

$$\pi - \alpha + \angle ADC \leqslant \pi - \alpha$$

— неверность, которая может уничтожиться только с положением $\alpha = 0$ (ст. 93)°.

102. *В предположении суммы всех углов треугольника* $< \pi$, *угол* $\Pi(a)$ *уменьшается постепенно с возрастанием* a, *начиная с* $\Pi(a) = \frac{1}{2}\pi$ *для* $a = 0$ *и приближаясь к границе* $\Pi(a) = 0$ *для* $a = \infty$.

Заметим, во-первых, что $\Pi(a) > \Pi(b)$, когда $a < b$. Пусть $AB = a$; $AC = b$ (чер. 98), AA' — перпендикул к AC; BB', CC' — параллельные с AA'; следовательно, угол $ABB' = \Pi(a)$, $ACC' = \Pi(b)$. Нельзя полагать $\Pi(a) = \Pi(b)$ с тем, чтобы не нашлось к одной линии двух перпендикулов, которые были бы параллельны (ст. 94). Того менее можно допускать $\Pi(a) < \Pi(b)$ для $a < b$, потому что в таком случае линия BD пересекала бы CC' даже тогда, когда б угол ABD сделан был равный с ACC'.



Чер. 98

Теперь докажем, что для всякого угла A между границ $A = 0$, $A = \frac{1}{2}\pi$ можно найти a так, чтоб $A = \Pi(a)$.

На боку угла A (чер. 99) из какой-нибудь точки B опускаем перпендикул BB' к другому боку. Составится прямоугольный треугольник ABB' с катетами AB', BB', где сумма трех углов пусть будет $\pi - \alpha$. Продолжая бок AB', делаем $B'C' = AB'$, потом $C'D' = AC'$ и т. д.

---

* См. сноску * на стр. 213.

° Предположение $\alpha = 0$ исключает возможность пересечения AD и CD.

Ставим перпендикулы CC', DD',... в точках C', D', ... к тому же боку, покуда могут они встречать другой бок в точках C, D... Соединяя линиями точки B с C', C с D',..., получим $\triangle AB'B \cong \triangle B'BC'$, $\triangle AC'C \cong \triangle CC'D'$,... Далее сумма трех

Чер. 99

углов должна быть $\pi-2\alpha$ в $\triangle\ ABC'$, менее, нежели $\pi-2\alpha$ в $\triangle ACC'$ (ст. 91), менее, нежели $\pi-4\alpha$ в $\triangle\ ACD'$, еще менее в $\triangle ADD'$. Так, вообще, должны бы находить эту сумму менее $\pi-2^n\alpha$ с целым положительным числом n. Это требует, чтобы, наконец, перпендикулы EE', FF' к одному боку угла A не сходились более с другим*. Пусть из них EE' — тот перпендикул к AE', который сам не сходится с AD, но в одну сто-

* Процесс может продолжаться до тех пор, пока перпендикуляры к стороне AB' пересекают сторону AB. Если бы это построение могло повторяться неограниченное число раз, то разность $\pi - 2^n\alpha$ стала бы отрицательной, что невозможно.

рону которого к острию A все прочие пересекают бок AD*, тогда как по другую сторону все перпендикулы FF', сколько бы ни продолжались, не встречаются с AD. В таком случае бок AD параллелен с перпендикулом EE'. Чтоб в этом увериться, ведем линии AG, AH из острия угла A внутри и вне по другую сторону бока AD. Вторая◊ не должна сходиться с EE', чтоб не составился треугольник, откуда прямая AD могла бы только выйти, пересекая бок EE'. Введем еще линию AG' вне угла A из его вершины под тем же углом к боку AD', под каким AG наклонена к AD внутри. Опускаем к AG' перпендикул $E'G'$ из точки E'. Получим прямоугольный треугольник $AE'G'$, где $AG'<AE'$. Итак, если AG' кладем от острия A на AE', то AG покроет AD, точка G' упадет где-нибудь в K' между точек A, E'; после чего перпендикул GG' сделается перпендикулом KK' к AE', который назначит расстояние $AK=AG$ точки G, куда линия AG должна прийти, составляя треугольник AGE', где линия EE' пересечет, следовательно, бок AG. Так, AD в обращении своем вокруг точки A под каким бы малым углом от прежнего своего положения ни отклонялась, идя в одну сторону, пересекает EE', а в противоположную — с EE' не встречается.

Соблюдая постепенность в изменении, мы пополним значение $\Pi(a)$, принимая $\Pi(a)=\frac{1}{2}\pi$ для $a=0$, $\Pi(a)=0$ для $a=\infty$ и, наконец, распространяя на все отрицательные линии, будем полагать

$$\Pi(a)+\Pi(-a)=\pi,$$

где, следовательно, линия a может быть нулем, положительным и отрицательным числом, возрастая до бесконечности△.

---

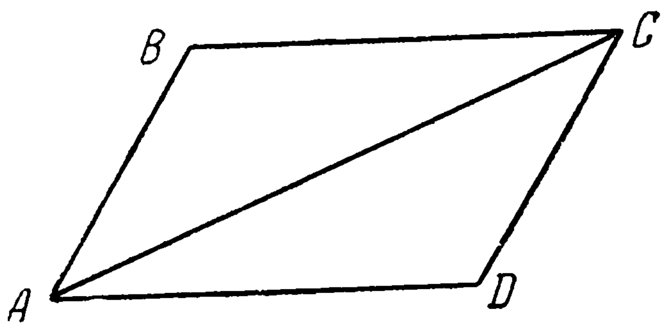
* Точки луча AB', являющиеся основанием перпендикуляров, пересекающих AB, и все остальные точки образуют классы Дедекинда, а E' — сечение, существование которого требуется аксиомой Дедекинда.

◊ В оригинале ошибочно написано «Первая». Речь идет, конечно, о прямой AH, которая «не должна сходиться с EE'».

△ См. примечание [8].

Хотя выражение П(a), как мы заметили выше (ст. 93), служит только знаком для угла, вместе с указанием на линию a, к которой он принадлежит, однако же такая зависимость, покуда неизвестна, может называться *геометрической функцией* для различия с аналитической, определяемой или вполне самым действием над числом, или посредством условных уравнений.

В Употребительной Геометрии принимают угол параллельности постоянно прямым. Между тем, этот угол можно полагать также переменным в *Общей* или *Воображаемой Геометрии*, которая будет обнимать Употребительную Геометрию, как частный случай, однако ж единственный, какой только нам открывают измерения на самом деле.



Чер. 100

103. В Употребительной Геометрии четыреугольник, где противоположные бока параллельны, называют *параллелограмм*.

В параллелограмме противоположные бока равны. Также всякий четыреугольник бывает параллелограммом, как скоро в нем противоположные бока равны, или два только бока равны и вместе параллельны.

Четыреугольник $ABCD$ (чер. 100) разделяем на два треугольника, соединив острия A, C двух противоположных углов линией AC, которую называют *диоганал*. Если бока AB с CD, AD с BC параллельны, то диоганал AC к той и другой из двух параллельных будет наклонен под одним углом (ст. 101). Так $\angle BAC = \angle ACD$, $\angle BCA = \angle CAD$, следовательно, треугольники $ABC \cong ACD$ (ст. 81), в них $AB = CD$, $BC = AD$.

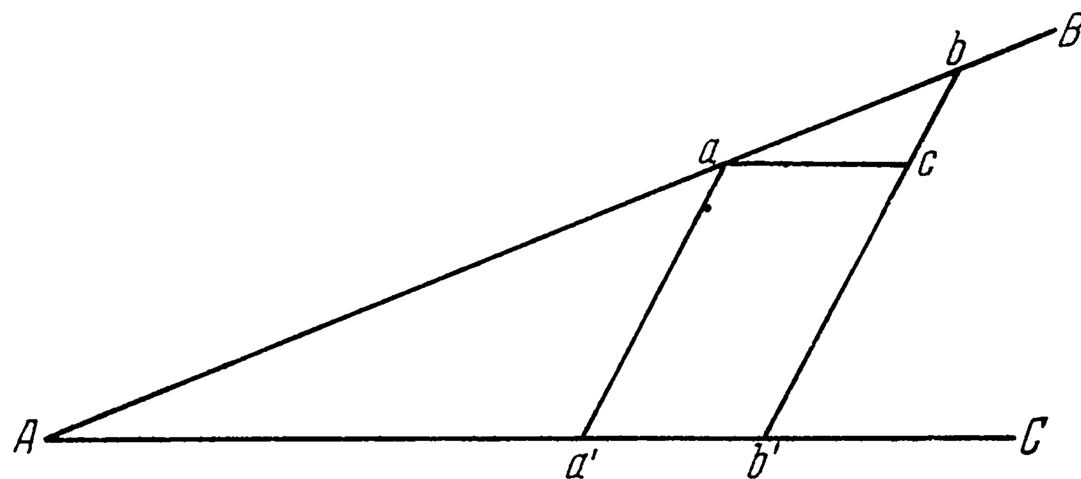
Если ж $AB = CD$, $BC = AD$, то снова $\triangle ABC \cong \triangle ACD$; следовательно, углы $BCA = CAD$, $BAC = ACD$, бока BC с AD, AB с CD параллельны.

Если, наконец, AB с CD равны и параллельны, то углы $BAC = ACD$, следовательно $\triangle ABC \cong \triangle ACD$ (ст. 81), после чего BC с AD равны и параллельны.

Отсюда следует *равенство перпендикулов от одной параллельной к другой.*

104. *В предположении прямых углов параллельности содержание параллельных между боков угла то же, какое самых отрезков на боках.*

Пусть aa', bb' (чер. 101) — две параллельные между боков AB, AC угла A. Внешний угол baa' треугольника Aaa' равен



Чер. 101

сумме двух внутренних с ним не смежных aAa', $aa'A$; следовательно, через конец a линии aa' параллельная ac с боком Aa' угла A должна делить bb' на две части bc и $cb'=aa'$ (ст. 103). Отсюда заключаем, что параллельные aa', bb' между боков угла растут, удаляясь от острия A. К тому в треугольнике abc угол $bac=aAa'$, $abc=Aaa'$, линия $ac=a'b'$, следовательно, где бы ни взяли часть ab на боку AB, везде три бока в треугольнике Aaa' растут одинаково, как скоро бок aa' заменяем его параллельным bb'. Называем теперь x, y, z бока Aa, Aa', aa' в треугольнике Aaa'; x',y', z' бока Ab, Ab'; bb' в $\triangle Abb'$; полагаем, что x разделено на n, x' на m таких же равных частей. Ясно, что дробь $\frac{n}{m}$ будет содержание x к x', y к y', z к z'. Предположим еще в случае несоизмеряемости линий

$$\frac{m}{n}x<x'; \qquad \frac{m+1}{n}x>x'$$

и, следовательно, также

$$\frac{m}{n}y < y'; \quad \frac{m+1}{n}y > y'.$$

После чего, как сейчас доказали,

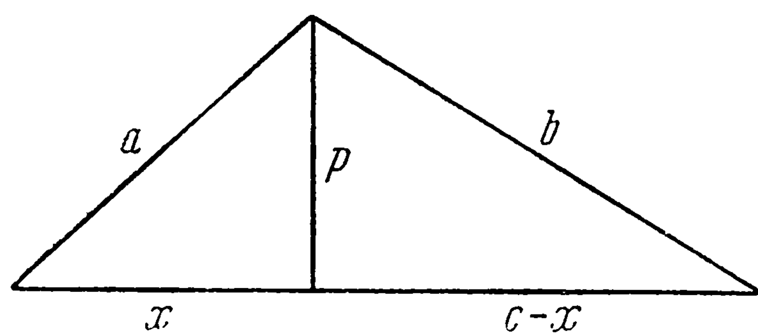
$$\frac{m}{n}z < z'; \quad \frac{m+1}{n}z > z'.$$

Итак, содержание целых чисел n, m дает с тою же точностию содержание линии x, x', с какой и содержание y к y', z к z'. Это значит, что во всяком случае

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'}.$$

Отсюда следует, что *в прямоугольных треугольниках против равных острых углов содержание боков равное.*

105. *В предположении прямых углов параллельности квадрат гипотенузы в прямоугольном треугольнике равен сумме квадратов от катетов.*



Чер. 102

Называем a, b катеты, c гипотенузу (чер. 102) в прямоугольном треугольнике. Опускаем из вершины прямого угла перпендикул p на гипотенузу, которая, таким образом, разделится на две части: одна x под a, другая $c—x$ под b. Самый треугольник разделится на два прямоугольных: один с гипотенузой a, катетами p, x; другой с гипотенузой b, катетами p, $c—x$. Сравнивая каждый из этих треугольников с данным, получим (ст. 104)

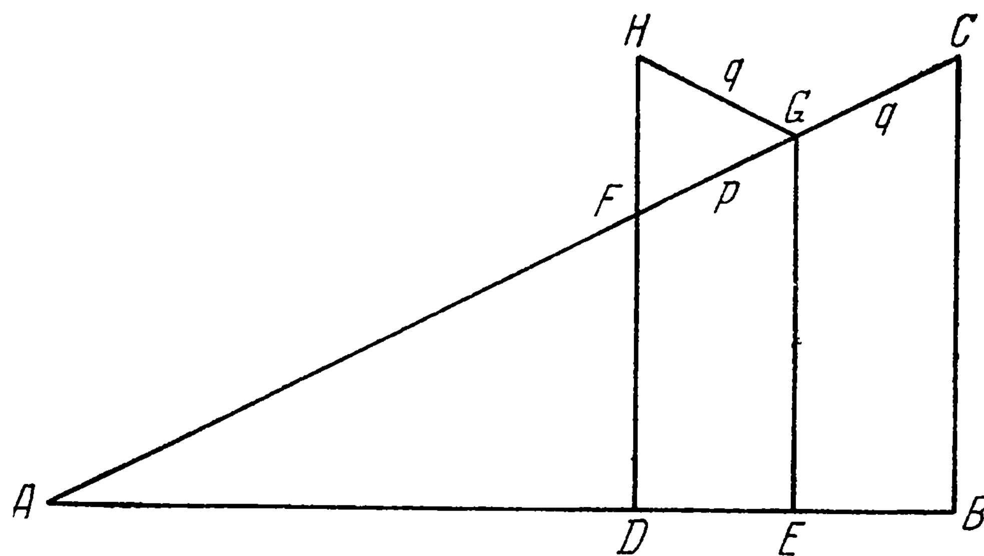
$$x = a \cdot \frac{a}{c},$$

$$c - x = b \cdot \frac{b}{c}.$$

Отсюда находим, исключив x,

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

106. *В предположении переменных углов параллельности перпендикул растет более, нежели тот бок угла, от которого перпендикул опущен; еще более, нежели тот бок, куда перпендикул падает.*

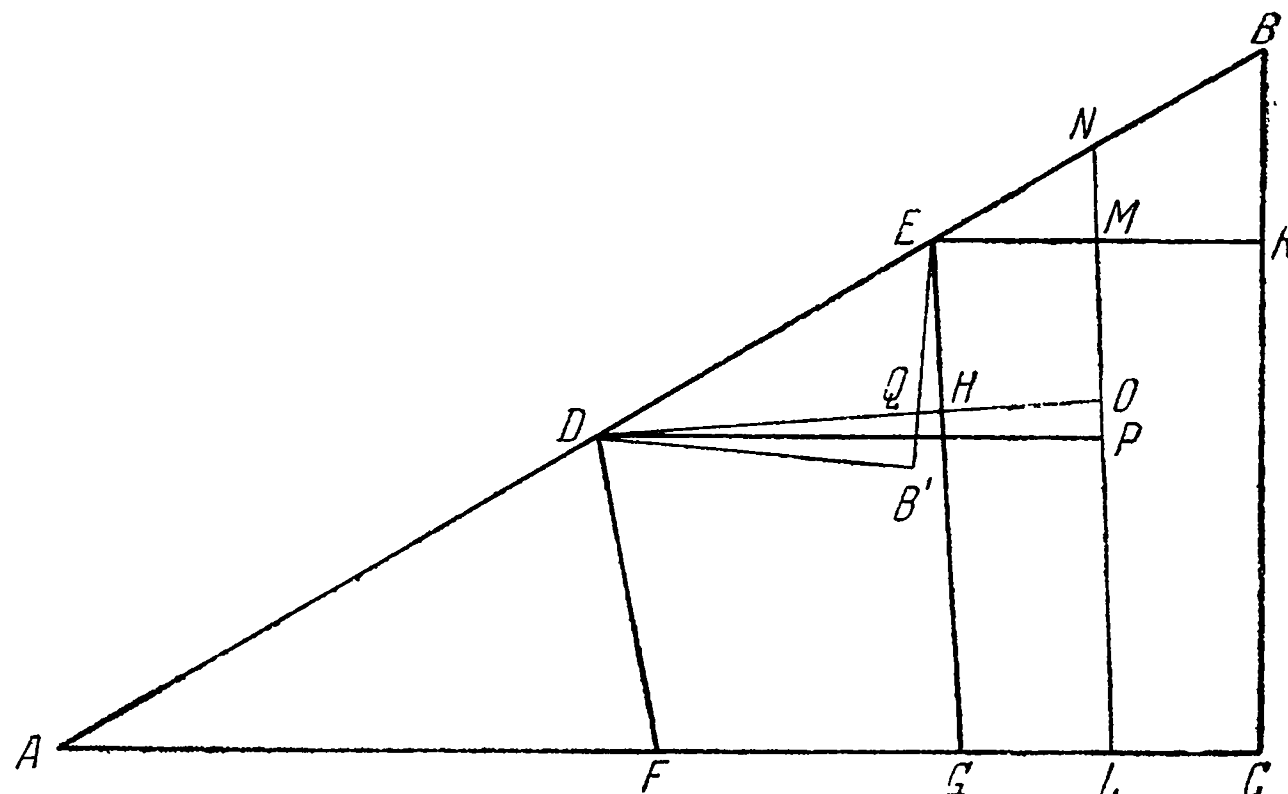


Чер. 103

Пусть на боку AB угла CAB (чер. 103) взяты три точки D, E, B, которых расстояния, первой от второй, второй от третьей, — равные. В точках D, E, B ставим перпендикулы DF, EG, BC к AB, которые пусть пересекают бок AC в точках F, G, C на расстоянии p первой от второй, q второй от третьей. Полагаем четыреугольник $GEBC$ на $FDEG$ общим боком GE и равными боками $BE=ED$. Бок BC пойдет по DF и кончится где-нибудь в H вне треугольника, потому что угол $EGC > \frac{1}{2}\pi$, $AGE < \frac{1}{2}\pi$. Произойдет треугольник FGH, где против p угол менее, нежели против q (ст. 91); следовательно, $q > p$ (ст. 54).

Пусть на боку AB (чер. 104) взяты три точки D, E, B, которых расстояния, первой от второй, второй от третьей, $DE=EB$. Из точек D, E, B опускаем к AC перпендикулы DF, EG, BC. Делаем $GH=DF$, $CK=GE$ и соединяем их концы D с H, E с K линиями DH, EK, которые должны быть наклонены

к перпендикулам под острыми углами* $FDH=DHG$, $GEK=EKC$. Делим GC пополам в L и ставим здесь перпендикул LM, который, пройдя через середину M перпендикулярно к EK, пересечет



Чер. 104

BE в N◇. С этим перпендикулом NL встречается в O продолжение DH, делая угол DOL острый (ст. 91)△, в отверстии которого падает перпендикул DP из D к LN. Теперь в прямоугольных треугольниках AEG, ABC угол $AEG>ABC$; в таких же треугольниках DPN, EMN угол $NEM>NDP$, еще более, нежели EDH. После чего $\triangle EBK$ должен принять положение

---

* Четырехугольники $FDHG$, $GEKC$ имеют прямые углы при основании и равные боковые стороны (так называемые *четырехугольники Саккери*). Согласно лемме 1 примечания [14] углы при «верхнем основании» в каждом из этих четырехугольников равные, т. е. $\angle FDH = \angle DHG$, $\angle GEK = \angle EKC$. Эти углы острые, так как в геометрии Лобачевского сумма углов во всяком четырехугольнике меньше четырех прямых (ибо четырехугольник разбивается диагональю на два треугольника, в каждом из которых сумма углов меньше двух прямых).

◇ См. лемму 1 примечания [14].

△ Так как в четырехугольнике $GHOL$ углы G и L прямые, а угол GHO — тупой (ибо угол DHG — острый), то четвертый угол должен быть острым.

DEB', когда переносим его боком BE на равный DE, так что BK, сделавшись EB', пересечет DH где-нибудь в Q между E, B'; следовательно, $BK = EB' > EQ$, $> EH$.

107. *В предположении переменных углов параллельности квадрат гипотенузы в прямоугольном треугольнике более суммы квадратов от двух катетов.*

Пусть c — гипотенуза (чер. 102), a, b — катеты, p — перпендикул из прямого угла на гипотенузу, которую делит на две части: x под a, $c-x$ под b. Основываясь на доказанном выше, находим из сравнения треугольников

$$x > a \cdot \frac{a}{c},$$

$$c - x > b \cdot \frac{b}{c}.$$

Из соединения двух неравенств заключаем

$$c^2 > a^2 + b^2.$$

108. *В предположении переменных углов параллельности две линии, перпендикулярные к одной третьей, чем более продолжаются, тем более расходятся; так что перпендикул от одной к другой растет до бесконечности.*

Пусть AB,CD (чер. 105) перпендикулярны к AC. От каких-нибудь точек B, E одной опускаем перпендикулы EF, BD к другой CD, потом из точки A к ближнему EF ведем перпендикул AG, который продолжаем за точку G, покуда пересечет BD в H, делая угол $GHD < \frac{1}{2}\pi$*. Продолжение GH за точку H дает вершинный угол BHK, также острый, и, следовательно, здесь падает к HK перпендикул $BK < BH$. Между тем, полагая $AB = a$, $AE = b$, $EG = c$, находим (ст. 106)

$$BK > c \cdot \frac{a}{b}.$$

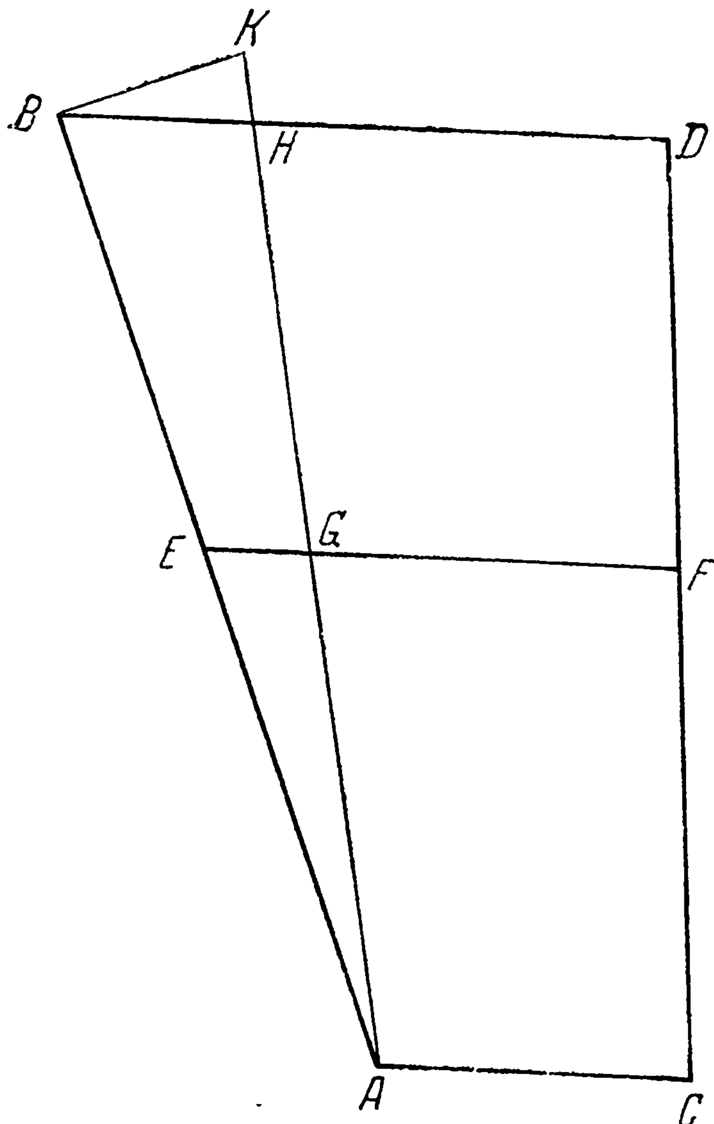
---

* В четырехугольнике $GHDF$ три прямых угла и потому четвертый — острый (четырехугольники этого вида называют трипрямоугольниками или четырехугольниками Ламберта).

и тем сильнее

$$BH > c \cdot \frac{a}{b}.$$

Легко видеть, что $EF > AC$, $HD > GF$*, потому что всегда равные перпендикулы наклонены под острым углом к линии, которая соединяет их вершины, тогда как один перпендикул прибывает вместе с возрастанием угла при другом◊. Итак,



Чер. 105

$$BD > HD + c \cdot \frac{a}{b} > EF + c \cdot \frac{a - b}{b}^{\triangle}.$$

Откуда следует, что $AB = a$ всегда можем предполагать довольно большое расстояние, чтобы перпендикул BD сделался более всякой данной линии.

Заметим еще, что здесь $AB > CD$, а следовательно, CD также всегда можно взять довольно большое расстояние, чтобы BD делалось более данной линии.

Обратно заключаем, что какой бы перпендикул BD к CD ни был, всегда можем от него поставить так далеко другой AC,

---

* В оригинале вместо $HD > GF$ напечатано $BD > EF$ — неравенство верное, но не то, которое используется ниже. Здесь сделано изменение.

◊ Отложим на прямой FE отрезок $FE' = AC$. Тогда мы получим четырехугольник Саккери $ACFE'$ (см. сноску* на стр. 232), и потому угол CAE' — острый. Из этого следует, что точка E' лежит внутри отрезка EF (ибо угол CAE прямой), т. е. $EF > AC$. Аналогично доказывается, что $HD > GF$.

△ $BD = HD + BH > HD + c \cdot \frac{a}{b}$; $HD > GF = EF - c$.

чтобы к нему перпендикул из вершины первого падал как угодно близко к CD*.

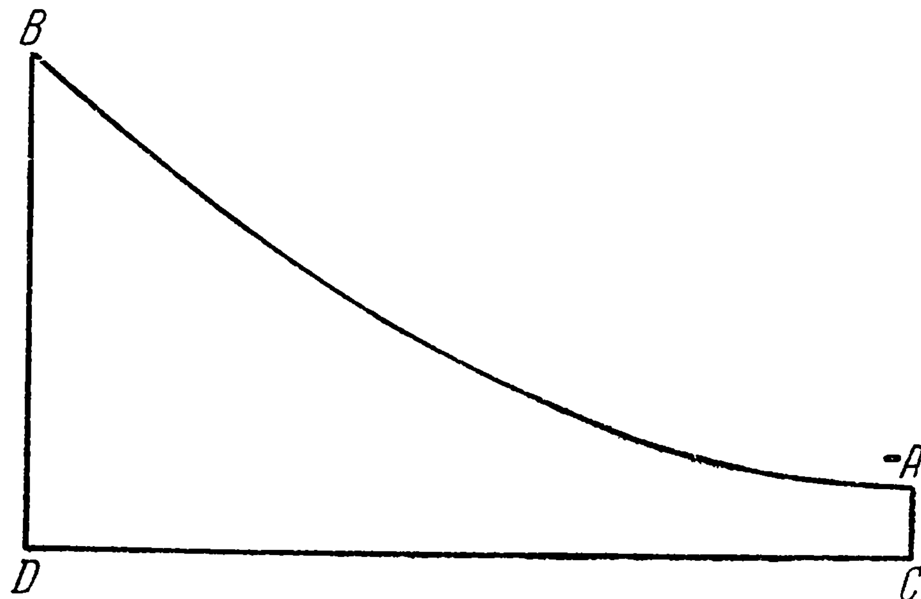
109. *В предположении переменных углов параллельности расстояния между двумя параллельными как в одну сторону растут, так уменьшаются в другую беспредельно.*

Пусть AB параллельная с CD (чер. 106), к которой из точек A, E на первой опущены перпендикулы AC, EF; следовательно, углы BAC, BEF острые. Продолжаем EF за точку E и ведем в отверстии острого угла AEG перпендикул AG к GF, который всегда можно сделать вместе с EF как угодно малым, увеличивая CF (ст. 108).

Напротив, когда продолжаем AE, AG за точку A, то продолжение AE' первой линии будет еще более расходиться с CF, нежели AG', продолжение AG, от которого, как видели, перпендикулы к CF растут до бесконечности.

---

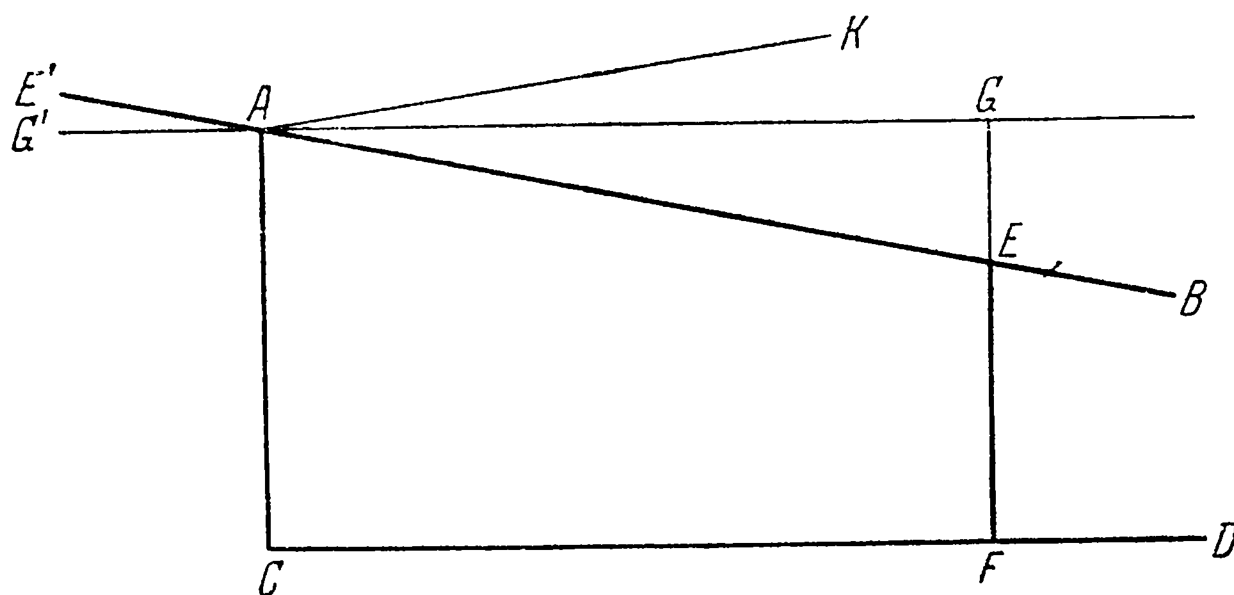
* Иначе говоря, какой бы отрезок BD ни был задан, всегда существует четырехугольник $ABDC$ с прямыми углами при вершинах A, C, D, у которого сторона AC как угодно мала (см. черт. 105а). В самом деле,



Черт. 105а.

выберем произвольно малый отрезок $A_1C_1 \equiv AC$ и построим в конце его перпендикуляры A_1B_1 и C_1D_1. Если $B_1D_1 \perp C_1D_1$, то B_1D_1 растет неограниченно при удалении точки D_1 от C_1 и, в силу непрерывности, наступит момент, когда B_1D_1 станет равным BD. Совместив D_1 с D и C_1 с C, мы и докажем теорему.

Вот почему назвали мы линии разводными (ст. 93), как скоро не принадлежат они к параллельным или к таким, которые пересекаются. Действительно, когда линия AK делает с AB угол, то перпендикулы к AB от ее точек растут в направлении к концу K. Тем более то же должно сказать о перпендикулах к CD, когда AK делает угол $KAC < \pi$, но более, нежели BAC.



Чер. 106

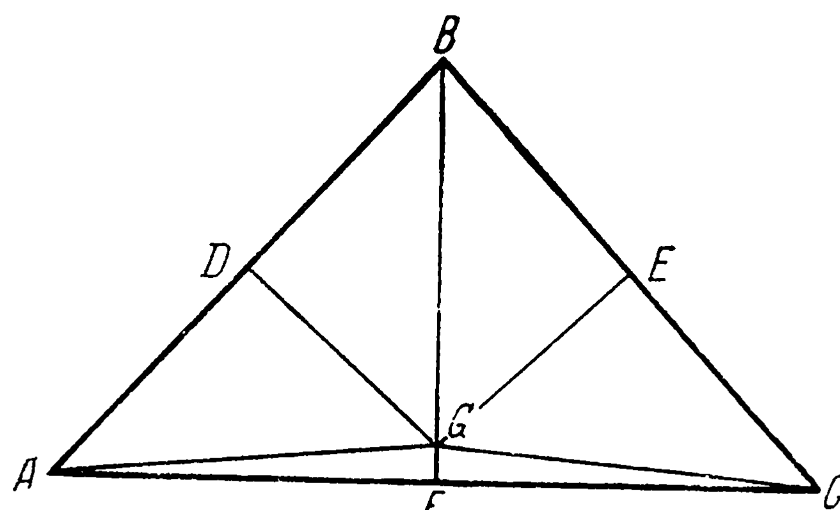
Итак, надобно различать *сторону параллельности*, где параллельные сближаются, от *стороны развода*, в которую расстояния двух параллельных увеличиваются до бесконечности [[67]].

110. *Перпендикулы в середине к бокам треугольника пересекаются в центре круга, который проходит чрез острия, и* потому называется *круг около треугольника**. *Пересечение перпендикулов необходимо для всякого треугольника, как скоро в нем сумму трех углов предполагаем* π.

В $\triangle ABC$ (чер. 107) к бокам AB, BC, AC из их средин D, E, F ставим перпендикулы DG, EG, FG. Пусть первые два сходятся в точке G, производя равнобедренные треугольники AGB, CGB (ст. 52), которым расстояния AG, BG, CG точки G

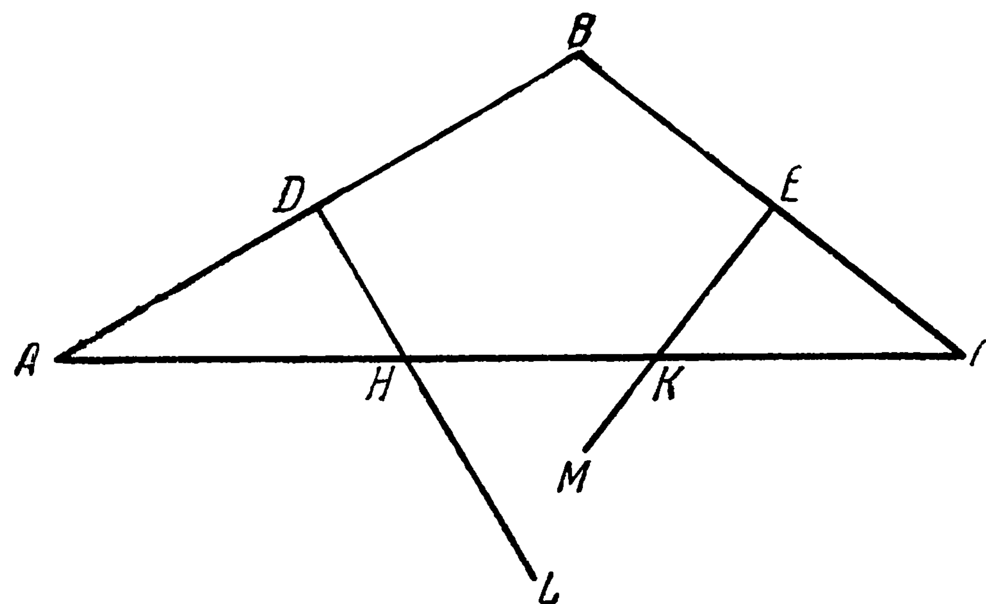
* Точнее была бы такая формулировка: если два указанных перпендикуляра пересекаются, то третий проходит через точку их пересечения, которая является центром описанного круга.

до трех остриев треугольника ABC служат равными боками. Итак, этим расстоянием описанный круг из центра G будет круг около треугольника ABC. В равнобедренном треугольнике AGC перпендикул FG должен также приходить в центр G круга (ст. 52).



Чер. 107

Если предполагаем угол параллельности постоянно прямым, то перпендикулы всегда будут пересекаться. Чтоб это доказать, принимаем в рассуждение только те два бока AB, BC (чер. 108), против которых лежат острые углы C, A. Пусть перпендикулы DL, EM к бокам AB, BC из их середины проходят через плоскость треугольника*, не встречаясь здесь, но пересекая третий бок AC в точках H, K◇, так что продолжения HL, KM перпендикулов составят с линией HK между ними на боку AC углы LHK, MKH, равные с углами DHA, EKC в прямоугольных треугольниках ADH, KCE. С такими наклонениями к HK линии HL, KM должны непременно пересекаться (ст. 101).



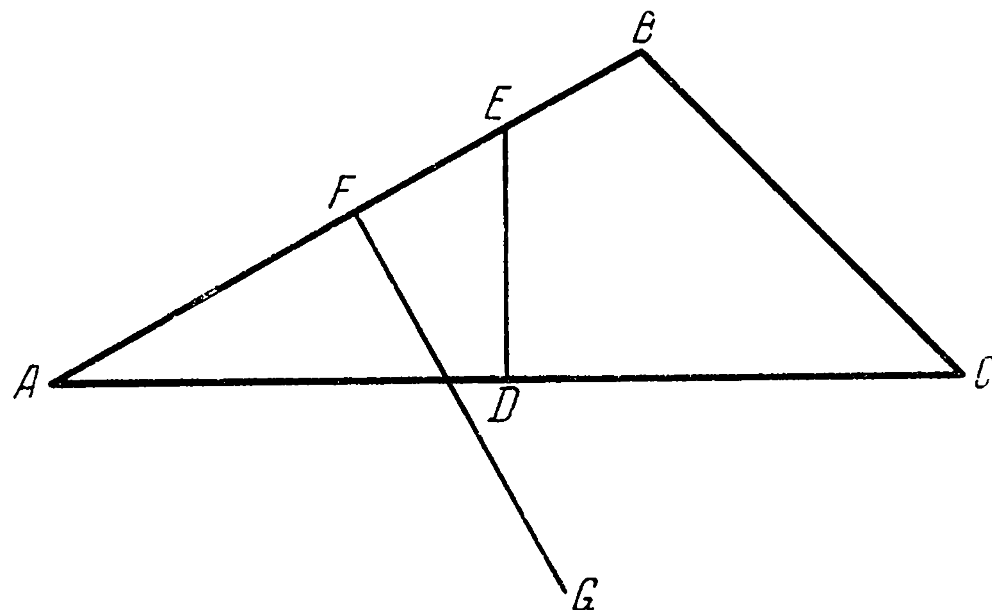
Чер. 108

* Т. е. внутри.

◇ Проведем среднюю линию DE. Так как углы A и C острые, то соответственно равные им углы BDE, BED также острые, откуда следует, что перпендикуляры DL, EM идут ближе к основанию AC, чем средняя линия DE. Таким образом, эти перпендикуляры входят в трапе-

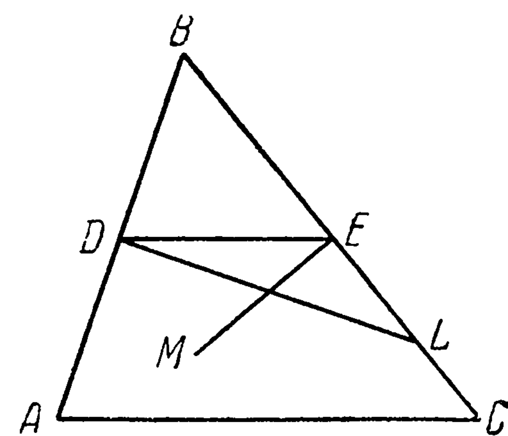
111. *С предположением переменных углов параллельности перпендикулы из средины к бокам треугольника могут сходиться, либо расходиться, либо все три быть параллельными*.*

В треугольнике ABC (чер. 109), где углы A, C острые, перпендикул DE к AC из средины D, проходя через плоскость треугольника, должен или встретить два другие бока в общей точке, или по крайней мере, больший из боков AB где-нибудь в E. Пусть, далее, FG — перпендикул к AB в середине F, которой расстояние $FE=a$ до точки E. Когда F случится между точек A, E, притом угол $FED<\Pi(a)$, то перпендикул FG необходимо пересечет другой ED где-нибудь в их продол-



Чер. 109

цию $ADEC$. Покажем, что выйти из нее они могут только через основание AC. Действительно, допустим, что перпендикуляр DL пересекает отрезок EC в некоторой точке L (черт. 108а). Тогда прямая EM входит внутрь треугольника DEL и потому должна пересечь сторону DL (примечание [2]), а это означает, что перпендикуляры DL, EM пересекаются внутри треугольника ABC (вопреки предположению). Поэтому перпендикуляр DL не может пересечь отрезка EC и, следовательно, пересекает сторону AC. Точно так же, сторону AC пересекает и перпендикуляр EM. Таким образом, существование точек пересечения H, K обосновано.

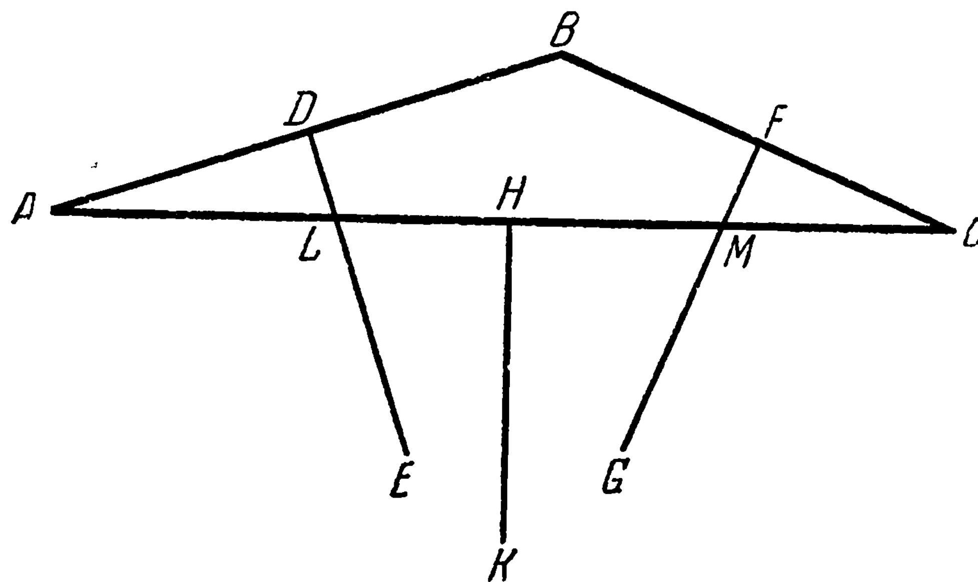


Черт. 108а.

* Формулировка теоремы может быть уточнена добавлением того, что в первом случае перпендикуляры пересекаются в одной точке, во втором случае они имеют общий перпендикуляр, а в третьем случае они параллельны в одном направлении (см. примечание [68]).

жении (ст. 102), куда, следовательно, придет и перпендикул от средины третьего бока BC. Если ж $FED \geqslant \Pi(a)$, то перпендикулы FG, DE не сойдутся, а следовательно, пересечение с третьим тоже сделается невозможным. Будем теперь доказывать, что параллельность двух из них всегда бывает соединена с параллельностью всех трех.

Пусть в $\triangle ABC$ (чер. 110) выходят DE, FG из средин D, F перпендикулярно к бокам AB, BC против острых углов A, C, не встречаясь внутри треугольника с перпендикулом HK из средины H к боку AC. Это будет тот случай, когда DE, FG, пройдя через треугольник, пересекут третий бок AC в точках L, M, между которыми заключается начало H перпендикула HK Таким образом, вне треугольника ABC отрезки LE, MG перпендикулов DE, FG будут наклонены к LM под острыми углами ELH, GMH. Если предположим DE с FG параллельными, то HK также с ними не встретится, но, будучи помещена между той и другой, должна быть необходимо параллельной. Действительно, когда бы возможно было провести другую параллельную из H к LE, а следовательно, к MG (ст. 99), то HK встречалась бы с одной из параллельных LE, MG*.



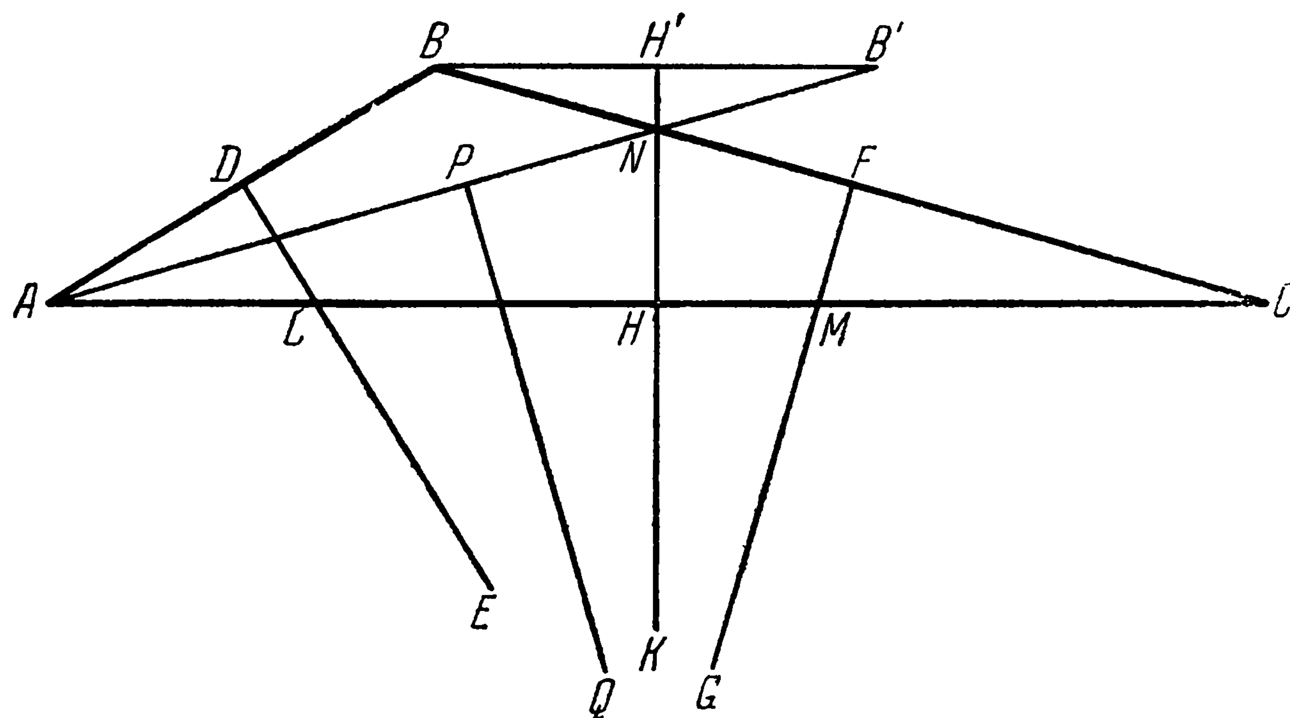
Чер. 110

Если предположим DE с HK параллельными, то надобно различать три случая: $AB = BC$, $AB < BC$, $AB > BC$. В первом

* Дальнейшее доказательство приведено значительно проще в сочинении Лобачевского «Геометрические исследования», см. стр. 43—45 настоящего издания. По поводу конфигурации, изображенной на черт. 110, см. примечание [11]. Весьма простое доказательство предложения 111 дано в примечании [68].

из них угол $HLE = HMG$; следовательно, MG, так же как LE, параллельна с HK.

В случае $AB < BC$ перпендикул HK (чер. 111) внутри треугольника ABC пересекает бок BC где-нибудь в N. Ведем от



Чер. 111

A к этой точке линию AN, которой продолжение NB' за N делаем равно NB, составляя, таким образом, равнобедренный треугольник BNB', где через середину H' основания BB' пройдет перпендикулярно HN. Теперь в $\triangle ABB'$ два перпендикула DE, $H'K$ выходят из средины боков AB, BB' параллельно друг к другу, следовательно, также параллельно к перпендикулу PQ из средины третьего бока AB'; а как угол $PNK = FNK$, то FG должна быть параллельна с HK.

В случае $AB > BC$ (чер. 112) перпендикул HK, в середине к AC, пересекает AB в точке N, потом на половине в H' перпендикулярно линию BB', которую находим, проведя CNB' через N и сделав $NB' = NB$. Когда теперь ставим DE, PQ перпендикулярно к AB, $B'C$ в середине к D, P, то получим угол $PNK = DNK$, а следовательно, три линии DE, NK, PQ должны быть все три параллельны. Так, в $\triangle B'BC$ два перпендикула $H'K$, PQ выходят из середины боков BB', $B'C$; третий перпендикул FG к боку BC в середине F будет также параллелен с KH',

как скоро $BB' < BC$. В противном случае, положив $AB = a$, $NP = b$, находим

$$\begin{aligned} BB' &= 2BH' \\ &< 2BN \\ &< 2DB - 2ND \\ &< a - 2NP \\ &< a - 2b. \end{aligned}$$

Пусть PQ пересекает AC в точке R, перпендикул из P к $H'K$ падает в точке S: будет $NP > PS, > HR$ (ст. 109). Продолжая переходить все к новому треугольнику, так же как от $\triangle ABC$

Чер. 112

перешли к $\triangle B'BC$, вместе с этим будем заменять бок BB' линией менее, нежели $a - 2c - 2b < a - 4c$, потом линией $< a - - 6c$ и, наконец, с этим уменьшением дойдем до линии $< BC$, следовательно, придем к тому случаю, для которого доказано было, что FG параллельная с HK [68].

Глава VIII

ЛИНИЯ, ПОВЕРХНОСТЬ И ТРЕУГОЛЬНИКИ ПРЕДЕЛЬНЫЕ

112. С предположением переменных углов параллельности можем представлять себе кривую, которую назовем *предельная*, где всякие две параллельные к одной данной бывают наклонены под одним углом к хорде.

Из конца A линии AB (чер. 113) ведем во всех направлениях линии AC под острым углом CAB к данной AB. Переменный угол CAB можем принимать за $\Pi(a)$ с принадлежной к нему линией a от $a = 0$ до $a = \infty$ (ст. 102). Делая теперь $AC = 2a$, получим точки C на предельной. В ней, следовательно, все линии CD, параллельные с AB, наклонены к AC снова под углом $\Pi(a)$, под каким проведена была AC к AB. Перпендикул EF в середине к хорде AC будет также параллелен с CD; следовательно, перпендикул GH ко всякой другой хорде CC в середине G должен также быть параллелен с AB [и с CD] (ст. 111). Эту последнюю, которая не различается, таким образом, с AB и со всеми CD, назовем *ось* предельной кривой*.

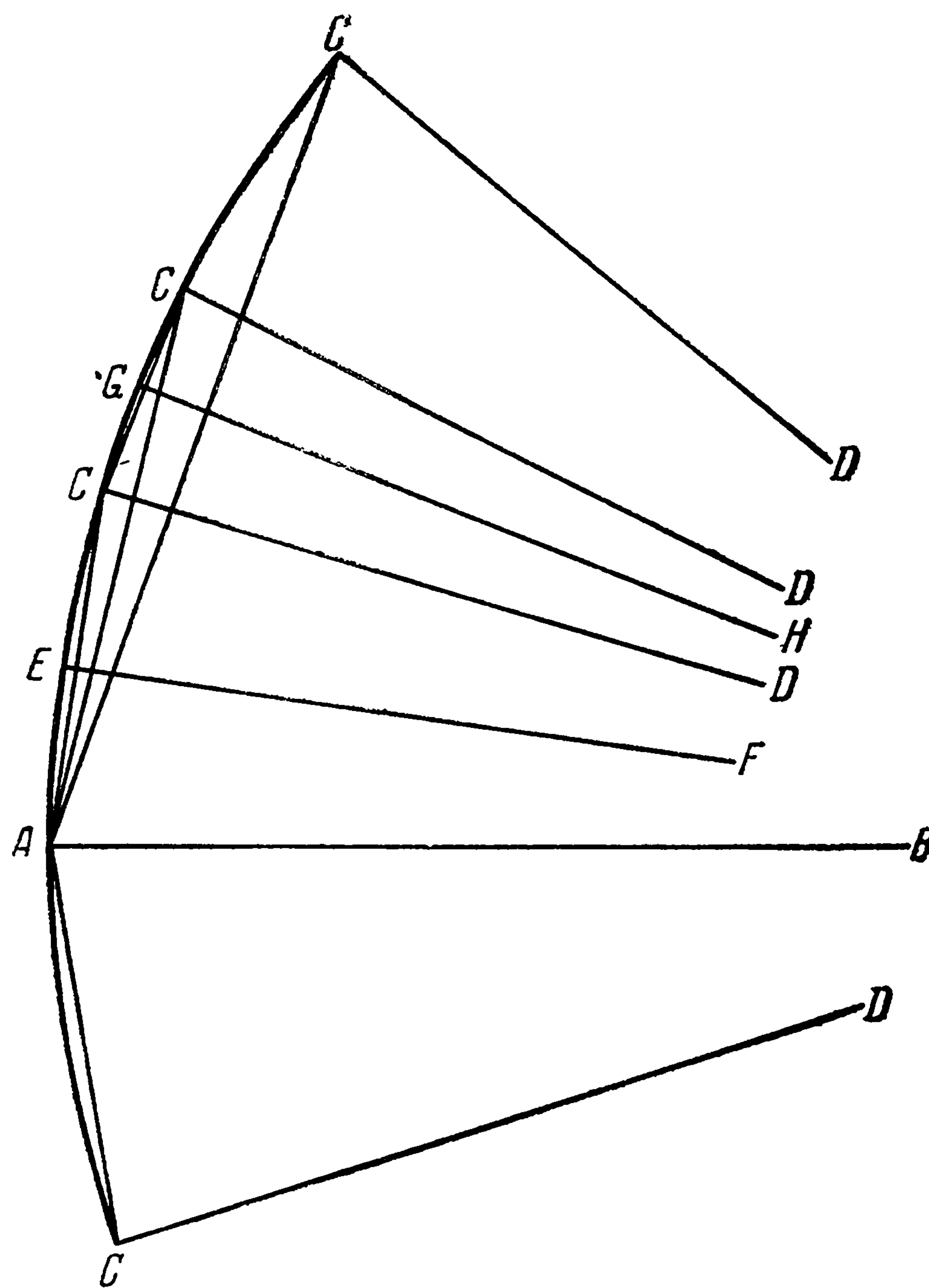
Первое свойство, которое само собой в предельной теперь представляется, будет то, что дуги сливаются с кривой, куда бы на нее ни переносились, как скоро то же бывает с осями, даже в том случае, когда плоскость оборачивается другою стороной. Это свойство дуг на предельной указывает на самый

---

* Подробное изложение свойств предельной линии см. в примечаниях [12], [13] к сочинению «Геометрические исследования».

способ измерения, когда сравниваем их одну с другой, подобно тому, как находим содержание прямых линий и линейных углов.

Другое свойство предельной заметим еще то, что перпендикул из середины к хорде всегда параллелен с осью. Отсюда следует, что круг, встречаясь с предельной, может быть или касательным, или пересекать не более как в двух точках. Первый случай будет тот, когда круг проходит через конец той оси, где лежит его центр. Пересечение предельной с кругом в двух точках необходимо, когда первую, которой хорды растут бесконечно, ведем внутри плоскости круга. Наконец, пересечение предельной с кругом в трех точках невозможно, потому что хорды первой составляют такие треугольники, около которых нельзя начертить круга (ст. 111).

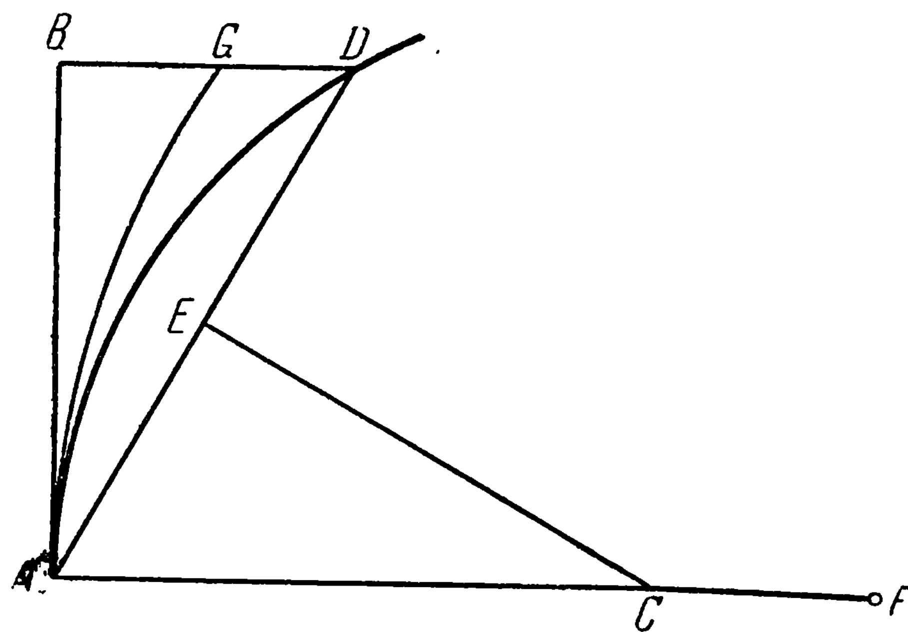


Чер. 113

113. *В предположении прямых углов параллельности круг с возрастанием поперечника переходит в прямую линию.*

Пусть AB — прямая (чер. 114), к которой AC, BD — перпендикулы. Как бы мала линия BD ни была, всегда можем найти круг, который, проходя чрез один конец A данной линии AB, находится на расстоянии BD от другого B. Стоит только

прямую AD разделить в E пополам и здесь поставить к ней перпендикул EC, который уже пересечет AC в центре такого круга.



Чер. 114

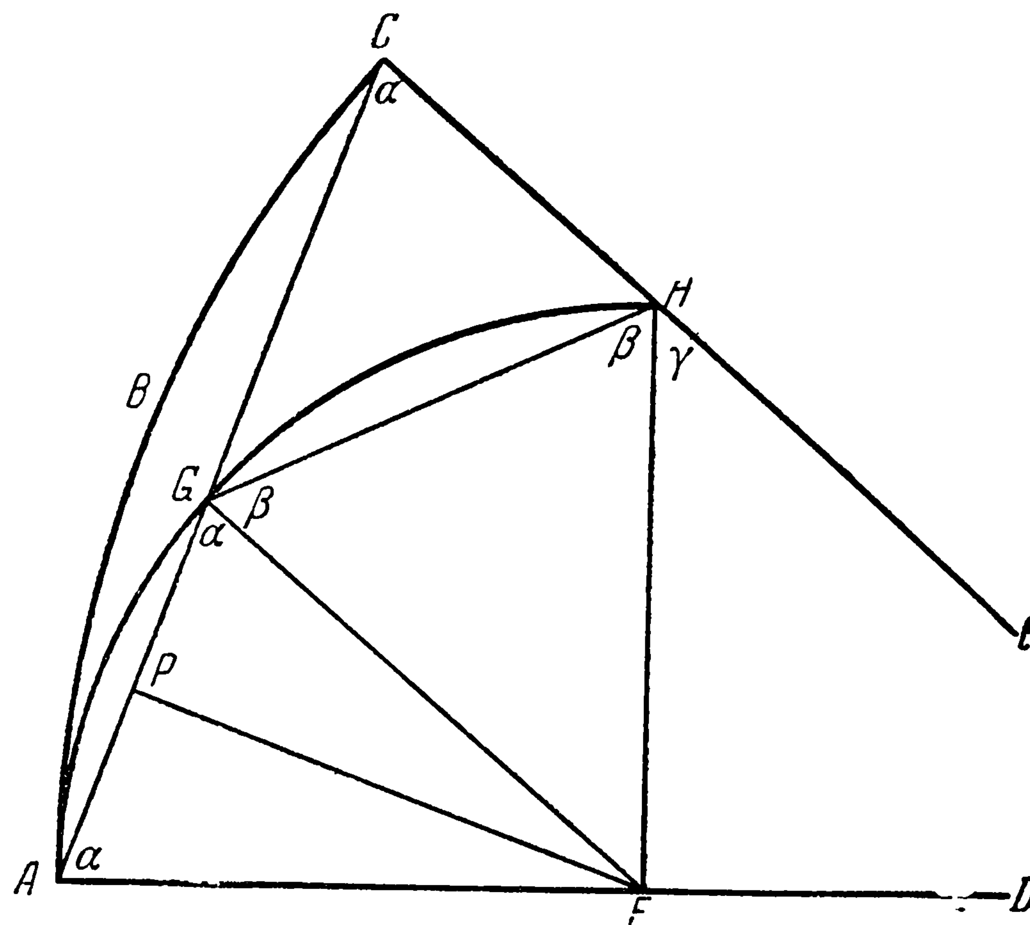
Если, продолжив AC за точку C, берем здесь где-нибудь центр F, то круг, описанный полупоперечником AF, пересечет BD в точке G между крайних B, D. Отсюда видно, что с возрастанием поперечника AC круг AD приближается к его касательной AB до того, что расстояния между ними наконец исчезают.

114. *В предположении переменных углов параллельности круг с возрастанием поперечника переходит в предельную кривую.*

Пусть ABC (чер. 115) — предельная, AD, CE — оси, которые с хордой AC составляют равные углы α (ст. 112) и которых расстояния на стороне параллельности, как мы знаем (ст. 109), уменьшаются, делаясь, наконец, менее всякой данной линии. Можем, следовательно чертить круг около точки F на оси AD с таким большим полупоперечником AF, чтобы пересечь не только хорду AC в точках A, G, но даже другую ось CE где-нибудь в H. Тогда два полупоперечника AF, GF с хордой AG круга будут делать углы α; два полупоперечника GF, HF будут наклонены к хорде между ними GH под каким-нибудь углом β, а последний полупоперечник HF к оси CE — под углом γ внутри круга. В $\triangle$ CGH произойдут углы $CGH = \pi - \alpha - \beta$, $CHG = \pi - \beta - \gamma$, где α — постоянный, β и γ переменяются с движением точки F, которую всегда можно взять так далеко, чтоб угол γ выходил менее всякого данного*, даже в том случае,

* См. сноску $^{\triangle}$ на стр. 47—48.

когда бы точка H сохраняла свое место, того менее, следовательно, когда с возрастанием полупоперечника в круге она приближается к концу C оси. Итак, пусть $\alpha > \gamma$, после чего $\pi - \beta - \alpha < \pi - \beta - \gamma$, линия $CH < CG$; но последняя может быть сделана



Чер. 115

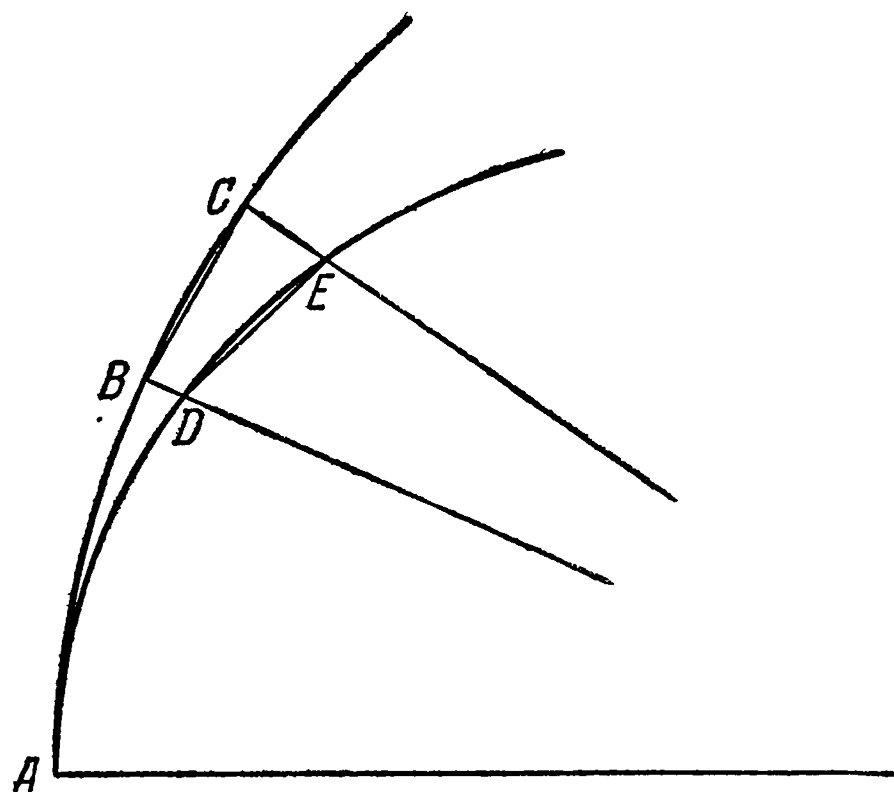
как угодно малой, потому что перпендикул из середины P к AG пересечением с AD назначает всегда центр круга для всякой хорды $AG < AC$.

Предельную кривую, так же как и прямую линию (ст. 113) можно, следовательно, принимать за круг с бесконечным полупоперечником, смотря по тому, которое из двух предположений об углах параллельности захотим допускать.

115. *Хорды двух дуг, на предельной и на касательном к ней круге, тем менее разнятся, чем поперечник круга более, так что с возрастанием поперечника разность, наконец, исчезает.*

Пусть ABC (чер. 116) — предельная, ADE — к ней касательный круг, оси CE, BD, начинаясь из двух точек B, C на

предельной, пересекают круг в D, E, вырезывая дуги BC предельной и DE круга, которым отвечают хорды $BC = \alpha$, $DE = \beta$, соединенные частями двух осей $CE = \gamma$, $BD = \delta$. В четыреугольнике $BDEC$ (ст. 55)



Чер. 116

$$\alpha < \beta + \gamma + \delta,$$
$$\beta < \alpha + \gamma + \delta.$$

Отсюда следует, что разность $\alpha - \beta$ по величине менее суммы $\gamma + \delta$, где как γ, так δ с возрастанием полупоперечника может быть сделана менее всякой данной линии (ст. 114).

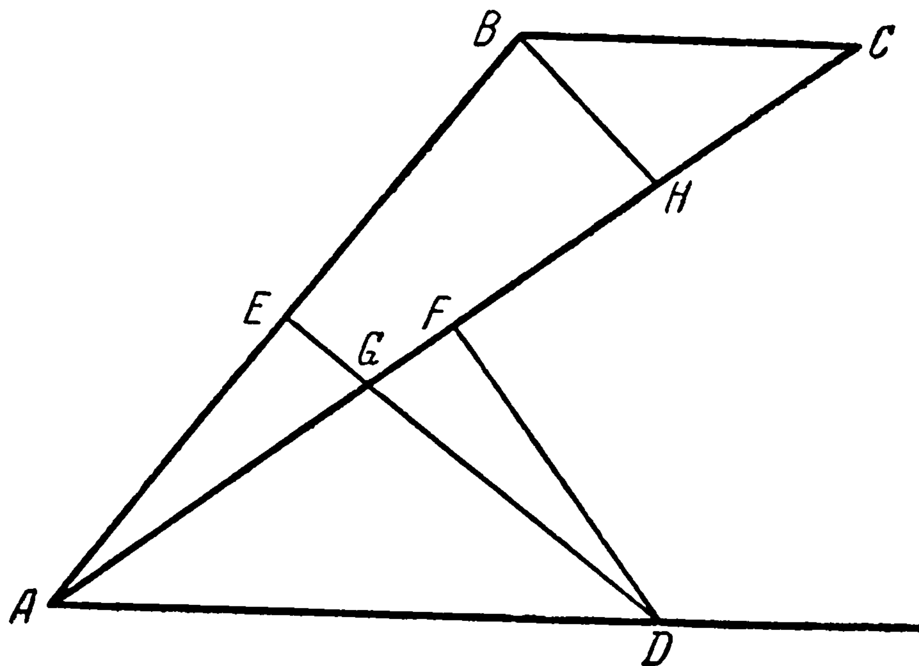
В этом предложении можем предельную разуметь как прямой, так и кривой линией.

116. *Содержание двух дуг на предельной тем менее разнится с содержанием двух дуг на касательном круге между двух осей, чем поперечник более, с возрастанием которого разность, наконец, исчезает.*

Содержание двух дуг на предельной, так же как и на круге, будет найдено, когда разделяем их обе на равные части (ст. 112). Пусть таким частям отвечает на предельной хорда $BC = \alpha$ (чер. 116), которую переносим на касательный круг ADE, положив от точки D, где проходит ось от конца B хорды BC, тогда как от другого конца C в точке E ось отрезывает дугу с хордой $DE = \beta$ на касательном круге.

Пусть теперь в этом положении две хорды будут $AB = \alpha$ (чер. 117), $AC = \beta$, точка D — центр касательного круга, откуда перпендикулы DE, DF падают в середины E, F двух линий AB, AC, составляя прямоугольные треугольники AED, AFD, где угол EAD более FAD или менее, или равен, смотря по тому,

$\alpha<\beta, =\beta, >\beta$. Мы предположим, что α с β не равны, притом $\alpha<\beta$, так как тот или другой случай не делает разности в доказательстве. Перпендикул DE должен, следовательно, пересекать AF где-нибудь в G, так что $AG>AE$, после чего $2\,FG<2\,AF-2AE<\beta-\alpha$. Отсюда заключаем, что расстояние FG может быть сделано как угодно малым с увеличением полупоперечника AD (ст. 115). Далее, сравнивая прямоугольные треугольники AEG, DFG и положив GF на GE, GD на GA, легко видим, что как скоро $GD>AG$, то $GF>GE$. Между тем, $AG+GD>AD$, тогда как AG может разниться с AE менее, нежели всякая данная линия; следовательно, с увеличением AD достигаем, наконец, и того, что AG сделается менее GD, а вместе с тем $EG<GF$. Итак, с возрастанием полупоперечника AD перпендикул EG и с ним угол EAG исчезают. Теперь, сделав $AH=AB$, получим треугольник HBC, где, как видели (ст. 115), с возрастанием полупоперечника AD бок HC уменьшается беспредельно; другой бок BH тоже с исчезанием угла BAH; третий $BC<BH+HC$, наконец, может составлять менее, нежели $\frac{1}{m}$ часть хорды AC, как бы целое число m ни было велико. В таком случае содержание хордам BC, AC соответственных углов при центре круга будет еще менее разниться*, нежели дробь $\frac{1}{m}$; следовательно, полагая хорду α на касательном круге, должны



Чер. 117

* Слово «разниться» излишне.

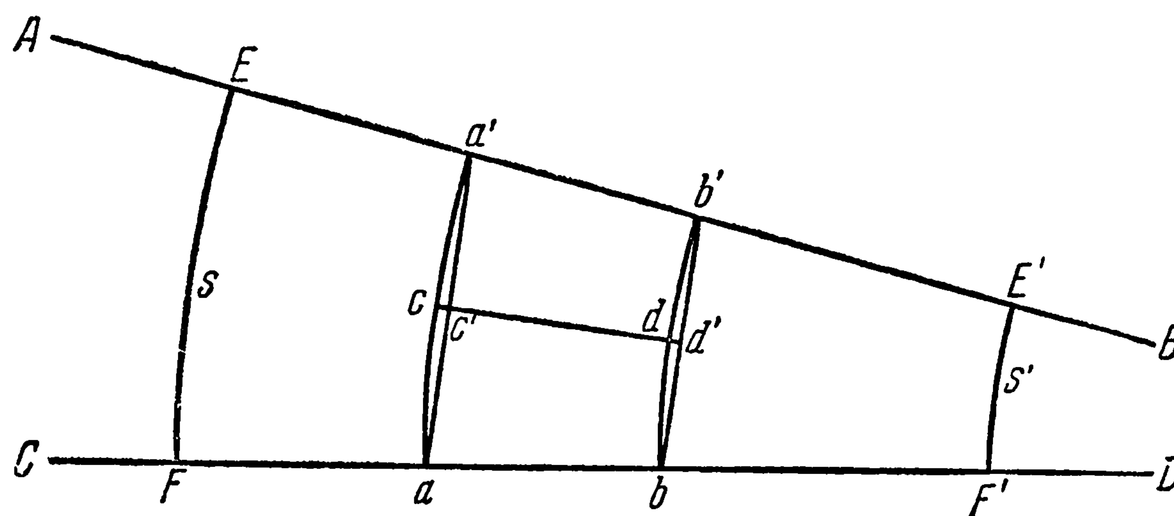
получить то же содержание двух дуг, какое было найдено для дуг на предельной между тех же осей [69].

117. *Содержание двух дуг* s, s' *на предельных кривых между двумя параллельными, которые служат им осями, зависит от их расстояния* x *так, что*

$$s = s'e^x, \tag{6}$$

где постоянное $e > 1$, когда s' отступает от s по направлению параллельности.

Пусть AB, CD (чер. 118) — две параллельные, которые служат осями дугам $EF = s$, $E'F' = s'$ между ними на предельных



Чер. 118

кривых, так что s' в отношении к s лежит на стороне параллельности (ст. 109). Полагаем расстояние $FF' = EE' = x$ (ст. 112), которое пусть подразделяется на равные линии ab, взятые за единицу, в числе x. Заметим, что содержание e той дуги, которая выходит из точки a на оси, к дуге, которая выходит из другой точки b, должно быть постоянное, на какой бы параллельной cd, $a'b'$ с ab две дуги ни кончились. Действительно, когда содержание e выражаем дробью $\frac{n}{m}$ с целыми числами n, m далее, содержание двух дуг ac, $a'c$ на одной предельной почитаем за содержание целых p, q, то, разделив ac на np, ca' на nq равных частей, потом от точек деления ведя параллельные с ab, получим на соответственных дугах bd, db' равных частей np, nq; откуда

заключаем, что содержание дуги ac к $a'c$ то же $\frac{p}{q}$, как и дуг bd к $b'd$. Доказав это, когда представляем теперь все расстояние FF' разделенным на x равных частей, потом от всякой точки деления воображаем дуги предельных между двух осей AB, CD, то, переходя по порядку от первой s ко второй, к третьей и так далее, получим $e^{-1}s$, $e^{-2}s, \ldots$, покуда на расстоянии $FF' = x$ придем к дуге $s' = se^{-x}$ *.

Здесь число e надобно почитать более единицы, с тем чтобы следующая дуга s' на стороне параллельности в отношении к s выходила менее, нежели s. Так, пусть направление параллельности двух линий AB, CD будет от концов A, C к B, D; ведем где-нибудь от AB к CD две дуги предельных aa', bb', разделенные пополам в точках c, d, чрез которые, следовательно, должна пройти $c'd'$, новая параллельная с ab, на половинах c', d' перпендикулярно к хордам двух дуг. Здесь перпендикул $ac' > bd'$, далее самые хорды $aa' > bb'$, как скоро bb' на стороне параллельности в отношении к aa' (ст. 109). Между тем, происхождение предельной требует, чтобы с возрастанием хорды увеличивалась и самая дуга (ст. 112), следовательно, дуга $aa' > bb'$.

Выбор единицы для прямых линий совершенно произволен, а потому можно почитать e также каким угодно числом, лишь бы $e > 1$, каково, например, основание непперовых логарифмов.

Если два предположения в отношении к углам параллельности должны заключаться в общих выражениях, то надобно число e оставлять неопределенным, с тем чтоб $e > 1$ относилось к одному, $e = 1$ — к другому предположению. Так, уравнение (6) для прямых углов параллельности, следовательно, для $e = 1$, дает $s = s'$ или равенство перпендикулов между двумя параллельными.

Число e в том и другом предположении дозволяется также почитать определенным, принимая, например, его за основание

---

* Аналогичное рассуждение, проведенное Лобачевским в его «Геометрических исследованиях» (стр. 48—49 настоящего издания), было обстоятельно разъяснено в примечаниях [14], [15].

непперовых логарифмов, но тогда все линии в Употребительной Геометрии делаются бесконечно малыми, так что во всех уравнениях они войдут только в их содержании друг к другу. Например, уравнение (6) для $x=0$ дает снова $s=s'$, равенство перпендикулов между параллельными.

118. *Предельная поверхность* дает предельную линию в пересечении с плоскостями, проведенными через одну прямую, которую назовем *ось*, а самые плоскости — поперечными *.

Отсюда следует, что предельная поверхность должна быть тою границей, к которой приближается сфера с возрастанием поперечника, тогда как большие круги на сфере переходят в предельную линию.

Предельную поверхность можно, следовательно, представлять себе как поверхность от обращения предельной линии на своей оси. В предположении прямых углов параллельности предельная поверхность будет плоскость; в другом предположении надобно принимать ее за кривую поверхность.

119. *Плоскость пересекает предельную поверхность либо в предельной линии, либо в круге, смотря по тому, проходит или нет через параллельную с осью*◊.

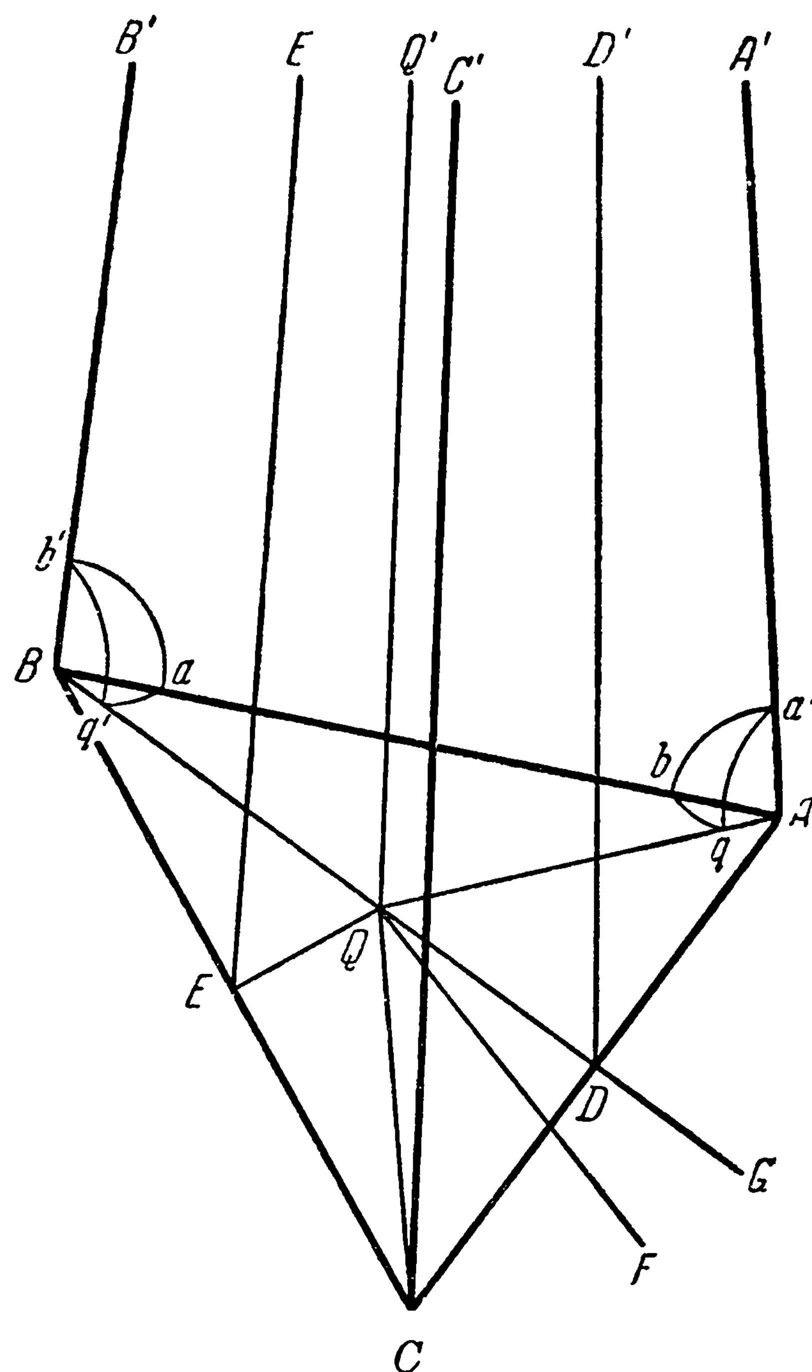
Пусть A, B, C (чер. 119) — три точки на предельной поверхности. Из A выходит ось AA'; другие две B, C не лежат с A в одной предельной линии. Воображаем от них BB', CC', параллельные с AA' в одну сторону плоскости треугольника ABC; следовательно, все три линии AA', BB', CC'— параллельными между собой, а каждые две — в одной плоскости (ст. 99). Разделив AC пополам, ведем из середины D параллельную DD' с AA', потом в плоскости треугольника ABC к AC перпендикул QD, которого величину берем такую, чтобы в конце Q перпен-

---

* О свойствах предельной поверхности см. также примечание [16].

◊ Имеются в виду только такие плоскости, которые имеют с поверхностью общие точки и не перпендикулярны к оси поверхности в ее конце, ибо, как легко видеть, в последнем случае они будут иметь с поверхностью только одну общую точку, т. е. будут касаться поверхности.

дикул QQ' к плоскости треугольника ABC был параллелен с DD' (ст. 102) и, следовательно, также с AA', BB', CC' (ст. 99). Через QQ' с каждой из трех параллельных AA', BB', CC' представляем себе плоскости, которые должны разрезывать плоскость треугольника ABC перпендикулярно (ст. 59) в линиях AQ, BQ, CQ. Сферы вокруг точек A, B в пересечении с плоскостью треугольника AQB и с плоскостями линий AA', BB', QQ' производят одинаковые сферические треугольники $b'aq'$, $ba'q$, потому что, кроме прямых углов, еще бока $b'a = ba'$ (ст. 112), угол $b'aq' = a'bq$, притом бока $a'q < \frac{1}{2}\pi$, $b'q' < \frac{1}{2}\pi$ (ст. 88), после чего бок $a'q = b'q'$, потом $AQ = BQ$. Так же бы доказали, что $AQ = CQ$, откуда заключаем, что против равных боков BQ, CQ угол $QBC = QCB$. Теперь из Q перпендикул QE к BC должен падать в середину E; плоскость $Q'QE$ должна пересекать плоскость параллельных BB', CC' в линии EE'*, перпендикулярной к BC (ст. 59); следовательно, угол $B'BC = C'CB$ (ст. 102). Если б угол $D'DQ$ вышел прямой, тогда бы точка Q соединялась◊ с D на половине бока AC. Если ж угол $D'DQ >$



Чер. 119

* Линия EE' параллельна BB' и CC', согласно ст. 97.

◊ Совпала.

$>\frac{1}{2}\pi$, то вместо DQ надобно взять линию DG, принадлежную к углу $\pi - D'DQ$ на другой стороне бока AC вне треугольника ABC (ст. 102). Во всех этих случаях доказательство не переменяется в сущности своей и ведет к тому заключению, что плоскость, параллельная с осью AA', пересекает предельную поверхность в точках B, C, которые принадлежат к одной предельной линии. Итак, все равно, из каких бы точек B,C, на предельной поверхности ни выходили параллельные с AA': они все бывают осями, а плоскости, через них проведенные, — поперечными.

С предельной поверхностию сливается, таким образом, всякая часть ее, куда бы ни переносилась тремя точками.

Если теперь плоскость проходит через какие-нибудь три точки A, B, C, взятые на предельной поверхности, не принадлежа к поперечным, то параллельная с AA' через всякую четвертую точку F, общую поверхности с плоскостию, будет также параллельна с перпендикулом QQ', а следовательно, расстояние FQ точки F до начала Q перпендикула на плоскости снова то же, что расстояния AQ, BQ, CQ. Итак, пересечение непоперечной плоскости с предельной поверхностию дает круг, которого центр в Q*.

120. Предельная линия на предельной поверхности представляет нам все те свойства, какие принадлежат прямым на плоскости в предположении постоянных углов параллельности, следовательно — те самые свойства, которые в Употребительной Геометрии приняты. Различие заключается только в том, что на плоскости положение двух прямых определяется линейным углом, а на предельной поверхности наклонение предельной линии к другой измеряется плоскостным углом двух поперечных плоскостей, где лежат самые дуги.

Вот почему все названия, которые к положению взаимному прямых линий относятся, могут быть удержаны для предель-

---

* См. сноску◊ на стр. 52.

ных линий, проведенных по кривой предельной поверхности. *Перпендикул* будет также называться та предельная линия, которая встречает другую, делая в обе стороны прямой угол. *Параллельные* линии будут те, которые, сколько бы ни продолжались, никогда не встречаются. Их пересекает третья предельная под одним углом, так же как и, наоборот, две предельные, которые пересекаются третьей под одним углом, должны быть параллельны (ст. 101), или, все то же, когда сумма внутренних углов дает π.

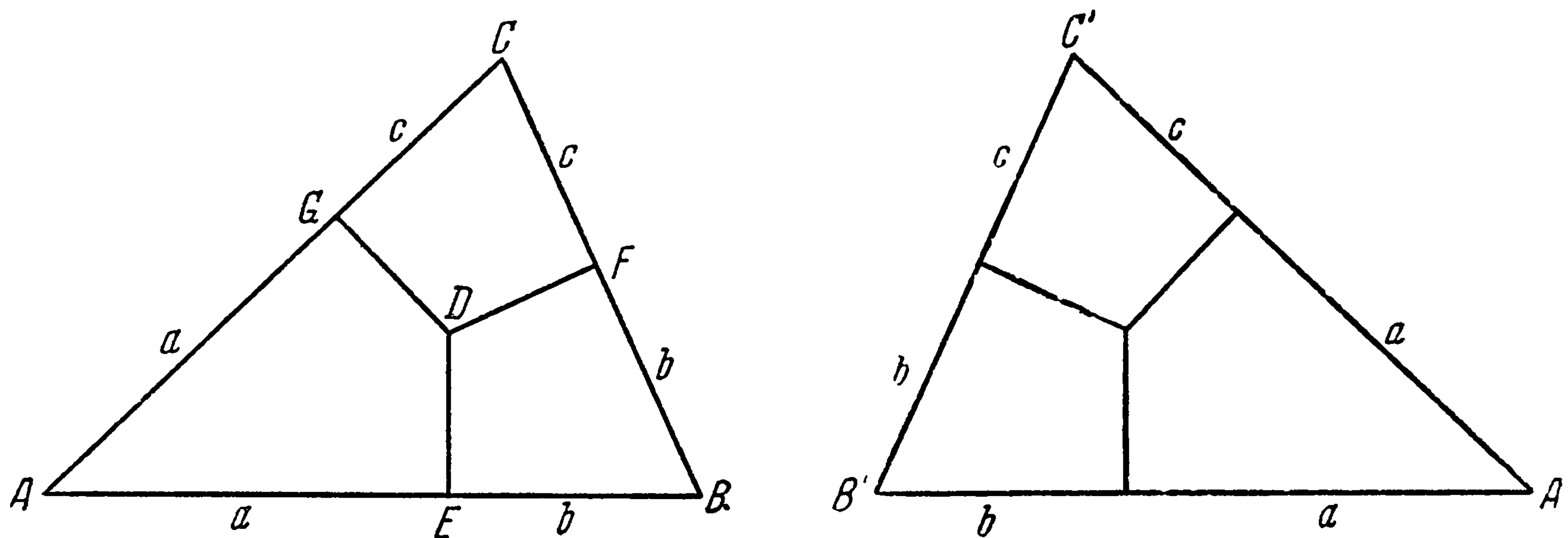
121. Из предельных линий на предельной поверхности составляются такие треугольники, где сумма трех углов π (ст. 100), и которые назовем *предельные треугольники*.

Обратим еще внимание на то, что все свойства прямолинейных треугольников, с предположением в них суммы трех углов π, выводили до сих пор, основываясь единственно на том, что бока равных углов сливаются при наложении друг на друга треугольников тою, либо другой стороной. В предельных треугольниках тоже бока в одном следуют направлению боков в другом, как скоро предполагаем равенство плоскостных углов. Что же касается до взгляда на треугольник с противоположной стороны, то здесь это заменяется составлением *оборотного треугольника*, под которым, так же как на сфере (ст. 44), будем разуметь такой, где бока следуют в другом направлении.

Оборотный прямолинейный треугольник получим, перекладывая плоскость его на противоположную сторону. Оборотный сферический треугольник, то же, что вершинный телесный угол, происходит от продолжения плоскостей за центр сферы. Наконец, всякий треугольник — прямолинейный, сферический и предельный — переходит в оборотный, когда, разделив равными перпендикулами к бокам из одной точки, соединяем три части в новом порядке.

В $\triangle ABC$ (чер. 120) разделим два угла A, B пополам, ведя линии AD, BD к их общей точке D, из которой опускаем перпендикулы DE, DF, DG к бокам AB, BC, AC. Произойдут

треугольники $ADE \backsimeq AGD, DEB \backsimeq BDF$ (ст. 87), следовательно, $DE = DF = DG$, хотя бы треугольники были сферические, потому что в них углы вокруг D по два не составляют π* (ст. 88). Так во всяком треугольнике можно сыскать центр D такого круга с полупоперечником DE, который касается всех боков.



Чер. 120

Если теперь означаем a две равные линии AE, AG; потом b — равные линии BE, BF; наконец, c — равные линии CG, CF, то соединение четыреугольников $AGDE$, $BEDF$, $FDGC$ в новом порядке дает нам треугольник $A'B'C'$, оборотный с прежним ABC.

Итак, все что ни сказано было до сих пор о прямолинейных треугольниках, в предположении суммы трех углов π, распространяется теперь без ограничения на предельные треугольники.

Случаи, в которых предельные треугольники одинаковы, будут те, когда в них равны:

1) *три бока* (ст. 82),
2) *два бока с углом между ними* (ст. 81),
3) *два бока с углом против большего* (ст. 84),
4) *бок и два при нем угла* (ст. 81),
5) *бок, при нем один угол и другой против него* (ст. 87).

---

* Имеются в виду центральные углы, соответствующие дугам больших кругов DE, DG, DF.

Параллельные линии между боками в угле содержатся как отрезки боков (ст. 104).

В прямоугольном предельном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов от катетов (ст. 105).

Вперед нет более нужды различать предельный треугольник или всякий предельный многоугольник с треугольником или многоугольником прямолинейным, как скоро в прямолинейном треугольнике допускаем сумму трех углов π; разве встретится надобность обратить внимание на то, будут ли бока прямые или кривые. Так, в следующей статье, как и во всей главе потом о тригонометрических функциях, будем говорить о прямолинейных треугольниках Употребительной Геометрии, хотя в строгости должно разуметь собственно треугольники Воображаемой Геометрии на предельной поверхности, если не хотим допускать никаких произвольных предположений*.

122. *Подобными треугольниками* называют те, которых углы равны, также содержание противоположных им боков одинаковое. В таком случае говорят, что бока *пропорциональны*. Между подобными треугольниками будем ставить знак $\backsim$, выражаясь к тому с таким же сокращением, как и в одинаковости треугольников (ст. 81).

Треугольники бывают подобны, когда в них равны:

1) *два угла*,

2) *содержание двух боков и между ними угол*,

3) *содержание двух боков с углом против большего*,

4) *содержание трех боков равное.*

Означаем в одном треугольнике P: бока a, b, c, против них углы A, B, C; в другом Q: бока a', b', c', углы против них A', B', C'.

Пусть $A = A'$, $B = B'$, следовательно $C = C'$. Треугольник P кладем на второй Q углом A на A' и так, чтобы бок b шел по b', следовательно, c по c'. Две линии a, a' покроют одна другую

* См. примечания [17], [18].

в случае $b = b'$ или $c = c'$, потому что самые треугольники будут одинаковы (ст. 81). Если же b с b', c с c' неравны, то линии a, a' сделаются параллельными (ст. 101), после чего содержание боков в одном треугольнике должно быть то же, что в другом (ст. 104), а самые треугольники подобны.

Пусть

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}, \quad C = C'.$$

Составляем еще треугольник R, взяв бок a с углами при нем B', C', как это всегда можно, потому что $B'+C'<\pi$ (ст. 101). После того, что было сейчас доказано, треугольники $Q \backsim R$; следовательно, бок против B' в R будет b, угол в Q между a, b должен быть $C' = C$; треугольники $P \cong R$ (ст. 121), наконец $P \backsim Q$.

Пусть

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}, \quad a > b, \quad A = A'.$$

Составляем треугольник R, взяв бока a, b, угол между ним C'. Тогда $R \backsim Q$, как было выше доказано; следовательно, в R против a должен быть угол $A'=A$, после чего $P \cong R$ (ст. 84, 121), $P \backsim Q$.

Пусгь

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$

Составляем треугольник R, где бока a, b, между них угол C'. В таком случае $R \backsim Q$; следовательно, третий бок в R против угла C' должен быть c; после чего $R \backsim P$ (ст. 82, 121), $P \backsim Q$.

Вообще, многоугольники называются *подобные*, когда в них все бока пропорциональны, все углы равны, притом бока следуют в том же порядке, в каком равные углы.

Из подобных треугольников составляются подобные многоугольники. Например, когда к одной точке ведем от остриев линии, потом между ними, примыкая друг к другу, параллельные с боками многоугольника, то получим новый многоугольник, подобный данному.

Глава IX

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

123. В прямоугольном треугольнике называем c гипотенузу, a, b — катеты, A, B — против них углы. Содержания $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$, катета к гипотенузе, зависят от угла A или, все то же, от угла $B=\frac{1}{2}\pi-A$ (ст. 100, 104, 121), так что $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$ постоянны, либо меняются вместе с углами A, B. Эту зависимость содержания $\frac{a}{c}$ с углом A называют *синус* и пишут

$$\frac{a}{c}=\sin A. \tag{7}$$

Чтобы распространить название синус на все вообще углы, каким бы числом они ни выражались, хотя б отрицательным, в дополнение к уравнению (7) принимаем

$$\left.\begin{aligned}\sin 0 &= 0,\\ \sin\frac{1}{2}\pi &= 1,\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

$$\sin A=\sin(\pi-A), \tag{9}$$

$$\sin(n\pi+A)=(-1)^n\sin A, \tag{10}$$

$$\sin(-A)=-\sin A. \tag{11}$$

Уравнения (8) пополняют значения синусов в четверти круга. Уравнение (9) дает значение синуса для всякого угла $\pi-A$ тупого до угла π; уравнение (10), с n целым положительным числом, служит для синусов от всех углов $n\pi+A>\pi$;

с пособием уравнения (11) находим синус от всех отрицательных углов $-A$.

Кстати здесь сказать об определениях в Геометрии, которые требуется распространять от частных случаев на все прочие. Хотя ничто не мешает такое расширение в понятии допускать совершенно произвольным, однако ж с тою целью, чтобы значение всякой геометрической величины могло быть обнимаемо в общих аналитических выражениях, надобно всегда соблюдать постепенность и согласный переход от одного случая к другому. Так, уравнения (8) приняты потому, что в уравнении (7) угол A с линией a, уменьшаясь, могут быть даже сделаны как угодно малыми, тогда как угол A вместе с линией a, возрастая, приближаются, A к $\frac{1}{2}\pi$, a к c. Уравнение (10) дает синусы в промежутке значений от $n\pi$ до $(n+1)\pi$ для угла с целым числом n. Когда теперь полагаем $A=\pi$, то получим

$$\sin(n+1)\pi = (-1)^n \sin\pi = 0.$$

Если ж ставим $n+1$ вместо n, тогда как $A=0$, то снова находим

$$\sin(n+1)\pi = (-1)^{n+1} \sin\pi = 0.$$

Наконец уравнение (11) для $A=0$ делается $\sin(-0) = -\sin 0$, но $\sin(-0) = \sin 0$; следовательно, на той и другой стороне выходят нули. Если вместо положительного A ставим $-A$, то уравнение (11) принимает вид

$$\sin A = -\sin(-A),$$

согласный с прежним. Итак уравнение (11) справедливо для всех значений A как положительных, так отрицательных и для $A=0$.

Синус от $\frac{1}{2}\pi - A$ для всякого угла A называют *косинус*, и пишут

$$\cos A = \sin\left(\frac{1}{2}\pi - A\right). \qquad (12)$$

Содержание синуса к косинусу называют *тангенс*, а содержание косинуса к синусу — *котангенс*. Так пишут для всякого угла A

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}, \qquad (13)$$

$$\cot A = \frac{\cos A}{\sin A}. \qquad (14)$$

Последнее уравнение можно представить в другом виде

$$\cot A = \tan\left(\frac{1}{2}\pi - A\right).$$

Уравнения (12), (13), (14) в соединении с уравнениями (8) дают

$$\tan\frac{1}{4}\pi = 1, \qquad \cot\frac{1}{4}\pi = 1,$$

$$\cos 0 = 1, \qquad \cos\frac{1}{2}\pi = 0,$$

$$\tan 0 = 0, \qquad \cot 0 = \infty,$$

$$\tan\frac{1}{2}\pi = \infty, \qquad \cot\frac{1}{2}\pi = 0.$$

Итак, значения синусов и косинусов заключаются в границах $+1$, -1; значения тангенсов и котангенсов между $-\infty$, $+\infty$.

Синус, косинус, тангенс и котангенс называются *тригонометрические функции*.

124. *Какой угол A ни будет, всегда*

$$\sin(\pi + A) = -\sin A. \qquad (15)$$

Для $A = 0$ на одной стороне в уравнении получим $\sin\pi = 0$ [ур. (9)], на другой также $\sin 0 = 0$ [ур. (8)].

Всякий положительный угол $A = n\pi + \alpha$, где n может быть нуль или целое положительное число, тогда как α либо нуль, либо положительный угол $< \pi$. После чего [ур. (10)]

$$\sin(\pi + A) = \sin\{(n+1)\pi + \alpha\} = (-1)^{n+1}\sin\alpha.$$

На другой стороне в уравнении (15)

$$-\sin A = -\sin(n\pi + \alpha) = (-1)^{n+1}\sin\alpha.$$

Отрицательный угол A можем подобным образом полагать $-n\pi - \alpha$, с $n = 0$, или целым положительным числом с $\alpha = 0$, или положительным углом $< \pi$. Различаем к тому три случая: $n = 0$, $n = 1$, $n > 1$.

Для $n = 0$ [ур. (9)] *

$$\sin(\pi + A) = \sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha.$$

Далее [ур. (11)]

$$-\sin A = -\sin(-\alpha) = \sin\alpha.$$

Для $n = 1$ [ур. (11)]

$$\sin(\pi + A) = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha,$$

$$-\sin A = -\sin(-\pi - \alpha) = \sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha.$$

Для $n > 1$ [ур. (11), (10)]

$$\sin(\pi + A) = \sin\{-(n-1)\pi - \alpha\} = -\sin\{(n-1)\pi + \alpha\} = (-1)^n\sin\alpha,$$

$$-\sin A = -\sin\{-n\pi - \alpha\} = \sin(n\pi + \alpha) = (-1)^n\sin\alpha$$

В уравнении (15), ставя $-A$ вместо A, для всякого угла A получим [ур. (11)]

$$\sin(\pi - A) = \sin A. \tag{16}$$

Полагая здесь по порядку $A = \pi$, 2π, 3π и т. д., заключаем вообще для целых, как положительных, так отрицательных чисел n [ур. (11)]

$$\sin n\pi = 0. \tag{17}$$

Если же в уравнении (16) вместо A ставим $\pi + A$, $2\pi + A$, $3\pi + A \ldots$, то находим, что уравнение (10) справедливо для

* Ссылки на уравнения в квадратных скобках принадлежат Лобачевскому.

всех целых n и для всех произвольных углов A, именно

$$\sin(n\pi + A) = (-1)^n \sin A. \tag{18}$$

125. *Какой угол A ни будет, всегда*

$$\cos(-A) = \cos A. \tag{19}$$

Согласно с определением (ст. 123),

$$\cos(-A) = \sin\left(\frac{1}{2}\pi + A\right).$$

Далее [ур. (16)]

$$\sin\left(\frac{1}{2}\pi + A\right) = \sin\left(\frac{1}{2}\pi - A\right) = \cos A.$$

После чего уравнения (11), (19) дают (ст. 123) для всех углов A

$$\operatorname{tang}(-A) = -\operatorname{tang} A, \tag{20}$$

$$\cot(-A) = -\cot A. \tag{21}$$

126. *Для всех углов A и для всех n целых, как положительных, так отрицательных чисел,*

$$\cos(n\pi + A) = (-1)^n \cos A. \tag{22}$$

Согласно с определением (ст. 123)

$$\cos(n\pi + A) = \sin\left(\frac{1}{2}\pi - n\pi - A\right).$$

Далее [ур. (11)]

$$\cos(n\pi + A) = -\sin\left(n\pi - \frac{1}{2}\pi + A\right);$$

потом [ур. (18)]

$$\cos(n\pi + A) = -(-1)^n \sin\left(-\frac{1}{2}\pi + A\right) =$$

$$= (-1)^n \sin\left(\frac{1}{2}\pi - A\right) = (-1)^n \cos A.$$

Соединение двух уравнений (18), (22) дает для всех углов A, так же как и для всех целых чисел n (ст. 123),

$$\text{tang}(n\pi + A) = \text{tang}\, A, \qquad (23)$$

$$\cot(n\pi + A) = \cot A. \qquad (24)$$

Из уравнений (18), (22), (23), (24) легко заключить, что *значение тригонометрической функции не переменяется, когда к углу придаем 2π или вычитаем из него 2π.*

127. *Для всех углов A*

$$\sin A^2 + \cos A^2 = 1\,. \qquad (25)$$

Уравнения (11), (19) дозволяют сюда ставить $-A$ вместо A; следовательно, доказывать предложение нужно только для $A = 0$ и для углов A положительных. Если $A = 0$, то значения $\sin A = 0$ [ур. (8)], $\cos A = 1$ (ст. 123) поверяют уравнение (25). Далее, уравнения (18), (22) дозволяют в уравнение (25) вместо A ставить $A - n\pi$ с целым числом n; следовательно, доказывать остается для $A > 0$, $< \pi$, а когда поставим теперь $\pi - A$ вместо $A > \frac{1}{2}\pi$, основываясь на уравнениях (16), (22), то довольно рассмотреть одни значения от $A > 0$, покуда $A < \frac{1}{2}\pi$, так как $A = \frac{1}{2}\pi$ дает $\sin A = 1$, $\cos A = 0$ (ст. 123).

Называем в прямоугольном треугольнике a, b — катеты, A, B — против них углы, c — гипотенузу. Получим (123)

$$\frac{a}{c} = \sin A,$$

$$\frac{b}{c} = \sin B = \cos A.$$

Отсюда (ст. 121)

$$\sin A^2 + \cos A^2 = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = 1.$$

Например, для $A = \frac{1}{4}\pi$ находим

$$\sin\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Разделив уравнение (25) на $\sin A^2$ или $\cos A^2$, получим

$$1 + \operatorname{tang} A^2 = \frac{1}{\cos A^2}, \quad 1 + \cot A^2 = \frac{1}{\sin A^2}.$$

Итак, значения всех тригонометрических функций будут известны, как скоро знаем одной из них для углов от нуля до $\frac{1}{4}\pi$.

128. *Бока в треугольнике содержатся как синусы противоположных углов.*

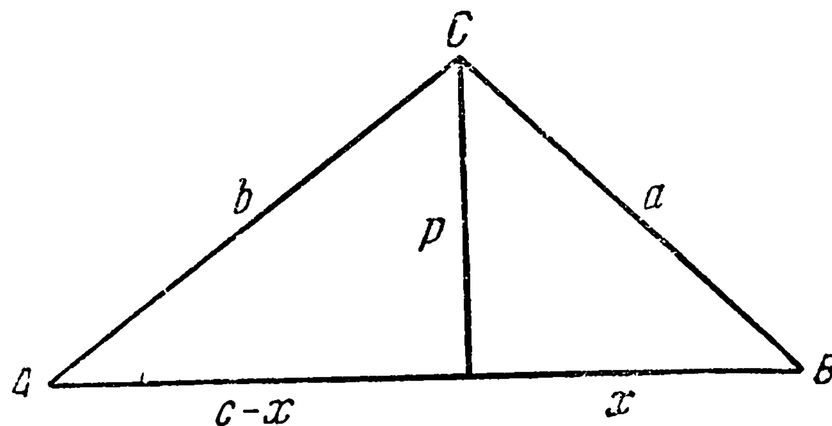
Называем a, b, c бока, A, B, C против них углы в треугольнике. Надобно доказывать, что

$$a \sin B = b \sin A. \tag{26}$$

Если $A = \frac{1}{2}\pi$, то $\sin A = 1$, содержание $\frac{b}{a}$ представляет $\sin B$ (ст. 123).

Если $A < \frac{1}{2}\pi$, $B < \frac{1}{2}\pi$, то перпендикул p из острия C (черт. 121) к боку c разделяет треугольник на два прямоугольных: в одном гипотенуза b, угол A против катета p; в другом гипотенуза a, угол B против катета p, следовательно (ст. 123),

$$p = b \sin A, \quad p = a \sin B.$$

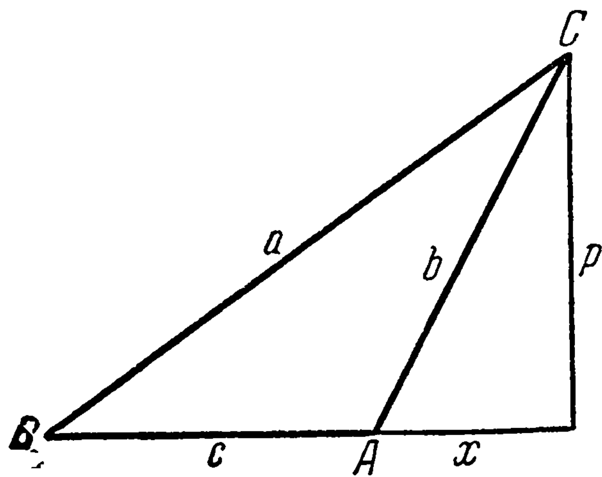


Чер. 121

Если $A > \frac{1}{2}\pi$, то перпендикул p падает вне треугольника на продолжение бока c за острие угла A (чер. 122), производя снова два прямоугольных треугольника, из которых в одном гипотенуза a, катет p с углом B против него; в другом гипотенуза b, катет p с углом $\pi - A$ против него; но как $\sin(\pi - A) = \sin A$ [ур. (9)], то в этом случае значения перпендикула p тоже поверяют уравнение (26).

129. *Для всех углов* A, B

$$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B. \qquad (27)$$



Чер. 122

Это верно для $A=0$, $A=\frac{1}{2}\pi$, $A=\pi$. В первом случае на той и другой стороне получится $\sin B$. Для $A=\pi$ на обеих сторонах находим $-\sin B$ [ур. (15)]. Для $A=\frac{1}{2}\pi$ будет [ур. (16)]

$$\sin(A+B)=\sin\left(\frac{1}{2}\pi+B\right)=\sin\left(\frac{1}{2}\pi-B\right)=\cos B.$$

Далее,

$$\sin A\cos B+\cos A\sin B=\sin\frac{1}{2}\pi\cos B=\cos B.$$

Пусть теперь A, B — положительные углы, $A>0$, $A+B<\pi$. Такие углы A, B могут быть при боке c в треугольнике (ст. 101), где два другие бока против A, B называем a, b. Если $A<\frac{1}{2}\pi$, то бок c перпендикулом p к нему из противоположного угла C разделяется на две части x к углу B, $c-x$ к углу A (чер. 121), производя два прямоугольных треугольника, где (ст. 123)

$$c-x=b\cos A,$$

$$x=a\cos B.$$

Если ж $A>\frac{1}{2}\pi$ (чер. 122), то перпендикул p падает на продолжение бока c, так что произойдут два прямоугольных треугольника: в одном катеты p, x; в другом p, $c+x$ с углами $\pi-A$, B против p; следовательно [ур. (22), (19)],

$$x=-b\cos A,$$

$$c+x=a\cos B.$$

В обоих случаях находим, таким образом,

$$c = a\cos B + b\cos A. \qquad (28)$$

Основываясь на уравнении (26), можем ставить сюда $\sin C$, $\sin A$, $\sin B$ вместо c, a, b. Так получим

$$\sin C = \sin A\cos B + \cos A\sin B.$$

Между тем, $C = \pi - A - B$; следовательно, $\sin C = \sin(A+B)$ [ур. (16)].

До сих пор уравнение (27) доказано для всех углов от $A = 0$, $B = 0$ до $A = \pi$, $B = \pi$, покуда $A + B < \pi$. Оно также справедливо для $A + B = \pi$, потому что в этом случае $\sin(A+B) = 0$, $\cos B = -\cos A$ [ур. (22)], $\sin B = \sin A$ [ур. (16)].

Полагаем вообще $A = n\pi + \alpha$, $B = m\pi + \beta$, где n, m могут быть нулями, либо целыми положительными числами, углы α, β могут быть также нулями, либо положительными $< \pi$. Находим [ур. (18)]

$$\sin(A+B) = (-1)^{n+m}\sin(\alpha+\beta),$$

$$\sin A = (-1)^n \sin\alpha,$$

$$\sin B = (-1)^m \sin\beta.$$

Далее [ур. (22)]

$$\cos A = (-1)^n \cos\alpha,$$

$$\cos B = (-1)^m \cos\beta.$$

После чего уравнение (27) делается

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

и было доказано для $\alpha + \beta \leqslant \pi$. В случае $\alpha + \beta > \pi$, $< 2\pi$ можем дать последнему уравнению такой вид:

$$\sin(2\pi - \alpha - \beta) = \sin(\pi - \alpha)\cos(\pi - \beta) + \cos(\pi - \alpha)\sin(\pi - \beta)$$

и почитать это верным, потому что здесь сумма углов $\pi - \alpha$, $\pi - \beta$ менее π.

Что касается до значений отрицательных A, B, то можем сделать их положительными, прибавляя несколько раз 2π, от чего значения самых функций не переменятся (ст. 126).

130. Из уравнения (27) следуют другие, когда ставим $-B$ вместо B, потом в этом новом и в прежнем $\frac{1}{2}\pi - A$ вместо A. Так, получим

$$\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B, \tag{29}$$

$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B, \tag{30}$$

$$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B. \tag{31}$$

Уравнения, будучи разделены (27) на (30), (29) на (31), дают

$$\operatorname{tang}(A + B) = \frac{\operatorname{tang} A + \operatorname{tang} B}{1 - \operatorname{tang} A \operatorname{tang} B}, \tag{32}$$

$$\operatorname{tang}(A - B) = \frac{\operatorname{tang} A - \operatorname{tang} B}{1 + \operatorname{tang} A \operatorname{tang} B}. \tag{33}$$

131. Когда в уравнении (27) полагаем $A = B$, то получим

$$\sin 2A = 2 \sin A \cos A. \tag{34}$$

То же делая в уравнении (30) и принимая в помощь уравнение (25),

$$1 + \cos 2A = 2 \cos A^2, \tag{35}$$

$$1 - \cos 2A = 2 \sin A^2. \tag{36}$$

Так, начиная с $A = \frac{1}{2}\pi$, постепенно находим

$$\cos\frac{\pi}{2^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \qquad \sin\frac{\pi}{2^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2},$$

$$\cos\frac{\pi}{2^3} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}, \qquad \sin\frac{\pi}{2^3} = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}},$$

$$\cos\frac{\pi}{2^4} = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \qquad \sin\frac{\pi}{2^4} = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$

и т. д. и т. д.,

где все корни должно разуметь положительными, потому что синус и косинус острых углов не может быть отрицательным (ст. 123). Этот способ приводит к значению синусов и косинусов от всех углов $\frac{\pi}{2^n}$ с n целым положительным числом. Потом уравнения (27), (30) служат к определению синусов и косинусов от всех углов, которые могут быть представлены суммой углов $\pi 2^{-n}$. Наконец, всякий угол вообще выражается произведением $\frac{1}{2}\pi$ на сумму нескольких положительных степеней от $\frac{1}{2}$, по крайней мере с разностию, как угодно малой. Означаем эту разность ω, данный угол A, сумму всех слагаемых, которых вид $\frac{1}{2^n}\pi$, назовем B, так что $A = B + \omega$. Уравнения (27), (30) дают

$$\sin A = \sin B \cos \omega + \cos B \sin \omega,$$

$$\cos A = \cos B \cos \omega - \sin B \sin \omega,$$

а поставя сюда [ур. (34), (36)]

$$\sin \omega = 2 \sin \frac{1}{2}\omega \cos \frac{1}{2}\omega,$$

$$\cos \omega = 1 - 2 \sin \frac{1}{2}\omega^2,$$

находим

$$\sin A - \sin B = 2 \sin \frac{1}{2}\omega \cos\left(B + \frac{1}{2}\omega\right), \tag{37}$$

$$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{1}{2}\omega \sin\left(B + \frac{1}{2}\omega\right). \tag{38}$$

Заметим к этому, что в прямоугольном треугольнике содержание катета к другому представляет тангенс угла против первого. С уменьшением ω можно, следовательно, $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\omega$ сделать как угодно малым, а также $\sin\frac{1}{2}\omega$, потому что $\sin\frac{1}{2}\omega < \operatorname{tang}\frac{1}{2}\omega$; к тому по величине $\cos\left(B + \frac{1}{2}\omega\right) < 1$,

$\sin\left(B+\frac{1}{2}\omega\right)<1$. Итак, в уравнениях (37), (38), уменьшив ω до того, чтобы разности $\sin A - \sin B$, $\cos A - \cos B$ сделались нечувствительными, в праве принимать значения $\sin B$, $\cos B$ за $\sin A$, $\cos A$.

Таким образом, вычисленные значения $\sin x$, $\cos x$ для всякого угла x будут те самые, какие дают бесконечные строки (Алгебра. Глава XIV) *

$$\sin x = x - x_c^3 + x_c^5 - x_c^7 + \ldots, \tag{39}$$

$$\cos x = 1 - x_c^2 + x_c^4 - x_c^6 + \ldots \tag{40}$$

и которые могут быть еще выражены

$$\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}, \tag{41}$$

$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}, \tag{42}$$

как скоро под e разумеем основание непперовых логарифмов, а под π число

$$\pi = 3{,}1415926535\ldots,$$

весьма близкое к дроби $\frac{355}{113}$ (ст. 39).

132. Если соединяем уравнения (27) с (29), (30) с (31), положив $2A = a + b$, $2B = a - b$, то находим

$$\sin a + \sin b = 2\sin\frac{1}{2}(a+b)\cos\frac{1}{2}(a-b), \tag{43}$$

$$\sin a - \sin b = 2\cos\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}(a-b), \tag{44}$$

* «Алгебра или вычисление конечных», Н. И. Лобачевский, Полн. собр соч., т. IV, Гостехиздат, 1948, стр. 231. Следуя Бартельсу (J. M. Bartels, Vorlesungen über mathematische Analysis, I. Dorpat, 1833), Лобачевский пользуется обозначением $x_c^n = \frac{x^n}{n!}$.

$$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{1}{2}(a+b)\cos\frac{1}{2}(a-b), \qquad (45)$$

$$\cos a - \cos b = -2\sin\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}(a-b). \qquad (46)$$

Здесь в уравнении (44), делая $a = n\omega$, $b = (n-1)\omega$, получим

$$\sin(n\omega) - \sin(n-1)\omega = 2\sin\frac{1}{2}\omega\cos\left(n\omega - \frac{1}{2}\omega\right),$$

а поставя сюда по порядку целые числа, начиная с $n = 1$ до какого-нибудь n,

$$\sin\omega = 2\sin\frac{1}{2}\omega\cos\frac{1}{2}\omega,$$

$$\sin 2\omega - \sin\omega = 2\sin\frac{1}{2}\omega\cos\frac{3}{2}\omega,$$

$$\sin 3\omega - \sin 2\omega = 2\sin\frac{1}{2}\omega\cos\frac{5}{2}\omega,$$

. . . .

$$\sin n\omega - \sin(n-1)\omega = 2\sin\frac{1}{2}\omega\cos\left(n - \frac{1}{2}\right)\omega.$$

Сложив уравнения, находим

$$\frac{\sin n\omega}{2\sin\frac{1}{2}\omega} = \cos\frac{1}{2}\omega + \cos\frac{3}{2}\omega + \ldots + \cos\left(n - \frac{1}{2}\right)\omega.$$

Здесь члены в сумме по порядку, от начала до последнего, уменьшаются, не делаясь, однако ж, отрицательными, покуда $n\omega < \frac{1}{2}\pi$. Отсюда надобно заключить, что $\sin n\omega$ растет медленнее, нежели угол $n\omega$, как бы мало прибавление ω ни было, так что для $n > m$ двух целых чисел

$$\frac{\sin n\omega}{\sin m\omega} < \frac{n}{m}.$$

Вообще для двух углов $a > b$

$$\frac{\sin a}{\sin b} < \frac{a}{b}\text{*}.$$

---

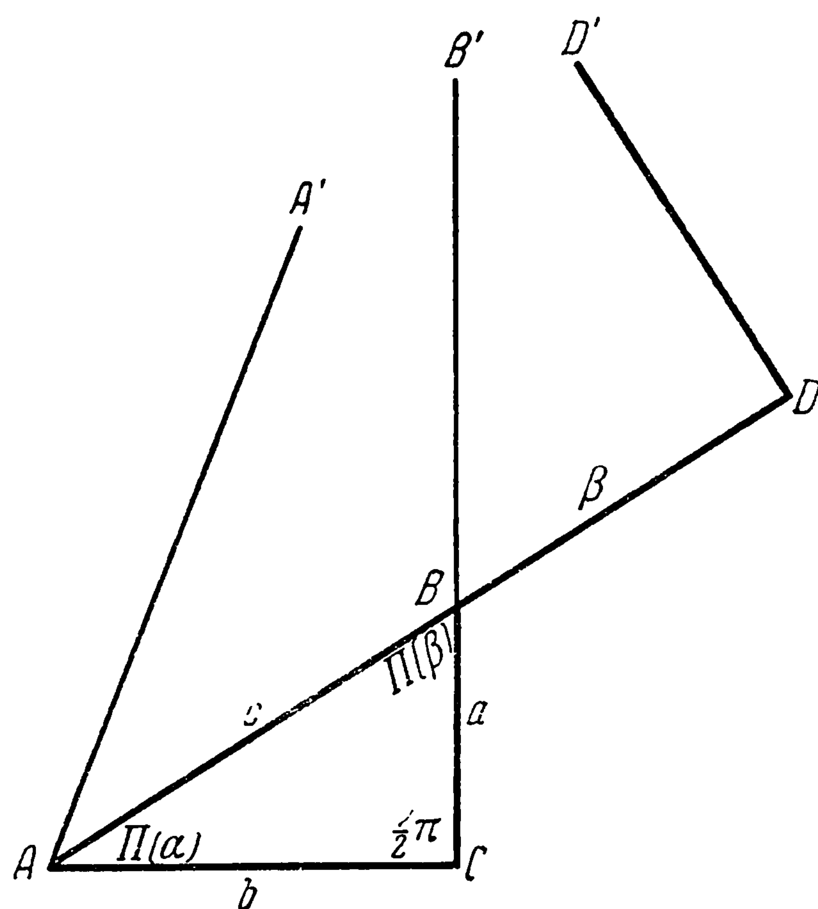
* При $a < \frac{\pi}{2}$, $b > 0$.

Глава X

ЗАВИСИМОСТЬ УГЛА ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ С ЕГО ПЕРПЕНДИКУЛОМ

133. В этой главе будем разуметь угол параллельности переменным.

В прямолинейном и прямоугольном треугольнике ABC (чер. 123) означаем c гипотенузу, a, b — катеты, $\Pi(\alpha)$, $\Pi(\beta)$ — против них углы, так что α, β должны представлять какие-нибудь линии, выраженные положительными числами (ст. 102). Продолжаем a, c за их общую точку B, делая продолжение BB' первой произвольным, а второй до точки D, так чтобы $BD = \beta$ и, следовательно, перпендикул DD' в точке D к BD был параллелен с BB'. Ведем еще с DD' параллельную AA', которая будет вместе параллельна с BB' (ст. 99). Получим угол $B'BD = \Pi(\beta)$, $A'AD = \Pi(c + \beta)$, $A'AC - A'AD = \Pi(\alpha)$; следовательно:



Чер. 123

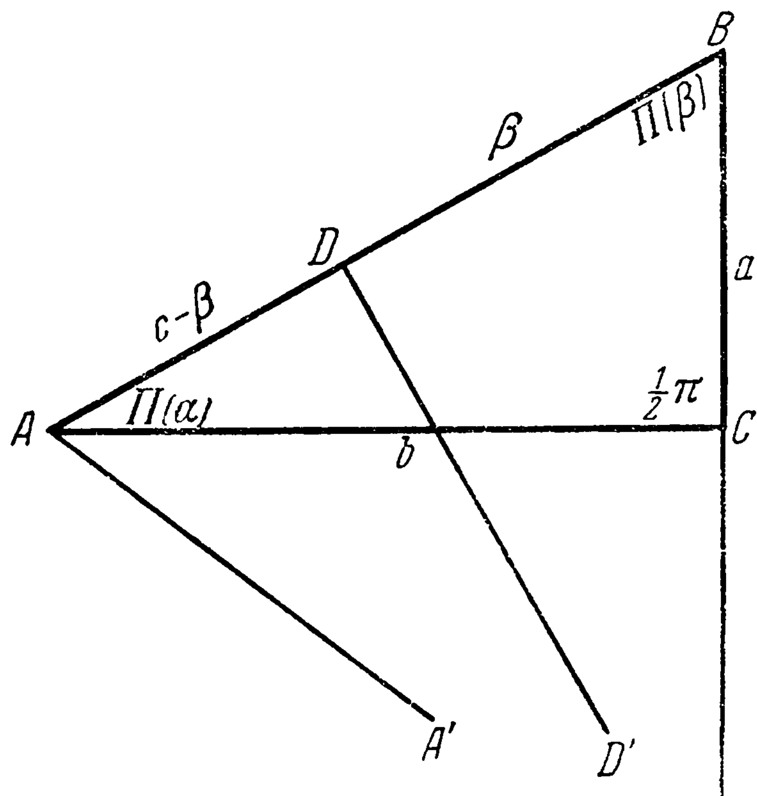
$$\Pi(b) - \Pi(\alpha) = \Pi(c + \beta). \qquad (47)$$

В том же треугольнике ABC кладем линию β от B к A, потом в конце D ставим перпендикул DD' на стороне самого

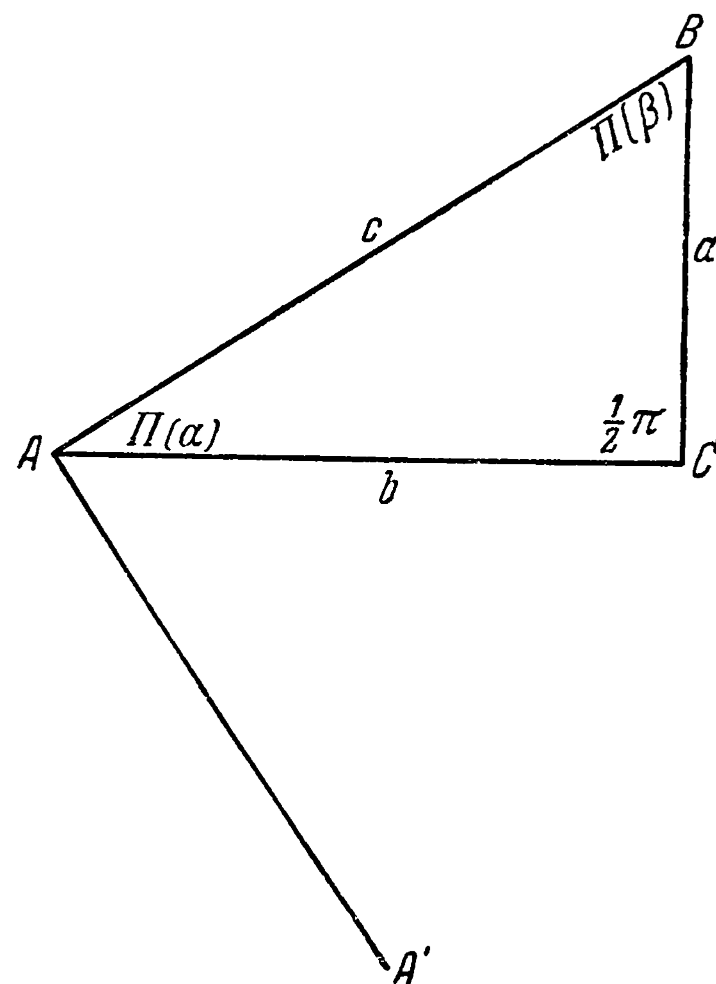
треугольника. В случае $c > \beta$ точка D будет между A и B (чер. 124). Ведем AA', параллельную к DD', следовательно, вместе к BC. Здесь угол $DAA' = \Pi(c - \beta)$, $CAA' = \Pi(b)$; после чего

$$\Pi(b) + \Pi(\alpha) = \Pi(c - \beta). \tag{48}$$

Когда $c = \beta$ (чер. 125), то линия AA' будет перпендикулом к AB; следовательно, $\Pi(b) = \frac{1}{2}\pi - \Pi(\alpha)$, но $\frac{1}{2}\pi = \Pi(0) = \Pi(c - \beta)$. Таким образом, уравнение (48) в этом случае снова поверяется.



Чер. 124



Чер. 125

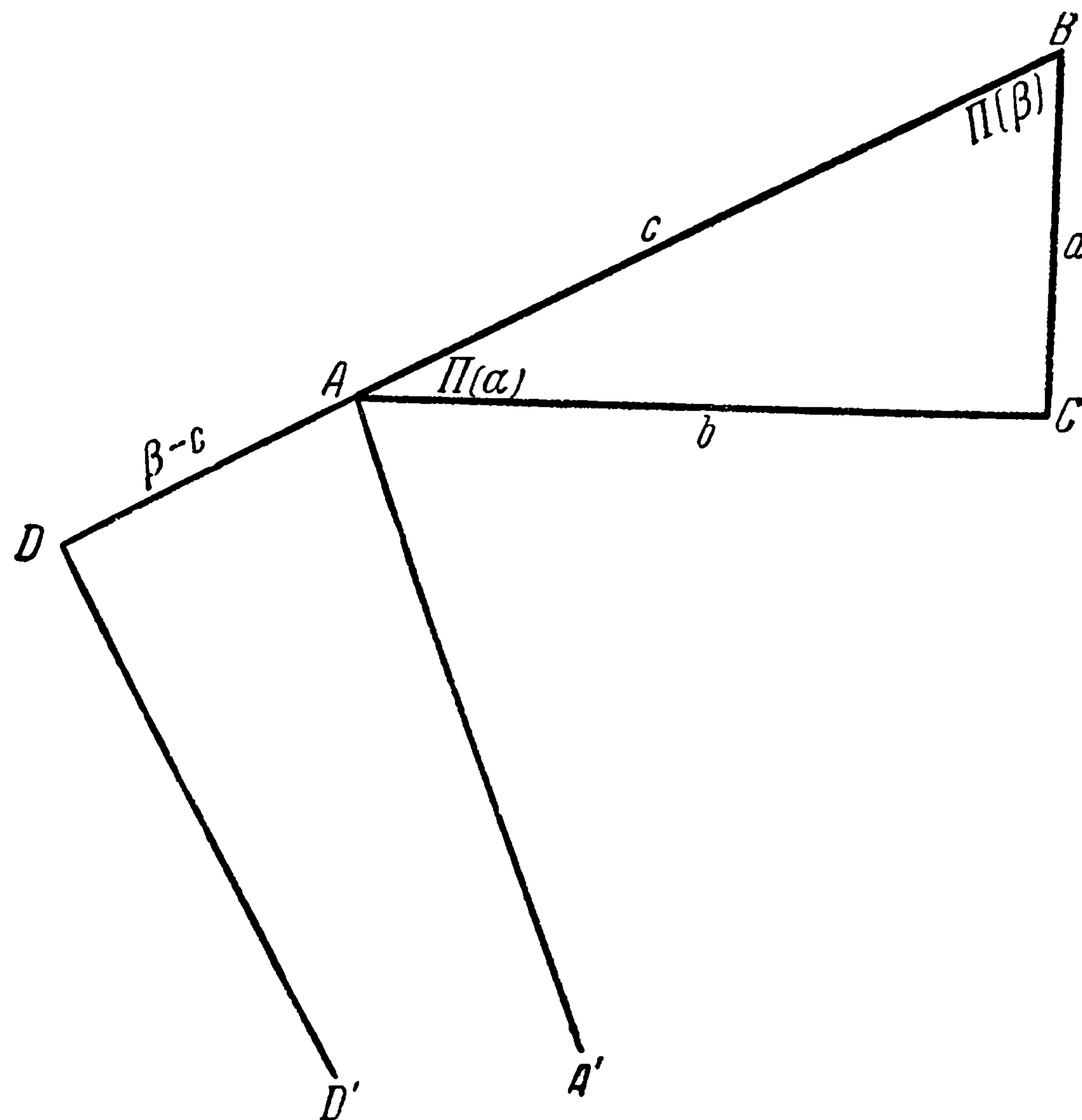
Когда $c < \beta$ (чер. 126), то перпендикул DD' будет на продолжении c за точку A. Теперь угол $CAA' = \Pi(b) = \pi - DAA' - \Pi(\alpha) = \pi - \Pi(\beta - c) - \Pi(\alpha) = \Pi(c - \beta) - \Pi(\alpha)$ [ст. 102]. Итак, уравнение (48) относится ко всем прямоугольным треугольникам. Оно в соединении с прежним (47) дает

$$2\Pi(b) = \Pi(c - \beta) + \Pi(c + \beta), \tag{49}$$

$$2\Pi(\alpha) = \Pi(c - \beta) - \Pi(c + \beta). \tag{50}$$

Подобным образом,

$$\left.\begin{aligned} 2\,\Pi(a) &= \Pi(c-\alpha)+\Pi(c+\alpha),\\ 2\,\Pi(\beta) &= \Pi(c-\alpha)-\Pi(c+\alpha). \end{aligned}\right\} \qquad (51)$$



Чер. 126

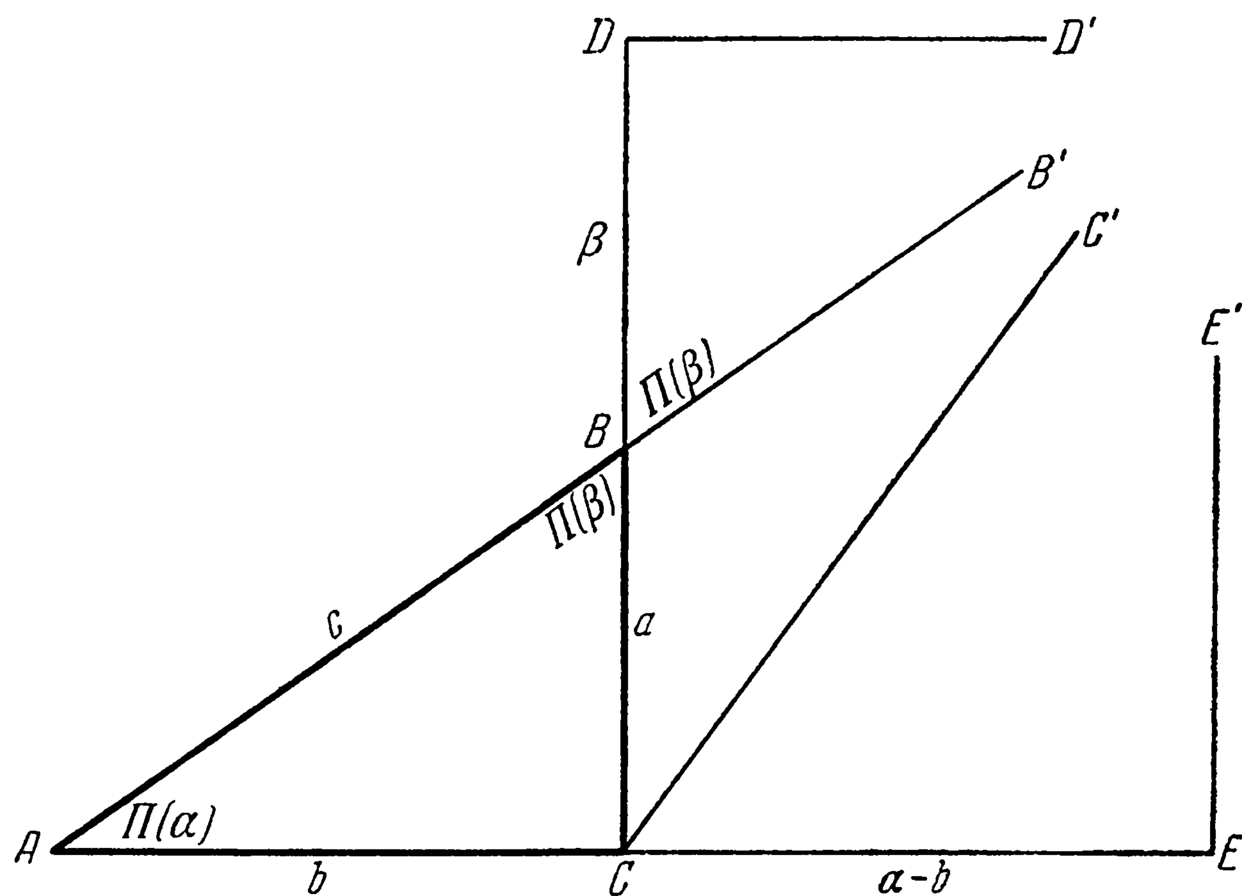
134. В прямоугольном треугольнике ABC (чер. 127) называем снова c гипотенузу, a, b — катеты, $\Pi(\alpha)$, $\Pi(\beta)$ — против них углы. Катет a продолжаем за острие B угла $\Pi(\beta)$, делая продолжение $BD = \beta$. Ставим в конце перпендикул DD' к DC на стороне, противоположной треугольнику. Продолжение BB' гипотенузы c за ту же точку B должно быть, следовательно, параллельно с DD'. Продолжаем еще катет b за острие C прямого угла, делая продолжение $CE = \alpha - b$*, потом в конце ставим перпендикул EE' к CE на стороне треугольника. Этот

---

* Так как прямая AB' пересекает CD, то $\Pi(\alpha) < \Pi(b)$, откуда $\alpha > b$ (см. ст. 102).

перпендикул должен быть параллелен с AB' и с перпендикулом DD', который также параллелен к линии CC', проведенной из острия C параллельно с EE'. Так произойдет угол $C'CD = \Pi(a+\beta)$, $C'CE = \Pi(\alpha - b)$; следовательно,

$$\Pi(\alpha - b) + \Pi(a + \beta) = \frac{1}{2}\pi. \qquad (52)$$



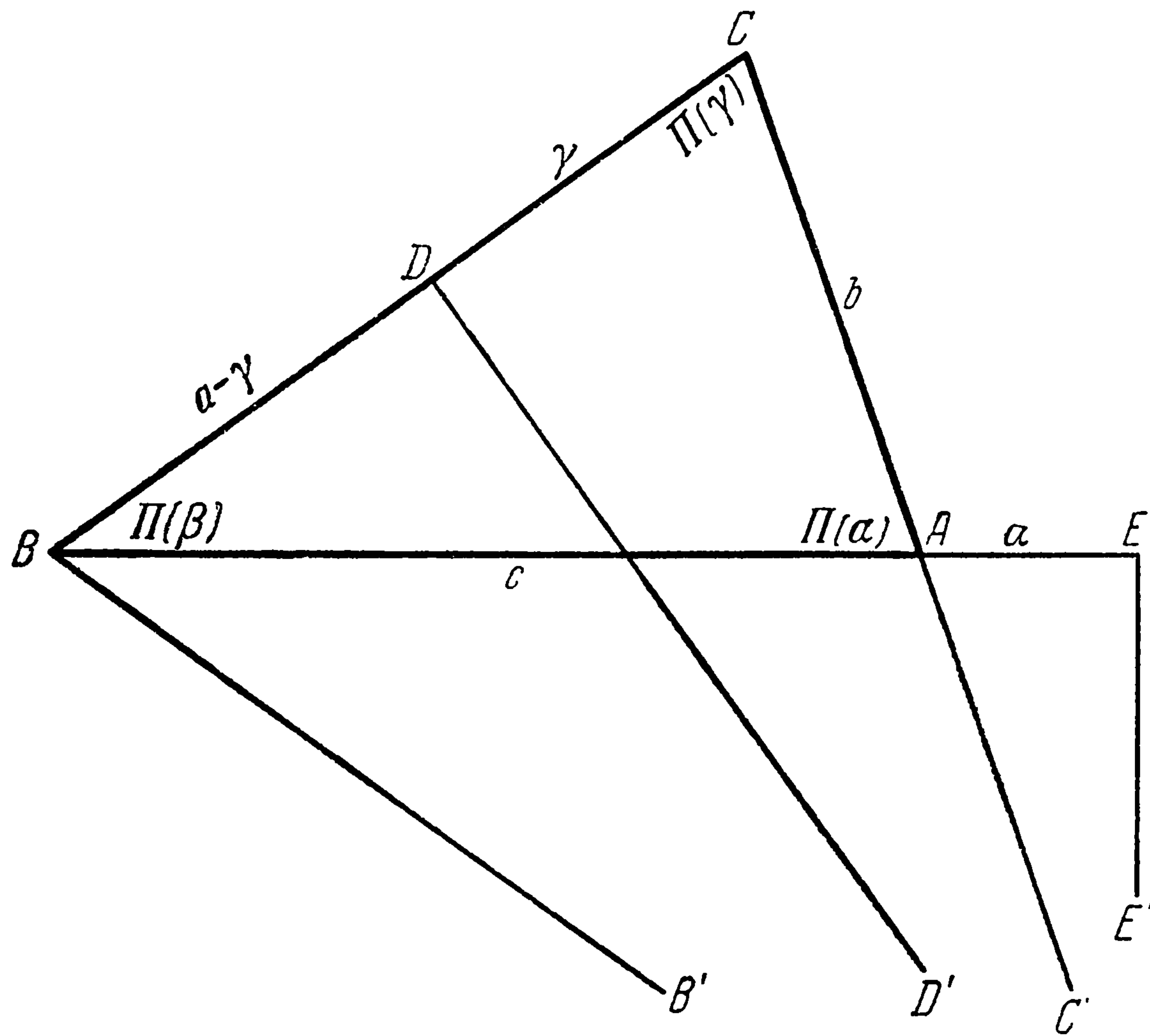
Чер. 127

По примеру чего

$$\Pi(\beta - a) + \Pi(b + \alpha) = \frac{1}{2}\pi. \qquad (53)$$

135. Во всяком прямолинейном треугольнике ABC (чер. 128) называем бока a, b, c, против них углы $\Pi(\alpha)$, $\Pi(\beta)$, $\Pi(\gamma)$, которых острия в точках A, B, C и где, следовательно, α, β, γ могут быть или все положительные линии, или две положительные с одной отрицательной. Если γ — положительная линия, то кладем ее на бок a от острия C к B, и в конце D ставим перпендикул DD' к BC на стороне треугольника ABC. Точка D должна падать между точек B, C для $a > \gamma$; она

будет в точке B для $a=\gamma$, наконец,— где-нибудь на продолжении CB за точку B для $a<\gamma$. Если γ — отрицательная линия, то кладем ее в противную сторону на продолжение a за точку C. Во всех этих случаях из точки B параллельная



Чер. 128

BB' с DD' будет вместе параллельной к CA, которой продолжение AC' за точку A делается параллельным с перпендикулом EE', поставленным к $AE=\alpha$ в точке E, взятой от острия A на самом боку c, либо на продолжении, смотря по тому, будет ли α отрицательная или положительная линия. Перпендикул EE' тоже параллелен с BB' (ст. 99); следовательно, разность углов $CBB'=\Pi(a-\gamma)$, $ABB'=\Pi(c+\alpha)$ дает

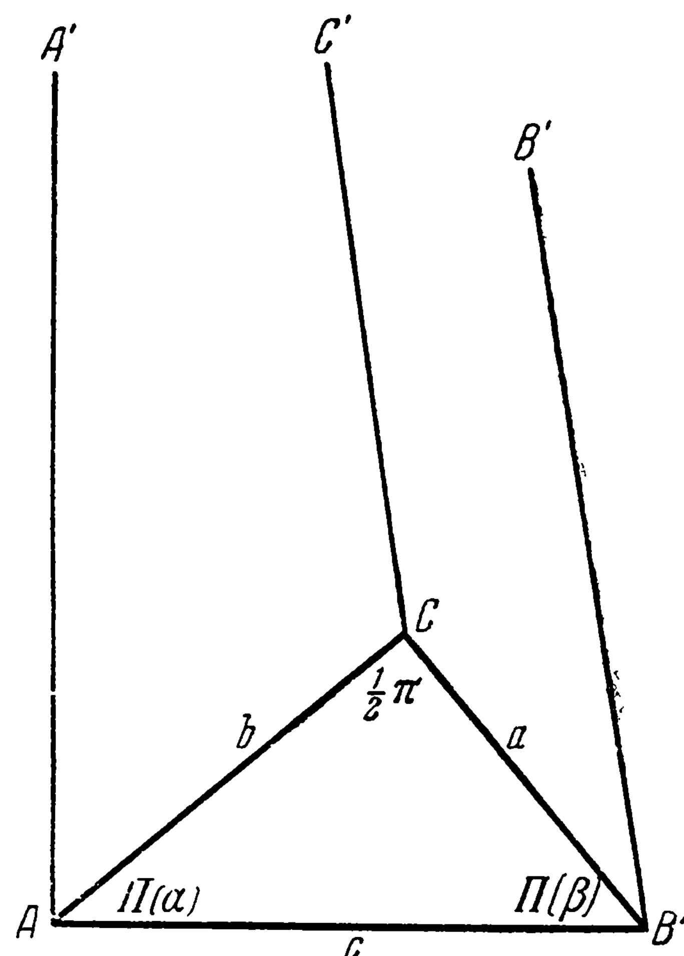
$$\Pi(\beta)=\Pi(a-\gamma)-\Pi(c+\alpha)\,^{*} \qquad (54)$$

---

* Лобачевский подробно проводит доказательство формулы (54) лишь для одного случая расположения прямых, указывая, какие случаи надлежит рассмотреть для пополнения доказательства.

— уравнение, где заключаются прежние (47), (48), (52) как частный случай, когда полагаем $\Pi(\gamma)=\frac{1}{2}\pi$ вместе с $\gamma=0$, или $\Pi(\alpha)=\frac{1}{2}\pi$ вместе с $\alpha=0$, или, наконец, $\Pi(\beta)=\frac{1}{2}\pi$ вместе с $\beta=0$*.

136. В прямоугольном треугольнике ABC (чер. 129) называем c — гипотенузу, a, b — катеты, $\Pi(\alpha)$, $\Pi(\beta)$ — против них углы. Из острия A в угле $\Pi(\alpha)$ ставим к плоскости треугольника перпендикул AA', к нему ведем из двух других остриев B, C параллельные BB', CC'; потом из трех линий AA', BB', CC' через каждые две воображаем плоскости. Между ними две, перпендикулярные к плоскости треугольника, пересекаясь в AA' (ст. 59), проходят через b, c, будучи наклонены друг к другу под углом $\Pi(\alpha)$ (ст. 43). Бок a, перпендикулярный к b, должен быть перпендикулом к плоскости $A'ACC'$, где лежат линии b, AA', CC' (ст. 59); следовательно, будет также перпендикулом к линии CC'(ст. 56). Таким образом, угол двух плоскостей, которые, пересекаясь в CC', проходят через a, b, делается прямой. Теперь, зная два плоскостных угла $\Pi(\alpha)$, $\frac{1}{2}\pi$, находим



Чер. 129

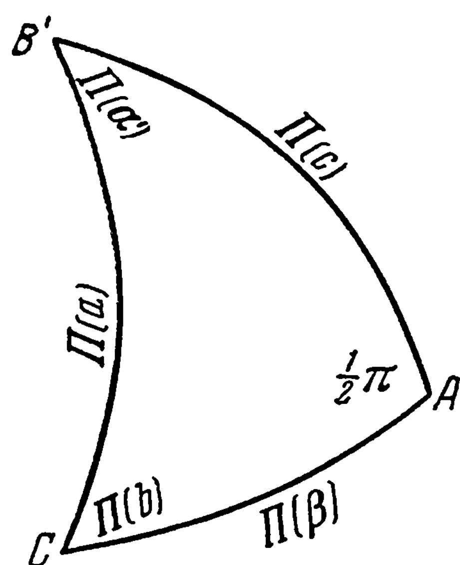
* Для любого треугольника будут иметь место шесть соотношений типа (54):

$$\Pi(\alpha)=\Pi(c-\beta)-\Pi(b+\gamma)=\Pi(b-\gamma)-\Pi(c+\beta),$$
$$\Pi(\beta)=\Pi(a-\gamma)-\Pi(c+\alpha)=\Pi(c-\alpha)-\Pi(a+\gamma),$$
$$\Pi(\gamma)=\Pi(b-\alpha)-\Pi(a+\beta)=\Pi(a-\beta)-\Pi(b+\alpha),$$

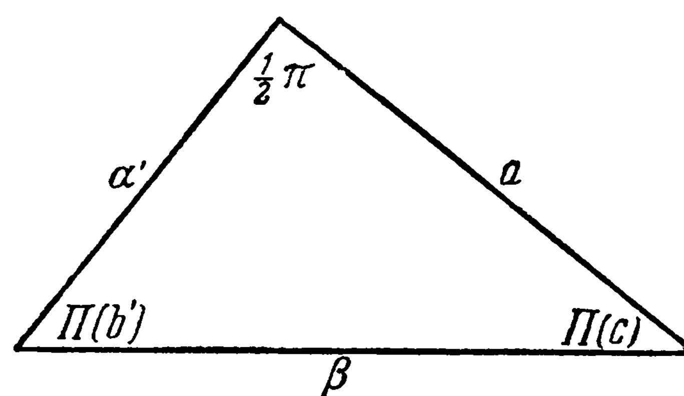
которые получаются из (54), если поменять ролями стороны и углы треугольника.

Полагая в них $\gamma=0$, получим все соотношения (47) — (53).

третий $\frac{1}{2}\pi - \Pi(\alpha)$ между плоскостями, где лежат линии a, c с их общей BB' (ст. 100). Далее, линейный угол $ACC' = \Pi(b)$, а перпендикулярность BC к AC, CC' делает его равным углу двух плоскостей, которые, пересекаясь в BC, проходят чрез AB, BB'.



Чер. 130



Чер. 131

Итак, три линии BA, BB', BC пересекают сферу вокруг B в трех точках, которые будут остриями прямоугольного сферического треугольника $AB'C$ (чер. 130), где гипотенуза $CB' = \Pi(a)$, катеты $CA = \Pi(\beta)$, $B'A = \Pi(c)$, против них углы $\frac{1}{2}\pi - \Pi(\alpha)$, $\Pi(b)$. Полагая $\frac{1}{2}\pi - \Pi(\alpha) = \Pi(\alpha')$, $\frac{1}{2}\pi - \Pi(b) = \Pi(b')$, должны заключать отсюда, что как данный прямолинейный прямоугольный треугольник производит сферический $AB'C$, так, обратно, с этим сферическим должен существовать прямолинейный прямоугольный треугольник (чер. 131), где гипотенуза β, катеты a, α' с углами против них $\Pi(b')$, $\Pi(c)$. От одного прямолинейного треугольника можем, следовательно, переходить к новому, удерживая катет a и переменяя b, c, α, β на α', β, b', c *. Если продолжаем употреблять ударение◊ в том же смысле над всякой буквой, именно, чтобы различить две линии, которых углы параллельности составляют $\frac{1}{2}\pi$, то

* См. примечание [20].

◊ Штрих (значок «′»).

вместо четырех уравнений (49), (50), (51) можем написать десять *:

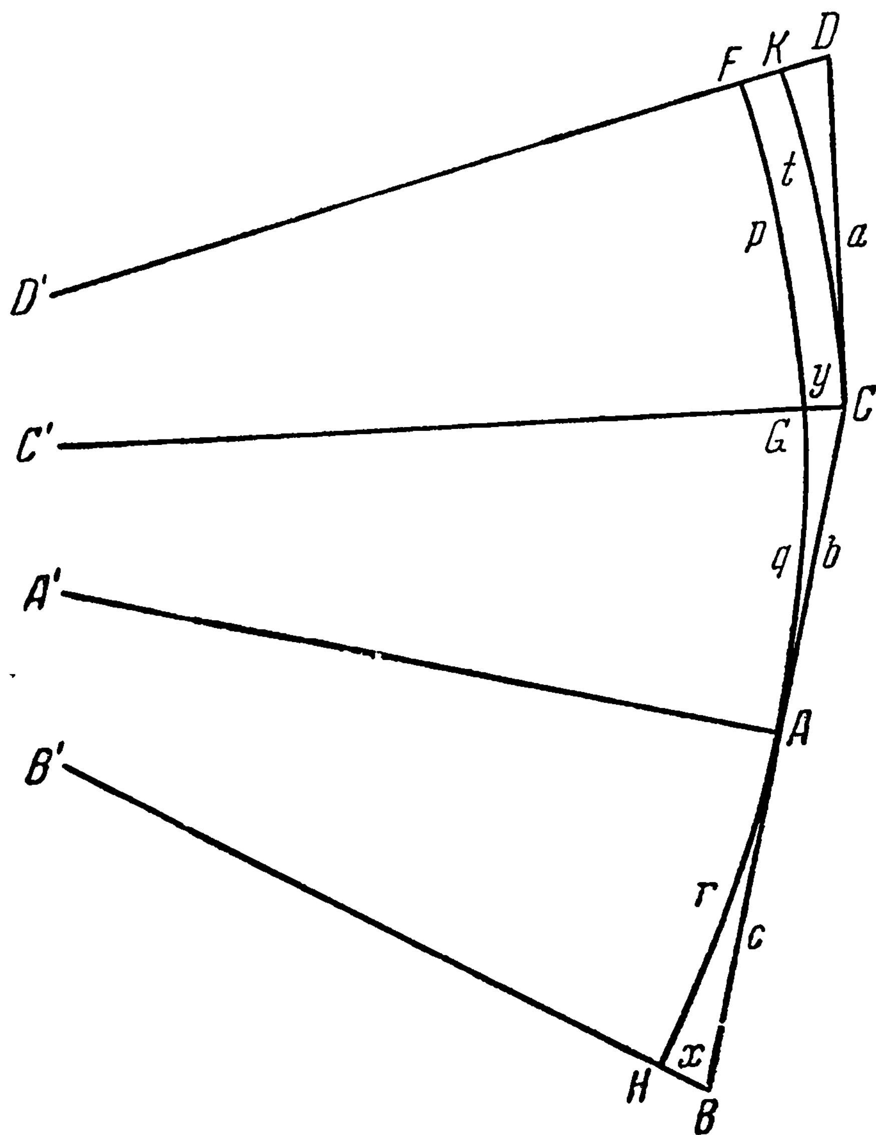
$$\left.\begin{aligned}
2\,\Pi(\alpha) &= \Pi(c-\beta) - \Pi(c+\beta),\\
2\,\Pi(\beta) &= \Pi(c-\alpha) - \Pi(c+\alpha),\\
2\,\Pi(c) &= \Pi(\beta-b') - \Pi(\beta+b'),\\
2\,\Pi(c) &= \Pi(\alpha-a') - \Pi(\alpha+a'),\\
2\,\Pi(\beta) &= \Pi(b'-a') - \Pi(b'+a'),\\
2\,\Pi(\alpha) &= \Pi(a'-b') - \Pi(a'+b'),\\
2\,\Pi(b) &= \Pi(\alpha-a') + \Pi(a'+\alpha),\\
2\,\Pi(a) &= \Pi(\beta-b') + \Pi(b'+\beta),\\
2\,\Pi(a) &= \Pi(c-\alpha) + \Pi(c+\alpha),\\
2\,\Pi(b) &= \Pi(c-\beta) + \Pi(c+\beta).
\end{aligned}\right\}\qquad(55)$$

Подобным образом, вместо двух уравнений (52), (53) — тоже десять:

$$\left.\begin{aligned}
\Pi(\alpha-b) + \Pi(a+\beta) &= \tfrac{1}{2}\pi,\\
\Pi(\beta-a) + \Pi(b+\alpha) &= \tfrac{1}{2}\pi,\\
\Pi(c-a) + \Pi(\alpha'+b') &= \tfrac{1}{2}\pi,\\
\Pi(c-b) + \Pi(\beta'+a') &= \tfrac{1}{2}\pi,\\
\Pi(\beta-\alpha') + \Pi(c'+a') &= \tfrac{1}{2}\pi,\\
\Pi(\alpha-\beta') + \Pi(c'+b') &= \tfrac{1}{2}\pi,\\
\Pi(b'-c') + \Pi(\beta'+\alpha) &= \tfrac{1}{2}\pi,\\
\Pi(a'-c') + \Pi(\alpha+\beta) &= \tfrac{1}{2}\pi,\\
\Pi(a'-\beta') + \Pi(b+c) &= \tfrac{1}{2}\pi,\\
\Pi(b'-\alpha') + \Pi(a+c) &= \tfrac{1}{2}\pi.
\end{aligned}\right\}\qquad(56)$$

* См. заключительную часть примечания [20].

137. Представляем себе вновь прямоугольный треугольник ABC (чер. 129) с тремя параллельными AA', BB', CC', между которыми первая выходит из острия A перпендикулярно к плоскости треугольника. Три плоскости, где параллельные лежат по две, развертываем на плоскость треугольника, полагая катеты a, b в одну, гипотенузу c в другую сторону линии AA' (чер. 132). Катет b с гипотенузой c соединяются теперь в одну прямую BC, будучи в прежнем их положении перпендикулярны к AA', которая параллельна с CC' (ст. 136). Катет $CD=a$ перпендикулярен к CC', с которой ведем еще параллельные BB' через конец B гипотенузы c и DD' через конец D катета a. Все четыре параллельные BB', AA', CC', DD' будут осями предельной кривой $HAGF$, которая, проходя через точку A, пересечет DD', CC', BB' в F, G, H на расстояниях $FD = BH = x$, $CG = y$. С тем вместе как a, b, c соединяются в один прямолинейный прямоугольный треугольник, дуги $FG = p$, $AG = q$, $AH = r$ должны смыкаться в один треугольник предельный и также прямоугольный (ст. 119). В этом треугольнике r—гипотенуза, p, q—катеты, $\Pi(\alpha)$ — угол против p; следовательно (ст. 123),



Чер. 132

$$p = r \sin \Pi(\alpha), \qquad q = r \cos \Pi(\alpha).$$

Пусть $x = f(c), y = f(b)$, где буква f служит знаком геометрической функции, которая притом делается нулем вместе с ее

корнем. Ведем теперь из C между параллельных CC', DD' дугу предельной $CK=t$ так, чтобы CC', следовательно, DD' тоже, была бы двум дугам p, t общей осью. Здесь расстояние $DK= = x-y = f(a)$, после чего

$$f(c) = f(a) + f(b). \tag{57}$$

Дугу t предельной находим [ст. 117, ур. (6)]

$$t = pe^y$$

или

$$t = pe^{f(b)},$$

или, наконец,

$$t = re^{f(b)} \sin \Pi(\alpha).$$

Подобным образом должно быть

$$q = re^{f(a)} \sin \Pi(\beta),$$

что сличая с другим значением q, получим

$$\cos \Pi(\alpha) = e^{f(a)} \sin \Pi(\beta).$$

Удержав a, можем здесь α, β переменить на b', c [ст. 136]; следовательно,

$$\sin \Pi(b) = e^{f(a)} \sin \Pi(c),$$

а в соединении с уравнением (57)

$$e^{f(b)} \sin \Pi(b) = e^{f(c)} \sin \Pi(c).$$

Отсюда заключаем также, что

$$e^{f(a)} \sin \Pi(a) = e^{f(b)} \sin \Pi(b).$$

А как два катета a, b, совершенно произвольные линии, к тому $f(a) = 0$, $\Pi(a) = \frac{1}{2}\pi$ для $a = 0$, то для всех a

$$e^{-f(a)} = \sin \Pi(a).$$ [70].

Уравнение (57) теперь дает

$$\sin \Pi(c) = \sin \Pi(a) \sin \Pi(b). \tag{58}$$

Оно с переменой b, c на α', β (ст. 136) делается

$$\sin \Pi(\beta) = \sin \Pi(a) \cos \Pi(\alpha) \tag{59}$$

и предполагает

$$\sin \Pi(\alpha) = \sin \Pi(b) \cos \Pi(\beta),$$

а с переменой здесь α, b, β на b', α', c (ст. 136),

$$\cos \Pi(b) = \cos \Pi(\alpha) \cos \Pi(c). \tag{60}$$

Между тем, из уравнений (49), (50) находим*

$$\frac{\cos \Pi(b)}{\cos \Pi(\alpha)} = \frac{1 - \operatorname{tang} \frac{1}{2} \Pi(c - \beta) \operatorname{tang} \frac{1}{2} \Pi(c + \beta)}{1 + \operatorname{tang} \frac{1}{2} \Pi(c - \beta) \operatorname{tang} \frac{1}{2} \Pi(c + \beta)},$$

что в соединении с уравнением (60) дает

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} \Pi(c)^2 = \operatorname{tang} \frac{1}{2} \Pi(c - \beta) \operatorname{tang} \frac{1}{2} \Pi(c + \beta). \tag{61}$$

Так как здесь β, c — произвольные линии — не зависят друг от друга, то, полагая $\beta = c$, $2c$, $3c$, ..., заключаем вообще для целого числа n

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} \Pi(nc) = \left\{\operatorname{tang} \frac{1}{2} \Pi(c)\right\}^n.$$

Это требует, чтобы для всех линий x

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} \Pi(x) = e^{-x}. \tag{62}$$

Здесь постоянное число e хотя не известно, но должно быть, однако ж, более единицы, с тем, чтобы $\operatorname{tang} \frac{1}{2} \Pi(x) = 0$ для $x = \infty$. Можно для простоты в вычислениях [за] e принимать основание Непперовых логарифмов, оставляя произвольной или

---

* Вычисления, связанные с получением этой формулы, а также нижеследующих формул (61), (62), более подробно проведены на стр. 60—63 и в подстрочных примечаниях на этих страницах.

неизвестной ту линию, в содержании к которой x выражается числом [71].

С пособием уравнения (62) находим для произвольных, как положительных, так отрицательных линий x, y*

$$\sin \Pi (x+y) = \frac{\sin \Pi (x) \sin \Pi (y)}{1+\cos \Pi (x) \cos \Pi (y)}, \qquad (63)$$

$$\cos \Pi (x+y) = \frac{\cos \Pi (x) + \cos \Pi (y)}{1+\cos \Pi (x) \cos \Pi (y)}, \qquad (64)$$

$$\operatorname{tang} \Pi (x+y) = \frac{\sin \Pi (x) \sin \Pi (y)}{\cos \Pi (x) + \cos \Pi (y)}. \qquad (65)$$

Уравнение (62) служит основанием Воображаемой Геометрии. Оно было доказано в другом месте ◇ по способу границ, не менее строгому. Я повторю здесь это доказательство.

Мы видели (ст. 136), что когда дан прямолинейный прямоугольный треугольник, где гипотенуза c, катеты a, b, против них углы $\Pi(\alpha)$, $\Pi(\beta)$, то должен существовать такой же треугольник с гипотенузой β, катетами a, α', с углами против них $\Pi(b')$, $\Pi(c)$. Две линии α', b' определяются здесь уравнениями

$$\Pi(\alpha) + \Pi(\alpha') = \frac{1}{2}\pi, \qquad \Pi(b) + \Pi(b') = \frac{1}{2}\pi.$$

Пусть это будет треугольник ABC (чер. 133), где точки A, B, C представляют острия в углах $\Pi(c)$, $\Pi(b')$, $\frac{1}{2}\pi$, следовательно против них бока $BC = \alpha'$, $AC = a$, $AB = \beta$. Вокруг A представляем себе сферу с полупоперечником β. Продолжаем AC до пересечения в D со сферой, потом

---

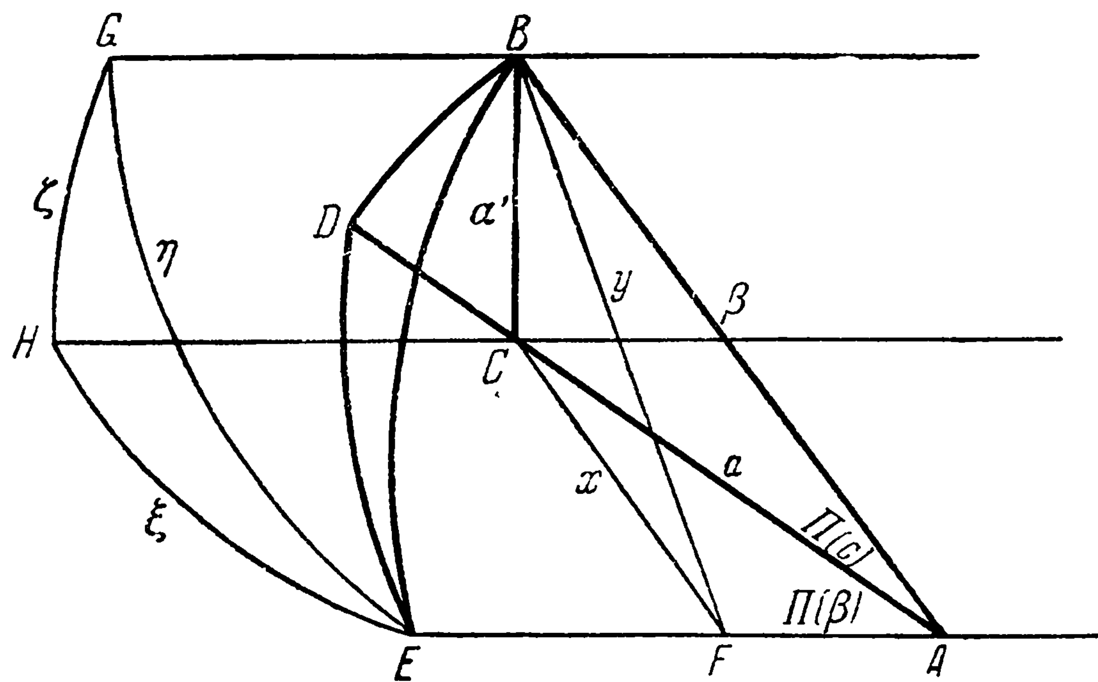
* Формулы (63)—(65) вытекают из соотношений

$$\sin \Pi (x) = \frac{1}{\operatorname{ch} x}, \qquad \cos \Pi (x) = \operatorname{th} x, \qquad \operatorname{tg} \Pi (x) = \frac{1}{\operatorname{sh} x}$$

(см. сноску * на стр. 70).

◇ Exposition succincte de la Géométrie etc., сочинение, написанное в 1826 году, но которое не напечатано. Также в статьях *о началах Геометрии* (Каз. Вестн. 1829, 1830 годы). [*Примечание Лобачевского*].

к треугольнику ABC ведем другую плоскость чрез AD перпендикулярно; в ней полупоперечник AE сферы под углом $DAE = \Pi(\beta)$ к AD. Между точками B, D, E на сфере дуги больших кругов составляют прямоугольный треугольник, где катет $BD = \Pi(c)$, другой $DE = \Pi(\beta)$; следовательно, против них углы $BED = \Pi(b)$, $DBE = \Pi(\alpha')$, гипотенуза $BE = \Pi(a)$ (ст. 136). Опускаем из точки C к AE перпендикул $CF = x$, потом конец F этого перпендикула соединяем с точкой B линией $BF = y$, которая также должна быть перпендикулярна к AF, потому что



Чер. 133

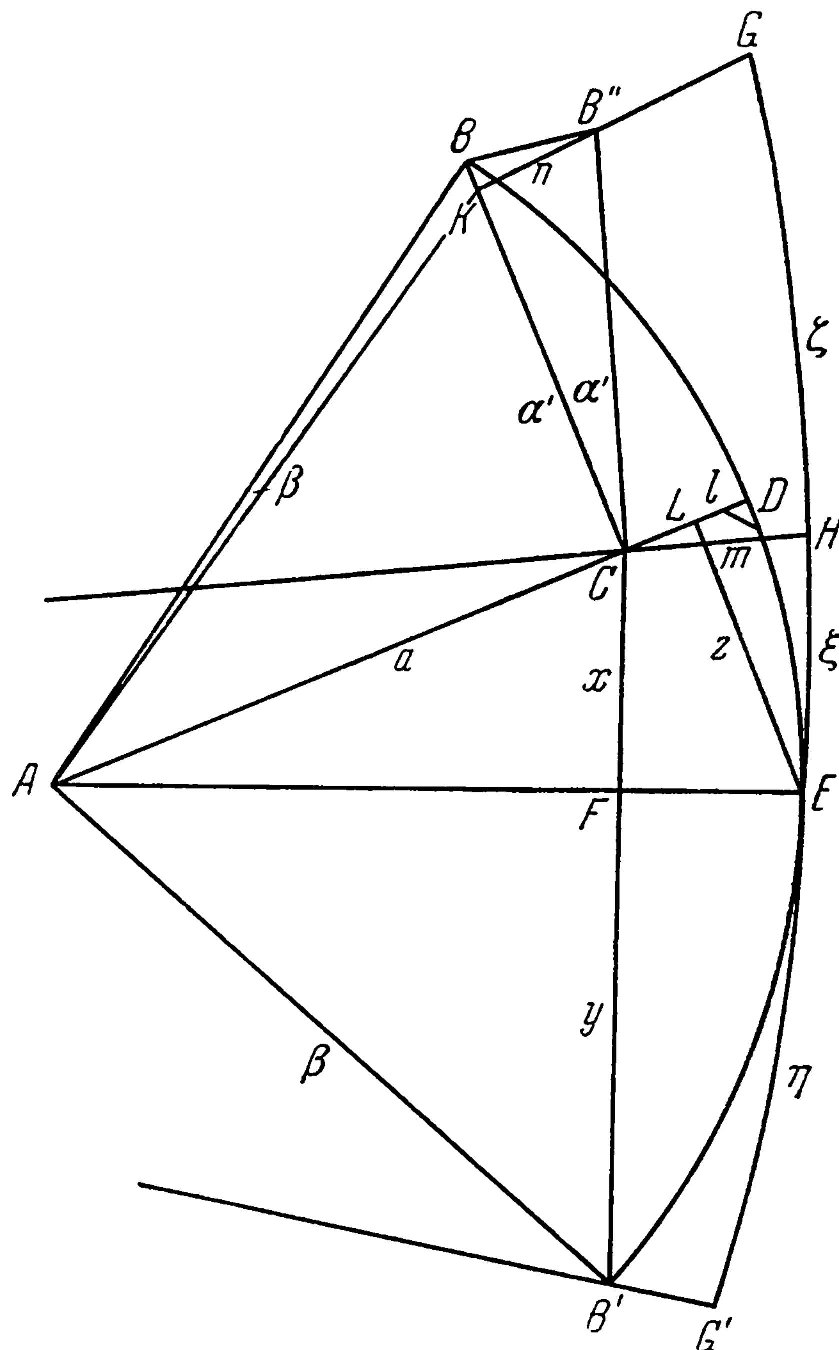
плоскости двух треугольников ABC, ACF перпендикулярны между собой, их линия пересечения AC перпендикулярна к BC; следовательно, BC — перпендикул к плоскости CAF; плоскость треугольника BCF, проходя чрез BC, перпендикулярна к плоскости CAF; двум этим плоскостям общая линия CF перпендикулярна к AF, после чего AF — перпендикул к плоскости BCF. Ведем теперь чрез точки B, C прямые BG, CH, параллельные с AE*, покуда встретятся в G, H с предельной поверхностию, на которой лежит точка E и которой AF, BG, CH служат осями. В предельном треугольнике GHE

* Они параллельны между собою в направлении GB, HC и EA.

полагаем гипотенузу $GE = \eta$, катет $HE = \xi$, $HG = \zeta$. Их содержания будут (ст. 123)

$$\frac{\zeta}{\eta} = \sin \Pi (b), \qquad \frac{\xi}{\eta} = \cos \Pi (b).$$

Заметим к этому, что когда в треугольнике ABC увеличиваем гипотенузу β, не переменяя угол $\Pi (b')$ и, следовательно, предполагая самую линию b постоянной, так же как угол $\Pi (b)$, то катет a растет до бесконечности, тогда как другой катет α' не переходит за границу b'. Итак, если в $\triangle BCF$, не переменяя угол $BFC = \Pi (b)$, увеличиваем x, покуда, наконец, сделается $\alpha' = b'$, то бока HG, HE, GE предельного треугольника приобретут то самое большое значение, к которому приближаются с возрастанием β, когда, удерживая точку E на месте, двигаем A по направлению EA. Развертываем теперь плоскости всех параллельных и плоскости треугольников, сомкнутых в точку A, на плоскость



Чер. 134

ADE, обращая как те, так и другие на линиях соединения с последней. Бока сферического треугольника BDE сделаются дугами BD, DE, EB' на круге (чер. 134), которого центр A, полупоперечник $AB = AD = AE = AB' = \beta$. Бока прямолинейного треугольника будут теперь: перпендикул $B'F = y$ от конца B' полупоперечника AB' к полупоперечнику AE, продолжение $FC = x$

перпендикула $B'F$ по другую сторону AE до встречи с полупоперечником AD в точке C; наконец, из этой точки перпендикул $BC = \alpha'$ к AD. Бока предельного треугольника соединяются в одну дугу $G'EHG$ предельной, проведенной через точку E, тогда как полуйоперечник AE служит ей осью. Самые бока здесь находим: $EG' = \eta$, когда ведем через точку B' параллельную с AE до встречи в G' с предельной кривой; $EH = \xi$, когда через точку C ведем параллельную с AE до встречи в H с предельной; $HG = \zeta$, когда ставим в C к HC перпендикул $CB'' = \alpha'$, чрез вершину которого ведем $B''G$ параллельно с AE до встречи с предельной в G. Ось HC должна пересекать круг где-нибудь в m между точек H, C. Ось GB'' в своем продолжении за точку B'' встретит круг где-нибудь в n. Расстояния Gn, Hm, $G'B'$ на параллельных между предельной и кругом, будучи заключены в известных границах, назначаемых крайними значениями дуг GH, HE, EG', уменьшаются с возрастанием β и могут быть сделаны как угодно малыми (ст. 114). Угол $BCB'' = DCH < CAF$, но последний представляет $\Pi(\beta)$ и, следовательно, с возрастанием β исчезает, так же как и линия BB'' между двух точек B, B''. В равнобедренном треугольнике BCB'' углы при основании BB'' растут вместе с β, приближаясь к $\frac{1}{2}\pi$ до того, что, наконец, разность может быть пренебрежена. Напротив, угол $nB''C = \Pi(\alpha')$, уменьшаясь, не может переходить за границу $\Pi(b')$; следовательно, линия $B''n$, по крайней мере с возрастанием β за известное значение, должна входить внутрь треугольника BCB'', пересекаясь уже здесь с кругом в n и составляя, таким образом, треугольник BnB'', где угол BnB'' тупой, потому что смежный ему BnK заключается в остром BnA, когда конец n дуги Bn соединяем полупоперечником An с центром круга. Отсюда следует, что хорда $Bn < BB''$ может быть сделана менее всякой данной линии, тогда как хорда $2\alpha'$ двойной дуги BD приближается непрестанно к $2b'$. Это значит, что дуга Bn в сравнении со всей дугой BD должна

быть пренебрегаема при довольно большом полупоперечнике β. Переходим теперь к дуге ED на круге, вместо которой можем брать дугу Em без различия, как скоро полупоперечник β достаточно велик. Чтобы это доказать, опускаем из точек m, E перпендикулы ml, EL к полупоперечнику AD. Первый из них ml менее гипотенузы mC, еще менее нежели HC, следовательно, может быть сделан по произволу малым*, между тем как перпендикул $EL > x$ возрастает вместе с β. Итак, границы, к которым с возрастанием вместе с β приближаются содержания дуг $\frac{BD}{B'E}$, $\frac{DE}{B'E}$, те же, что для содержаний $\frac{nm}{B'E}$, $\frac{Em}{B'E}$; следовательно, будут самые содержания $\frac{\zeta}{\eta}$, $\frac{\xi}{\eta}$ дуг на предельной (ст. 116). Поставя $\Pi(c)$, $\Pi(\beta)$, $\Pi(a)$ вместо BD, DE, $B'E$, мы выразим это, написав

$$\text{Гр.}\ \frac{\Pi(c)}{\Pi(a)} = \frac{\zeta}{\eta}{}^{\diamond}.$$

$$\text{Гр.}\ \frac{\Pi(\beta)}{\Pi(a)} = \frac{\xi}{\eta},$$

или, как нашли выше,

$$\text{Гр.}\ \frac{\Pi(c)}{\Pi(a)} = \sin\Pi(b),$$

$$\text{Гр.}\ \frac{\Pi(\beta)}{\Pi(a)} = \cos\Pi(b).$$

Отсюда

$$\text{Гр.}\ \frac{\Pi(c)}{\Pi(\beta)} = \operatorname{tang}\Pi(b),$$

$$\text{Гр.}\ \frac{\Pi(a)}{\Pi(\beta)} = \frac{1}{\cos\Pi(b)}.$$

---

* Это заключение ошибочно: отрезок HC не стремится к нулю при $\beta \to \infty$; однако отрезок HC (а значит и mC) ограничен, а угол mCl, меньший чем $\angle CAE$, стремится к нулю, откуда следует, что $ml \to 0$.

◇ Гр. — граница (предел).

Потом, ставя $\frac{1}{2}\pi - \Pi(b')$ вместо $\Pi(b)$, получим

$$\text{Гр. } \frac{\Pi(a)+\Pi(c)}{\Pi(\beta)} = \cot\frac{1}{2}\Pi(b'),$$

а принимая в помощь третье и восьмое из уравнений (55),

$$\text{Гр. } \frac{\Pi(\beta - b')}{\Pi(\beta)} = \cot\frac{1}{2}\Pi(b'). \tag{66}$$

Так как здесь $\beta = \infty$, b' — произвольная линия, то разумея под x, y новые произвольные, можем полагать один раз $b' = x$, не переменяя β; в другой раз $b' = y$, переменяя β на $\beta - x$. Так находим

$$\text{Гр. } \frac{\Pi(\beta - x)}{\Pi(\beta)} = \cot\frac{1}{2}\Pi(x),$$

$$\text{Гр. } \frac{\Pi(\beta - x - y)}{\Pi(\beta - x)} = \cot\frac{1}{2}\Pi(y).$$

Произведение двух этих уравнений дает

$$\text{Гр. } \frac{\Pi(\beta - x - y)}{\Pi(\beta)} = \cot\frac{1}{2}\Pi(x)\cdot\cot\frac{1}{2}\Pi(y).$$

Это значит [ур. (66)]

$$\cot\frac{1}{2}\Pi(x+y) = \cot\frac{1}{2}\Pi(x)\cdot\cot\frac{1}{2}\Pi(y),$$

что ведет снова к уравнению (62) [72].

Глава XI

ЗАВИСИМОСТЬ УГЛОВ И БОКОВ ТРЕУГОЛЬНИКА

138. Равенство тех частей, которые производят одинаковость треугольников, предполагает зависимость с ними трех остальных. Итак, должны существовать уравнения для частей треугольника, взятых из шести по четыре, кроме трех углов, когда рассуждаем о прямолинейных треугольниках в Употребительной Геометрии (ст. 92). Таким образом, уравнения могут заключать в себе части как сферического, так и прямолинейного треугольника в Воображаемой Геометрии:

1) *три бока с одним углом,*

2) *два бока с двумя против них углами,*

3) *два бока с углом между ними, да с углом против одного из них,*

4) *три угла с одним боком.*

В Употребительной Геометрии входят те же случаи, кроме последнего для прямолинейных треугольников.

Если называем, как и везде в этой главе будем разуметь, a, b, c — бока, A, B, C — против них углы треугольника, то все сказанные случаи должны приводить к уравнениям, где бы заключались:

1) a, b, c, A,

2) a, b, A, B,

3) a, b, A, C,

4) a, A, B, C.

Последнее невозможно для прямолинейных треугольников в Употребительной Геометрии. Во всех этих уравнениях можем

буквы переменять одну на другую по порядку, или вообще сохраняя ту же взаимность их отношений, покуда приходим снова к прежним. Так, первый случай дает уравнения с буквами:

$$a, b, c, A$$
$$a, b, c, B$$
$$a, b, c, C;$$

второй:

$$a, b, A, B$$
$$a, c, A, C$$
$$b, c, B, C;$$

третий:

$$a, b, A, C$$
$$b, c, B, A$$
$$c, a, C, B$$
$$a, b, B, C$$
$$b, c, C, A$$
$$c, a, A, B;$$

четвертый:

$$a, A, B, C$$
$$b, A, B, C$$
$$c, A, B, C$$

— всех пятнадцать уравнений.

139. *В прямоугольном треугольнике, как сферическом, так и прямолинейном Воображаемой Геометрии, для каждых трех частей можем предполагать уравнения, разумея к тому прямой угол вместо четвертой данной части.*

Итак, если $C = \frac{1}{2}\pi$, то должны существовать уравнения между частей:

$$a, b, c$$
$$a, b, A$$
$$a, c, A$$
$$a, c, B$$
$$a, A, B$$
$$c, A, B$$

— всего шесть уравнений, из которых последние два невозможны в Употребительной Геометрии для прямолинейных треугольников, тогда как уже первые четыре нам известны [ст. 105, 123], именно

$$c^2 = a^2 + b^2,$$
$$a = b \operatorname{tang} A,$$
$$a = c \sin A,$$
$$a = c \cos B.$$

140. Мы видели, что в прямолинейных треугольниках Употребительной Геометрии [ур. (28)]

$$c = a \cos B + b \cos A.$$

По примеру чего пишем еще

$$a = b \cos C + c \cos B,$$
$$b = c \cos A + a \cos C.$$

Умножаем все три уравнения по порядку на c, a, b, потом вычитая первое с последним из второго, получим

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \tag{67}$$

— уравнение между a, b, c, A, которое предполагает еще два других (ст. 138):

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

Уравнение с a, b, A, B было найдено [ур. (26)]:

$$a \sin B - b \sin A = 0 \tag{68}$$

и предполагает, следовательно, два других (ст. 138):

$$b \sin C - c \sin B = 0,$$
$$c \sin A - a \sin C = 0,$$

как и действительно последнее выходит из двух первых с исключением b, причем $\sin B$ уничтожается вместе сам собою.

Когда присоединяем сюда положение, принятое в Употребительной Геометрии,

$$A+B+C=\pi,$$

то можем уравнению (68) дать другой вид:

$$a\sin(A+C)-b\sin A=0$$

или

$$\frac{b}{a}=\cos C+\sin C\cot A, \tag{69}$$

— уравнение между a, b, A, C.

141. Для прямолинейного [прямоугольного] треугольника Воображаемой Геометрии, когда c — гипотенуза, a, b — катеты, следовательно, $C=\frac{1}{2}\pi$, было найдено [ур. (58), (59), (60)]:

$$\sin\Pi(c)=\sin\Pi(a)\sin\Pi(b), \tag{70}$$

$$\cos\Pi(a)=\cos B\cos\Pi(c), \tag{71}$$

$$\sin B=\cos A\sin\Pi(a)\,*. \tag{72}$$

С переменой a, B на b, A уравнение (71) делается

$$\cos\Pi(b)=\cos A\cos\Pi(c).$$

Сюда внеся значение $\cos\Pi(b)$ из уравнения (70), получим

$$\cos A^2=\frac{\cos\Pi(c)^2-\cos\Pi(a)^2\;\diamond}{\sin\Pi(a)^2\cos\Pi(c)^2},$$

---

* Уравнение (70) совпадает с (58), уравнение (72) — с (59), а уравнение (71) получается из уравнения (60) после замены b на a и $\Pi(\alpha)$ на B.

◇ Возведя предыдущее соотношение в квадрат и складывая его с соотношением $\sin^2\Pi(b)=\frac{\sin^2\Pi(c)}{\sin^2\Pi(a)}$, получающимся из (70), найдем

$$\frac{\sin^2\Pi(c)}{\sin^2\Pi(a)}+\cos^2 A\cos^2\Pi(c)=1,$$

откуда

$$\cos^2 A=\frac{\sin^2\Pi(a)-\sin^2\Pi(c)}{\sin^2\Pi(a)\cos^2\Pi(c)}=\frac{\cos^2\Pi(c)-\cos^2\Pi(a)}{\sin^2\Pi(a)\cos^2\Pi(c)}.$$

далее

$$\sin A^2 = \cot \Pi (a)^2 \operatorname{tang} \Pi (c)^2 \,{}^{*},$$

а так как углы A, $\Pi(a)$, $\Pi(c)$ острые, то

$$\sin A \operatorname{tang} \Pi (a) = \operatorname{tang} \Pi (c). \tag{73}$$

Поставя сюда значение $\operatorname{tang} \Pi(c)$ из уравнения (70) $^{\diamond}$, получим

$$\sin A^2 = \frac{\cos \Pi (a)^2 \sin \Pi (b)^2}{1 - \sin \Pi (a)^2 \sin \Pi (b)^2};$$

следовательно,

$$\cos A^2 = \frac{\cos \Pi (b)^2}{1 - \sin \Pi (a)^2 \sin \Pi (b)^2},$$

и, наконец,

$$\operatorname{tang} A = \cos \Pi (a) \operatorname{tang} \Pi (b) \,{}^{\triangle}. \tag{74}$$

Из уравнений (71), (72), исключив a, находим

$$\cos \Pi (c)^2 = \frac{\cos A^2 - \sin B^2}{\cos A^2 \cos B^2},$$

$$\star \quad \sin^2 A = 1 - \frac{\cos^2 \Pi (c) - \cos^2 \Pi (a)}{\sin^2 \Pi (a) \cos^2 \Pi (c)} = \frac{\cos^2 \Pi (c) (\sin^2 \Pi (a) - 1) + \cos^2 \Pi (a)}{\sin^2 \Pi (a) \cos^2 \Pi (c)} = \frac{-\cos^2 \Pi (c) \cos^2 \Pi (a) + \cos^2 \Pi (a)}{\sin^2 \Pi (a) \cos^2 \Pi (c)} = \frac{\cos^2 \Pi (a) \sin^2 \Pi (c)}{\sin^2 \Pi (a) \cos^2 \Pi (c)} = \operatorname{ctg}^2 \Pi (a) \operatorname{tg}^2 \Pi (c).$$

$$\diamond \quad \operatorname{tg}^2 \Pi (c) = \frac{\sin^2 \Pi (c)}{1 - \sin^2 \Pi (c)} = \frac{\sin^2 \Pi (a) \sin^2 \Pi (b)}{1 - \sin^2 \Pi (a) \sin^2 \Pi (b)}.$$

$$\triangle \quad \operatorname{tg}^2 A = \frac{1}{\cos^2 A} - 1 = \frac{1 - \sin^2 \Pi (a) \sin^2 \Pi (b)}{\cos^2 \Pi (b)} - 1 = \frac{\sin^2 \Pi (b) - \sin^2 \Pi (a) \sin^2 \Pi (b)}{\cos^2 \Pi (b)} = \cos^2 \Pi (a) \operatorname{tg}^2 \Pi (b).$$

потом

$$\sin \Pi(c) = \operatorname{tang} A \operatorname{tang} B\,^{*}. \tag{75}$$

Уравнения (70), (71), (72), (73), (74), (75) будут те самые, которых существование предполагали. Из них достаточно знать три, чтобы находить остальные; даже можно взять эти три произвольно, но различные в числе всех, которые составятся с прибавлением сюда новых, когда переменяем острый угол и катет на другие в треугольнике. Так, в прибавление к уравнениям (71), (72), (73), (74) вправе писать еще четыре

$$\cos \Pi(b) = \cos A \cos \Pi(c), \tag{76}$$

$$\sin A = \cos B \sin \Pi(b), \tag{77}$$

$$\operatorname{tang} \Pi(c) = \sin B \operatorname{tang} \Pi(b), \tag{78}$$

$$\operatorname{tang} B = \cos \Pi(b) \operatorname{tang} \Pi(a), \tag{79}$$

которые с прежними шестью составляют всех уравнений десять для прямолинейного прямоугольного треугольника в Воображаемой Геометрии. Из них пять (73), (74), (75), (78), (79) прямо следуют из уравнений (55), когда, разделив на 2, берем на той и другой стороне тангенс, принимая к тому в помощь уравнение (62) и полагая наконец $\Pi(\alpha) = A$, $\Pi(\beta) = B$. Например, из уравнений (55) первое ◊ дает

$$\operatorname{tang} A = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} \Pi(a' - b') - \operatorname{tang} \frac{1}{2} \Pi(a' + b')}{1 + \operatorname{tang} \frac{1}{2} \Pi(a' - b') \operatorname{tang} \frac{1}{2} \Pi(a' + b')} =$$

$$= \frac{e^{a'}}{e^{2a'} + 1}(e^{b'} - e^{-b'}).$$

Это значит:

$$\operatorname{tang} A = \cos \Pi(a) \operatorname{tang} \Pi(b)$$

---

* $$\sin^2 \Pi(c) = 1 - \frac{\cos^2 A - \sin^2 B}{\cos^2 A \cos^2 B} =$$

$$= \frac{\sin^2 B - \sin^2 B \cos^2 A}{\cos^2 A \cos^2 B} = \operatorname{tg}^2 A \operatorname{tg}^2 B.$$

◊ Должно быть: шестое.

— такое ж уравнение, как и выше [ур. (74)]. То же находим подобным образом из второго * уравнения (55).

Из уравнений (55) третье ◇ дает

$$\operatorname{tang}\Pi(a) = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\Pi(\beta - b') + \operatorname{tang}\frac{1}{2}\Pi(\beta + b')}{1 - \operatorname{tang}\frac{1}{2}\Pi(\beta - b')\operatorname{tang}\frac{1}{2}\Pi(\beta + b')} =$$

$$= \frac{e^{\beta}}{e^{2\beta} - 1}\left(e^{b'} + e^{-b'}\right).$$

Это значит:

$$\operatorname{tang}\Pi(a) = \frac{\operatorname{tang} B}{\cos\Pi(b)}$$

— такое ж уравнение, как и выше [ур. (79)]. То же находим из пятого уравнения (55).

Этих двух примеров довольно, чтобы судить, каким образом уравнения (55) поверяют некоторые в числе десяти для треугольника. Остальные пять следуют из их соединения между собою.

Все десять уравнений для треугольника могут быть также выведены из уравнений (56), когда берем в помощь уравнение (62). Например, два первых из уравнений (56) дают

$$\Pi(\alpha - b) - \Pi(\alpha + b) = \Pi(\beta - a) - \Pi(\beta + a),$$
$$\Pi(\alpha - b) + \Pi(\alpha + b) = \Pi(a - \beta) - \Pi(a + \beta).$$

Разделяя каждое на 2, потом взяв на двух сторонах тангенс и ставя, наконец, A, B вместо $\Pi(\alpha)$, $\Pi(\beta)$, получим

$$\sin A \operatorname{tang}\Pi(a) = \sin B \operatorname{tang}\Pi(b),$$
$$\operatorname{tang} A \operatorname{tang} B = \sin\Pi(a)\sin\Pi(b)\ ^{\triangle}.$$

---

* Должно быть: седьмого.

◇ Должно быть: восьмое.

△ Применяя тождество (62) к соотношению

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\Pi(\alpha - b)}{2} - \operatorname{tg}\frac{\Pi(\alpha + b)}{2}}{1 + \operatorname{tg}\frac{\Pi(\alpha - b)}{2}\operatorname{tg}\frac{\Pi(\alpha + b)}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\Pi(\beta - a)}{2} - \operatorname{tg}\frac{\Pi(\beta + a)}{2}}{1 + \operatorname{tg}\frac{\Pi(\beta - a)}{2}\operatorname{tg}\frac{\Pi(\beta + a)}{2}}\ ,$$

Исключив отсюда B, находим уравнение (74); если ж исключаем b, то приходим к уравнению (72).

Достаточно двух различных уравнений из всех десяти, чтоб отсюда вывести все прочие, переменяя* (ст. 136)

$$\Pi(b) \qquad \Pi(c) \qquad\qquad A \qquad B$$

на

$$\frac{1}{2}\pi - A \qquad B \qquad \frac{1}{2}\pi - \Pi(b) \qquad \Pi(c),$$

потом a, b, A, B на b, a, B, A; так продолжая, покуда придем к прежним уравнениям. Например, возьмем уравнения (70), (75). Первое дает

$$\left.\begin{aligned} \sin\Pi(a)\sin\Pi(b) &= \sin\Pi(c), \\ \sin\Pi(a)\cos A &= \sin B, \\ \sin\Pi(b)\cos B &= \sin A, \\ \cos A\cos\Pi(c) &= \cos\Pi(b), \\ \cos B\cos\Pi(c) &= \cos\Pi(a). \end{aligned}\right\} \qquad (80)$$

Подобным образом из уравнения (75) происходят

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang} A \operatorname{tang} B &= \sin\Pi(c), \\ \operatorname{tang}\Pi(b)\sin B &= \operatorname{tang}\Pi(c), \\ \operatorname{tang}\Pi(a)\sin A &= \operatorname{tang}\Pi(c), \\ \operatorname{tang}\Pi(a)\cos\Pi(b) &= \operatorname{tang} B, \\ \operatorname{tang}\Pi(b)\cos\Pi(a) &= \operatorname{tang} A. \end{aligned}\right\} \qquad (81)$$

мы получим

$$\frac{e^{-\alpha}(e^{b}-e^{-b})}{1+e^{-2\alpha}} = \frac{e^{-\beta}(e^{a}-e^{-a})}{1+e^{-2\beta}}$$

или

$$\frac{\operatorname{sh} b}{\operatorname{ch}\alpha} = \frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{ch}\beta};$$

но, согласно сноске* на стр. 70

$$\operatorname{sh} x = \operatorname{ctg}\Pi(x); \quad \operatorname{ch} x = \frac{1}{\sin\Pi(x)},$$

откуда и следует первая формула текста. Вторая получается аналогично.

* Подстановка Лобачевского (см. стр. 54 или стр. 276, а также примечание [20]).

142. Переходим теперь к уравнениям для четырех частей во всяком прямолинейном треугольнике Воображаемой Геометрии.

Опустив из острия C к боку c перпендикул p, получим два прямоугольных треугольника: один с гипотенузой a, катетами p, x, с углом B против p; другой с гипотенузой b, катетами p, $c-x$, с углом A против p, когда x положительное число (чер. 121), или с углом $\pi - A$ против p, когда x отрицательное (чер. 122). В обоих случаях, так же как и для $x=0$, получим [ур. (73), (71)]:

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tang}\Pi(a) &= \sin B \operatorname{tang}\Pi(p),\\ \operatorname{tang}\Pi(b) &= \sin A \operatorname{tang}\Pi(p),\\ \cos\Pi(a)\cos B &= \cos\Pi(x),\\ \cos\Pi(b)\cos A &= \cos\Pi(c-x).\end{aligned}\right\} \qquad (82)$$

Из первых двух исключив $\operatorname{tang}\Pi(p)$, находим

$$\operatorname{tang}\Pi(a)\sin A = \operatorname{tang}\Pi(b)\sin B. \qquad (83)$$

Это также следует из уравнения (54), когда здесь под $\Pi(\alpha)$, $\Pi(\beta)$, $\Pi(\gamma)$ разумеем A, B, C. С переменой a, γ c, α на c, α, a, γ будет

$$\left.\begin{aligned}\Pi(\beta) &= \Pi(a-\gamma) - \Pi(c+\alpha),\\ \Pi(\beta) &= \Pi(c-\alpha) - \Pi(a+\gamma).\end{aligned}\right\} \qquad (84)$$

Отсюда

$$\Pi(a+\gamma) + \Pi(a-\gamma) = \Pi(c+\alpha) + \Pi(c-\alpha).$$

Разделив на 2, потом взяв тангенс на двух сторонах, получим [ур. (62)]

$$\frac{e^a}{e^{2a}-1}\left(e^\gamma + e^{-\gamma}\right) = \frac{e^c}{e^{2c}-1}\left(e^\alpha + e^{-\alpha}\right).$$

Это значит:

$$\frac{\operatorname{tang}\Pi(a)}{\sin C} = \frac{\operatorname{tang}\Pi(c)}{\sin A}\,* \qquad (85)$$

— уравнение, подобное прежнему [ур. (83)].

---

* Предыдущее соотношение может быть записано в следующем виде:

$$\frac{\operatorname{ch}\gamma}{\operatorname{sh}a} = \frac{\operatorname{ch}\alpha}{\operatorname{sh}c},$$

откуда, в силу формул, приведенных в сноске * на стр. 70, следует (85).

Из уравнений (82), исключив x [ур. (64)], находим

$$\cos\Pi(c) = \frac{\cos\Pi(a)\cos B + \cos\Pi(b)\cos A}{1 + \cos\Pi(a)\cos\Pi(b)\cos A\cos B} \text{ *}.$$

Отсюда

$$\cos\Pi(a)\cos B = \frac{\cos\Pi(c) - \cos\Pi(b)\cos A}{1 - \cos\Pi(b)\cos\Pi(c)\cos A},$$

потом

$$\{1 - \cos A\cos\Pi(b)\cos\Pi(c)\}\{1 - \cos B\cos\Pi(c)\cos\Pi(a)\} = \\ = \sin\Pi(c)^2 \text{ ◇}.$$

По примеру чего

$$\left.\begin{aligned} &\{1 - \cos B\cos\Pi(c)\cos\Pi(a)\}\{1 - \cos C\cos\Pi(a)\cos\Pi(b)\} = \\ &\qquad = \sin\Pi(a)^2, \\ &\{1 - \cos C\cos\Pi(a)\cos\Pi(b)\}\{1 - \cos A\cos\Pi(b)\cos\Pi(c)\} = \\ &\qquad = \sin\Pi(b)^2. \end{aligned}\right\} \quad (86)$$

Из этих трех уравнений произведение первого на последнее, будучи разделено на второе, дает

$$\{1 - \cos A\cos\Pi(b)\cos\Pi(c)\}^2 = \frac{\sin\Pi(b)^2\sin\Pi(c)^2}{\sin\Pi(a)^2};$$

следовательно,

$$\cos A\cos\Pi(b)\cos\Pi(c) + \frac{\sin\Pi(b)\sin\Pi(c)}{\sin\Pi(a)} = 1. \quad (87)$$

Сюда поставя значение $\sin\Pi(c)$ из уравнения (85) находим

$$\cos\Pi(c) = \frac{\cos\Pi(a)\sin C}{\sin\Pi(b)\sin A + \cos\Pi(a)\cos\Pi(b)\cos A\sin C} \text{ △}.$$

---

* Вследствие (64)

$$\cos\Pi(c) = \cos\Pi(c - x + x) = \frac{\cos\Pi(c - x) + \cos\Pi(x)}{1 + \cos\Pi(c - x)\cos\Pi(x)}.$$

◇ Обозначая $p = \cos A\cos\Pi(b)$; $q = \cos B\cos\Pi(a)$; $r = \cos\Pi(c)$, мы будем иметь $r = \frac{p + q}{1 + pq}$, $[1 - \cos A\cos\Pi(b)\cos\Pi(c)]\,[1 - \cos B\cdot\cos\Pi(a)\cos\Pi(c)] = (1 - pr)(1 - qr) = 1 - r(p + q) + pqr^2 = 1 - r^2(1 + pq) + r^2pq = 1 - r^2 = \sin^2\Pi(c)$.

△ $\sin\Pi(c)$ заменяется выражением $\frac{\sin A}{\sin C}\operatorname{tg}\Pi(a)\cos\Pi(c)$.

Это значение $\cos \Pi(c)$ внеся в уравнение (86), получим после всех приведений

$$\cot A \sin C \sin \Pi(b) + \cos C = \frac{\cos \Pi(b)}{\cos \Pi(a)}\,{}^{*}. \qquad (88)$$

Исключив отсюда $\sin \Pi(b)$ в соединении с уравнением (83) ◇,

$$\frac{\cos \Pi(a)}{\cos \Pi(b)} \cos C = 1 - \frac{\cos A \sin C}{\sin B} \sin \Pi(a).$$

Между тем, уравнение (88) с переменой a, b, A на b, a, B дает

$$\frac{\cos \Pi(a)}{\cos \Pi(b)} = \cot B \sin C \sin \Pi(a) + \cos C.$$

Из двух последних уравнений исключив $\cos \Pi(b)$ △, потом разделив на $\sin C$ и помножив на $\sin B$, получим

$$\cos A + \cos B \cos C = \frac{\sin B \sin C}{\sin \Pi(a)}. \qquad (89)$$

---

* Полагая $\cos \Pi(c) = \dfrac{\cos \Pi(a) \sin C}{N}$, где N — знаменатель предыдущего выражения, получим

$$1 - \cos A \cos \Pi(b) \cos \Pi(c) = 1 - \cos A \cos \Pi(b) \frac{\cos \Pi(a) \sin C}{N} =$$
$$= 1 - \frac{N - \sin \Pi(b) \sin A}{N} = \frac{1}{N} \sin \Pi(b) \sin A.$$

Подставляя в последнее из соотношений (86), мы получим

$$[1 - \cos C \cos \Pi(a) \cos \Pi(b)] \sin \Pi(b) \sin A = N \sin^2 \Pi(b),$$

или, после сокращения на $\sin \Pi(b)$ и раскрытия скобок

$$\sin A - \sin A \cos C \cos \Pi(a) \cos \Pi(b) = \sin A \sin \Pi(b)^2 +$$
$$+ \sin \Pi(b) \cos A \sin C \cos \Pi(a) \cos \Pi(b).$$

Заменив теперь разность первых членов обеих частей через $\sin A \cos^2 \Pi(b)$ и разделив обе части на $\sin A \cos \Pi(a) \cos \Pi(b)$, получим уравнение, приведенное в тексте.

◇ Т. е., положив $\sin \Pi(b) = \operatorname{tg} \Pi(a) \dfrac{\sin A}{\sin B} \cos \Pi(b)$.

△ Т. е., заменив в предпоследнем соотношении $\dfrac{\cos \Pi(a)}{\cos \Pi(b)}$ его последним выражением.

Уравнения (83), (87), (88), (89) — те самые, которые мы предположили найти для прямолинейных треугольников (ст. 138). Последнее может быть выведено прямо из уравнений (84), когда наперед даем им такой вид:

$$\Pi(a-\gamma)-B=\Pi(c+\alpha),$$
$$B+\Pi(a+\gamma)=\Pi(c-\alpha).$$

После чего

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}B+e^{-a-\gamma}}{1-\operatorname{tang}\frac{1}{2}B\cdot e^{-a-\gamma}}\cdot\frac{1+\operatorname{tang}\frac{1}{2}B\cdot e^{-a+\gamma}}{e^{-a+\gamma}-\operatorname{tang}\frac{1}{2}B}=\cot\frac{1}{2}A^2,$$

или

$$\frac{2\operatorname{tang}\frac{1}{2}B+\sin\Pi(a)\left\{\operatorname{tang}\frac{1}{2}C+\operatorname{tang}\frac{1}{2}B^2\cot\frac{1}{2}C\right\}}{\sin\Pi(a)\left\{\cot\frac{1}{2}C+\operatorname{tang}\frac{1}{2}B^2\operatorname{tang}\frac{1}{2}C\right\}-2\operatorname{tang}\frac{1}{2}B}=\cot\frac{1}{2}A^2\,{}^{*}.$$

Присоединив к обеим сторонам единицу, потом умножив на знаменателя, получим

$$2\frac{\sin\Pi(a)}{\sin C}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}A^2}{\cos\frac{1}{2}B^2}=$$
$$=\sin\Pi(a)\left\{\cot\frac{1}{2}C+\operatorname{tang}\frac{1}{2}B^2\operatorname{tang}\frac{1}{2}C\right\}-2\operatorname{tang}\frac{1}{2}B.$$

Умножив на $\sin C\cos\frac{1}{2}B^2$ и разделив на $\sin\Pi(a)$,

$$2\sin\frac{1}{2}A^2=2\cos\frac{1}{2}C^2\cos\frac{1}{2}B^2+2\sin\frac{1}{2}B^2\sin\frac{1}{2}C^2-\frac{\sin B\sin C}{\sin\Pi(a)}.$$

Откуда легко вывести самое уравнение (89) ◇.

---

* После перемножения нужно принять во внимание, что

$$e^{-\alpha}=\operatorname{tg}\frac{A}{2},\quad e^{-\gamma}=\operatorname{tg}\frac{C}{2}\quad\text{и}\quad e^{a}+e^{-a}=2\operatorname{ch}a=\frac{2}{\sin\Pi(a)}.$$

◇ Для этого вычитаем обе части полученного равенства из 1, причем в правой части представляем эту единицу в виде

$$\left(\cos^2\frac{C}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\right)\left(\cos^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{B}{2}\right).$$

Когда к четырем уравнениям (83), (87), (88), (89) прибавляем подобные с переменой углов и боков треугольника на другие, то получим всех уравнений пятнадцать. Если в них полагаем $C=\frac{1}{2}\pi$, где входит этот угол, то снова находим уравнения для прямолинейных прямоугольных треугольников (ст. 141).

143. Воображаемая Геометрия, как мы сказали (ст. 117), происходит из общего положения, в котором Употребительная Геометрия заключается как частный случай, когда принимаем линии бесконечно малыми. С этим вместе самые уравнения для прямолинейных треугольников Воображаемой Геометрии переходят в уравнения для таких же треугольников Употребительной Геометрии.

Пусть бока a, b, c прямолинейного треугольника столько малы, что можем пренебрегать их степенями при низших, следовательно, довольствоваться приближенным значением (Алгебра, ст. 177 *)

$$\cot\frac{1}{2}\Pi(a)=1+a$$

и с этим вместе принимать также

$$\cot\Pi(a)=a,$$
$$\sin\Pi(a)=1-\frac{1}{2}a^2,$$
$$\cos\Pi(a)=a;$$

подобным образом — для боков b, c. Теперь уравнения Воображаемой Геометрии (83), (87), (88), (89) сделаются

$$b\sin A-a\sin B=0,$$
$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,$$
$$a\sin(A+C)-b\sin A=0,$$
$$\cos A+\cos(B+C)=0.$$

* «Алгебра, или вычисление конечных», Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. IV, Гостехиздат, 1948, стр. 227.

Первые два — те же уравнения (67), (68), которые были найдены для прямолинейных треугольников Употребительной Геометрии. Последние два в соединении с первым требуют, чтоб

$$A + B + C = \pi,$$

как в Употребительной Геометрии принято *.

Показав этот переход от одной Геометрии к другой, вправе теперь сделать уже заключение во всей обширности. Так как все вычисления в Геометрии могут единственно быть основаны на тех уравнениях, которые выражают зависимость углов с боками в треугольнике, то Воображаемая Геометрия должна всякий раз переходить в Употребительную с предположением линии бесконечно малых, представляя всегда согласие, которое заключается в общем их источнике, именно в уравнениях (83), (87), (88), (89) для прямолинейных треугольников [73].

144. От уравнений для прямолинейных прямоугольных треугольников, где сумма трех углов предполагается $< \pi$, можно прямо перейти к уравнениям для прямоугольных сферических треугольников. Мы видели (ст. 136), что когда в прямолинейном треугольнике c — гипотенуза, a, b — катеты, $\Pi(\alpha)$, $\Pi(\beta)$ — против них углы, то существует прямоугольный сферический треугольник (чер. 130); где гипотенуза $\Pi(a)$, катеты $\Pi(c)$, $\Pi(\beta)$ с углами против них $\Pi(b)$, $\frac{1}{2}\pi - \Pi(\alpha)$. Итак, стоит только в уравнениях (80), (81) переменить

$$\Pi(a) \quad \Pi(b) \quad \Pi(c) \quad A \quad B$$

соответственно на

$$c \quad A \quad a \quad \frac{1}{2}\pi - B \quad b,$$

чтобы для сферического прямоугольного треугольника получить все десять уравнений, которые, таким образом, будут:

$$\left.\begin{aligned} \sin c \sin A &= \sin a, \\ \sin c \sin B &= \sin b, \end{aligned}\right\} \qquad (90)$$

* См. сноску △ на стр. 70.

$$\left.\begin{aligned}\sin A \cos b &= \cos B,\\ \sin B \cos a &= \cos A,\end{aligned}\right\} \tag{91}$$

$$\cos a \cos b = \cos c, \tag{92}$$

$$\left.\begin{aligned}\sin a \operatorname{tang} B &= \operatorname{tang} b;\\ \sin b \operatorname{tang} A &= \operatorname{tang} a,\end{aligned}\right\} \tag{93}$$

$$\left.\begin{aligned}\cos B \operatorname{tang} c &= \operatorname{tang} a,\\ \cos A \operatorname{tang} c &= \operatorname{tang} b,\end{aligned}\right\} \tag{94}$$

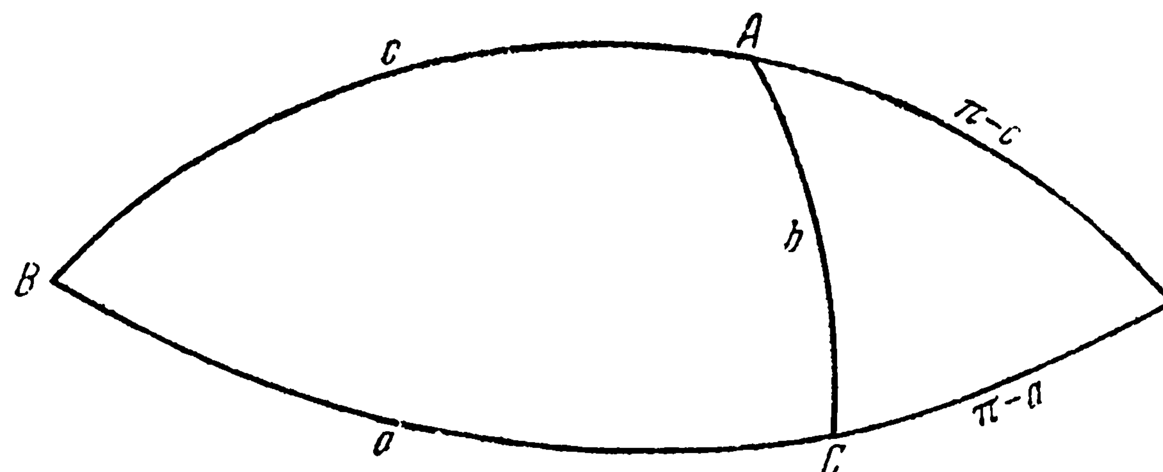
$$\cot A \cot B = \cos c. \tag{95}$$

Заметим, однако ж, что здесь бока a, b, c с углами A, B предполагаются каждый $< \frac{1}{2}\pi$, так же как в прямолинейном* треугольнике углы $\Pi(a)$, $\Pi(b)$, $\Pi(c)$, $\Pi(\alpha)$, $\Pi(\beta)$ необходимо острые. Между тем, последние уравнения справедливы для всех вообще прямоугольных сферических треугольников. Например, они поверяются для $a = \frac{1}{2}\pi$, потому что с этим вместе должны быть $c = \frac{1}{2}\pi$, $A = \frac{1}{2}\pi$, $B = b$, какой бы ни был угол B. Итак, уравнения справедливы также для $b = \frac{1}{2}\pi$, какой бы ни был бок $a = A$.

Пусть еще $a > \frac{1}{2}\pi$, $< \pi$, тогда как $b < \frac{1}{2}\pi$; следовательно, $B < \frac{1}{2}\pi$, $A > \frac{1}{2}\pi$, $< \pi$ (ст. 75, 46), $c > \frac{1}{2}\pi$, $< \pi$ (ст. 78). Продолжаем бока a, c до взаимной встречи по другую сторону бока b (чер. 135), где составится, таким образом, прямоугольный треугольник с гипотенузой $\pi - c < \frac{1}{2}\pi$, с катетами $b < \frac{1}{2}\pi$, $\pi - a < \frac{1}{2}\pi$, с углами против них $B < \frac{1}{2}\pi$, $\pi - A < \frac{1}{2}\pi$. Уравнения (90), (91), (92), (93), (94), (95), будучи применены к такому треугольнику, сохраняют прежний вид, а следовательно, справедливы также для данного треугольника с катетами $a > \frac{1}{2}\pi$, $< \pi$ и $b < \frac{1}{2}\pi$.

* Прямоугольном.

Полагаем $a > \frac{1}{2}\pi$, $< \pi$, тогда как $b > \frac{1}{2}\pi$, следовательно, $B > \frac{1}{2}\pi$, $A > \frac{1}{2}\pi$, $< \pi$ (ст. 75, 46); $c < \frac{1}{2}\pi$ (ст. 78). Поступая как перед этим, получим прямоугольный треугольник с гипотенузой $\pi - c > \frac{1}{2}\pi$, с катетами $\pi - a < \frac{1}{2}\pi$, $b > \frac{1}{2}\pi$, с углами против них $\pi - A < \frac{1}{2}\pi$, $B > \frac{1}{2}\pi$, которые бока



Чер. 135

с углами, будучи поставлены вместо c, a, b, A, B, снова не переменяют уравнения.

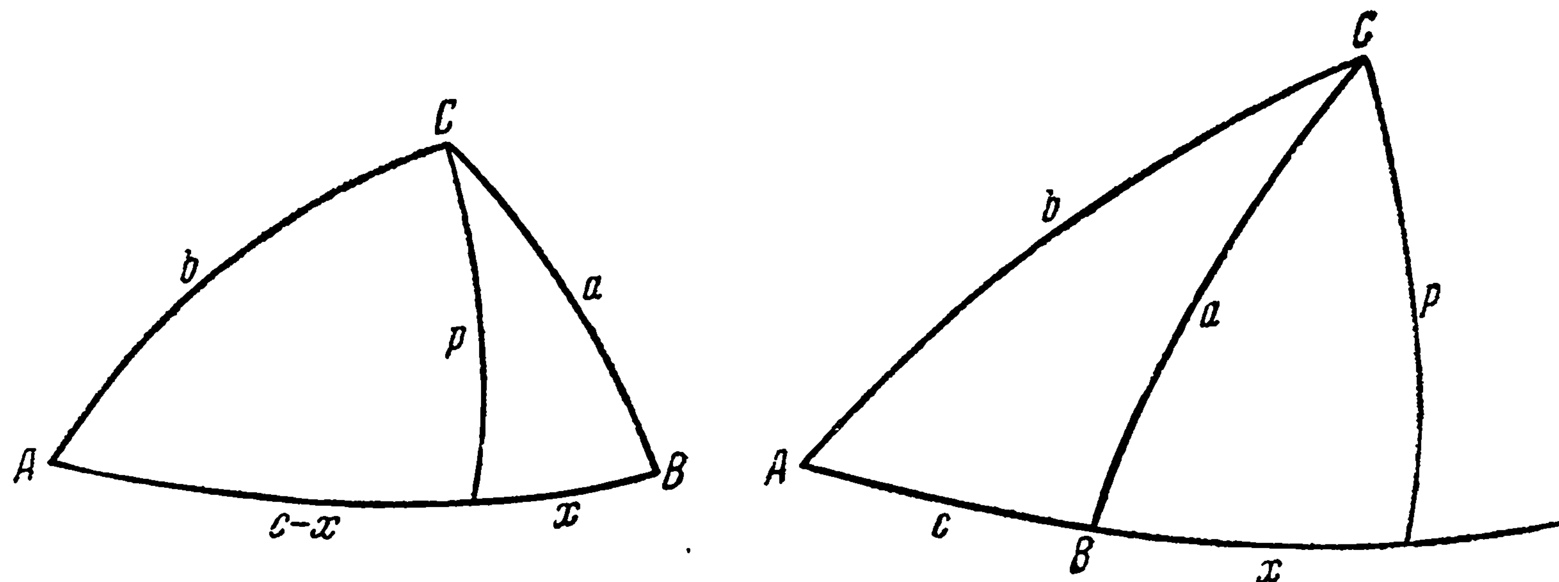
Если $a = \pi$, то $A = \pi$ (ст. 46), $b + c = \pi$, $B = \frac{1}{2}\pi$, которые значения поверяют опять уравнения.

Если $a > \pi$, то $A > \pi$ (ст. 46). Пополнив a, покуда составится целый круг, получим прямоугольный треугольник с гипотенузой c, катетами $2\pi - a$, b, с углами против них $2\pi - A$. $\pi - B$, которые не переменяют, однако ж, вид уравнений.

Произвольные значения катетов a, b относятся ко всем без исключения прямоугольным сферическим треугольникам, для которых, следовательно, найденные уравнения будут общими.

145. Рассматриваем произвольно взятый сферический треугольник, где ведем из угла C к боку c перпендикул p (чер. 136), который или, пройдя внутри треугольника, разделит c на две части: x под a, $c - x$ под b; или вне треугольника встретит продолжение бока c на расстоянии x от острия B, $c + x$ от A. Первый случай будет тот, когда углы A, B вместе острые

или вместе тупые (ст. 75); в другом случае предположим $A < \frac{1}{2}\pi$, $B > \frac{1}{2}\pi$. Так произойдут два прямоугольных треугольника: в одном гипотенуза a, катеты p, x с углом B либо $\pi - B$ против p; в другом гипотенуза b, катет p, с противо-



Чер. 136

положным углом A и катет $c - x$, либо $c + x$. Для таких треугольников находим в обоих случаях уравнения [ур. (90), (94)]

$$\sin a \sin B = \sin p,$$
$$\sin b \sin A = \sin p,$$
$$\operatorname{tang} a \cos B = \operatorname{tang} x,$$
$$\operatorname{tang} b \cos A = \operatorname{tang} (c - x),$$

как скоро принимаем x положительным или отрицательным числом, смотря по тому, перпендикул p падает внутри или вне треугольника. Из двух первых уравнений следует

$$\sin a \sin B = \sin b \sin A. \tag{96}$$

Из двух других исключив x, находим

$$\operatorname{tang} c = \frac{\operatorname{tang} a \cos B + \operatorname{tang} b \cos A}{1 - \operatorname{tang} a \operatorname{tang} b \cos A \cos B}.$$

Отсюда

$$\operatorname{tang} b \cos A = \frac{\operatorname{tang} c - \operatorname{tang} a \cos B}{1 + \operatorname{tang} a \operatorname{tang} c \cos B}.$$

Далее

$$(1 + \cos A \operatorname{tang} b \operatorname{tang} c)(1 + \cos B \operatorname{tang} c \operatorname{tang} a) = \frac{1}{\cos c^2}\ {}^*, \quad (97)$$

Подобным образом,

$$\left.\begin{aligned}(1 + \cos B \operatorname{tang} c \operatorname{tang} a)(1 + \cos C \operatorname{tang} a \operatorname{tang} b) &= \frac{1}{\cos a^2},\\ (1 + \cos C \operatorname{tang} a \operatorname{tang} b)(1 + \cos A \operatorname{tang} b \operatorname{tang} c) &= \frac{1}{\cos b^2};\end{aligned}\right\} \quad (98)$$

следовательно,

$$\frac{\cos a^2}{\cos b^2 \cos c^2} = (1 + \operatorname{tang} b \operatorname{tang} c \cos A)^2.$$

Отсюда должны заключить, что

$$\cos A \sin b \sin c + \cos b \cos c = \cos a \quad (99)$$

или

$$\cos A \sin b \sin c + \cos b \cos c + \cos a = 0. \quad (100)$$

На время допускаем последнее предположение, которого неверность будем теперь доказывать и которое должно бы также быть принято для всех углов и боков треугольника, как этого требуют уравнения (97), (98). Например,

$$\cos B \sin c \sin a + \cos c \cos a + \cos b = 0.$$

Умножив уравнение (100) на $\sin a$ и последнее на $\sin b$, потом сложив, получим [ур. (45)]

$$2 \cos \frac{1}{2}(A + B) \cos \frac{1}{2}(A - B) \sin a \sin b \sin c +$$
$$+ \sin (a + b) \{\cos c + \cos (a - b)\} = 0.$$

---

* Полагая $x = \operatorname{tg} a \cos B$, $y = \operatorname{tg} b \cos A$, $z = \operatorname{tg} c$, мы будем иметь

$$z = \frac{x + y}{1 - xy},$$

вследствие чего

$$(1 + \cos A \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c)(1 + \cos B \operatorname{tg} a \operatorname{tg} c) = (1 + xz)(1 + yz) =$$
$$= 1 + z(x + y) + xyz^2 = 1 + z^2(1 - xy) + z^2 xy = 1 + z^2 = \frac{1}{\cos^2 c}.$$

Далее [ур. (46)]*

$$\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)+$$
$$+\sin(a+b)\frac{\cos\frac{1}{2}(b+c-a)\cos\frac{1}{2}(a+c-b)}{\sin a\sin b\sin c}=0.$$

Если теперь полагаем $a<\pi$, $b<\pi$, $c<\pi$, следовательно, также $A<\pi$, $B<\pi$, $C<\pi$ (ст. 46), $b+c>a$, $a+c>b$ (ст. 77), так что между всеми производителями могут быть отрицательные только

$$\cos\frac{1}{2}(A+B), \qquad \sin(a+b)^{\diamond},$$

но которые должны быть таковы вместе, именно для $A+B>\pi$, $a+b>\pi$ (ст. 74), а следовательно, не поверяют уравнение.

Уравнению (100) не удовлетворяет также значение $a=\pi$, потому что в таком случае $A=\pi$ (ст. 46), $b+c=\pi$. После чего нельзя полагать уже ни $b=\pi$, ни $c=\pi$.

Если $a<\pi$, $b<\pi$, $c>\pi$, то составляется также треугольник из боков a, b, $2\pi-c$ с углами A, B, $2\pi-C<\pi$. Между тем, этому треугольнику снова принадлежит уравнение (99), которое, таким образом, остается верным для всех вообще треугольников.

В уравнение (99) внеся значение $\sin c$ [ур. (96)]

$$\sin c=\sin a\frac{\sin C}{\sin A},$$

получим

$$\cot A\sin a\sin b\sin C+\cos b\cos c=\cos a,$$

* Должна быть ссылка на уравнение (45).

◊ Так как уравнения вида (100) предполагаются верными для всех углов и сторон, то мы вправе считать (изменив, если нужно, обозначения сторон), что c — наименьшая сторона. При этом условии разности $c-a$ и $c-b$ неположительны, и потому каждый из углов $\frac{1}{2}(b+c-a)$, $\frac{1}{2}(a+c-b)$ заключен между 0 и $\frac{1}{2}\pi$.

потом введя сюда значение $\cos c$ [ур. (99)]

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$$

и разделив на $\sin a \sin b$, находим

$$\cot A \sin C + \cos C \cos b = \cot a \sin b \text{ [74]}. \tag{101}$$

Поставя сюда значение $\sin b$ из уравнения (96),

$$\cos A \sin C + \cos b \cos C \sin A = \cos a \sin B.$$

Подобным образом,

$$\cos B \sin C + \cos a \cos C \sin B = \cos b \sin A.$$

Из этих двух уравнений исключение $\cos b$ дает

$$\cos a \sin B \sin C - \cos B \cos C = \cos A. \tag{102}$$

Уравнения (96), (99), (101), (102) — те самые, которые предполагали найти для сферических треугольников (ст. 138). Последнее прямо следует из уравнения (99), когда здесь переменяем a, b, c, A на $\pi - A$, $\pi - B$, $\pi - C$, $\pi - a$ (ст. 79).

Если к четырем уравнениям (96), (99), (101), (102) прибавляем подобные с переменою букв на другие в треугольнике, то получим всех пятнадцать; а когда полагаем в них $C = \frac{1}{2}\pi$, там, где C входит, то снова получим десять уравнений для прямоугольных треугольников.

146. Уравнения для сферических треугольников можно находить с пособием одной Употребительной Геометрии, как это до сих пор обыкновенно делали.

Предполагаем в сферическом треугольнике бока $a < \pi$, $b < \frac{1}{2}\pi$, $c < \frac{1}{2}\pi$ (чер. 137). Пусть D — центр сферы, полупоперечники AD, BD, CD проведены к остриям углов A, B, C, потом продолжены за точки B, C до встречи в B', C' с перпендикулами AB', AC' к AD в конце A полупоперечника AD. Пусть r — полупоперечник сферы, $B'C' = x$, $AB' = y$, $AC' = z$, $DB' = \eta$, $DC' = \zeta$. Здесь угол $B'DC' = a$, $B'AC' = A$. В прямолинейных треугольниках $AB'C'$, $DB'C'$ будет [ур. (67)]

$$x^2 = y^2 + z^2 - 2yz\cos A,$$

$$x^2 = \eta^2 + \zeta^2 - 2\eta\zeta\cos a.$$

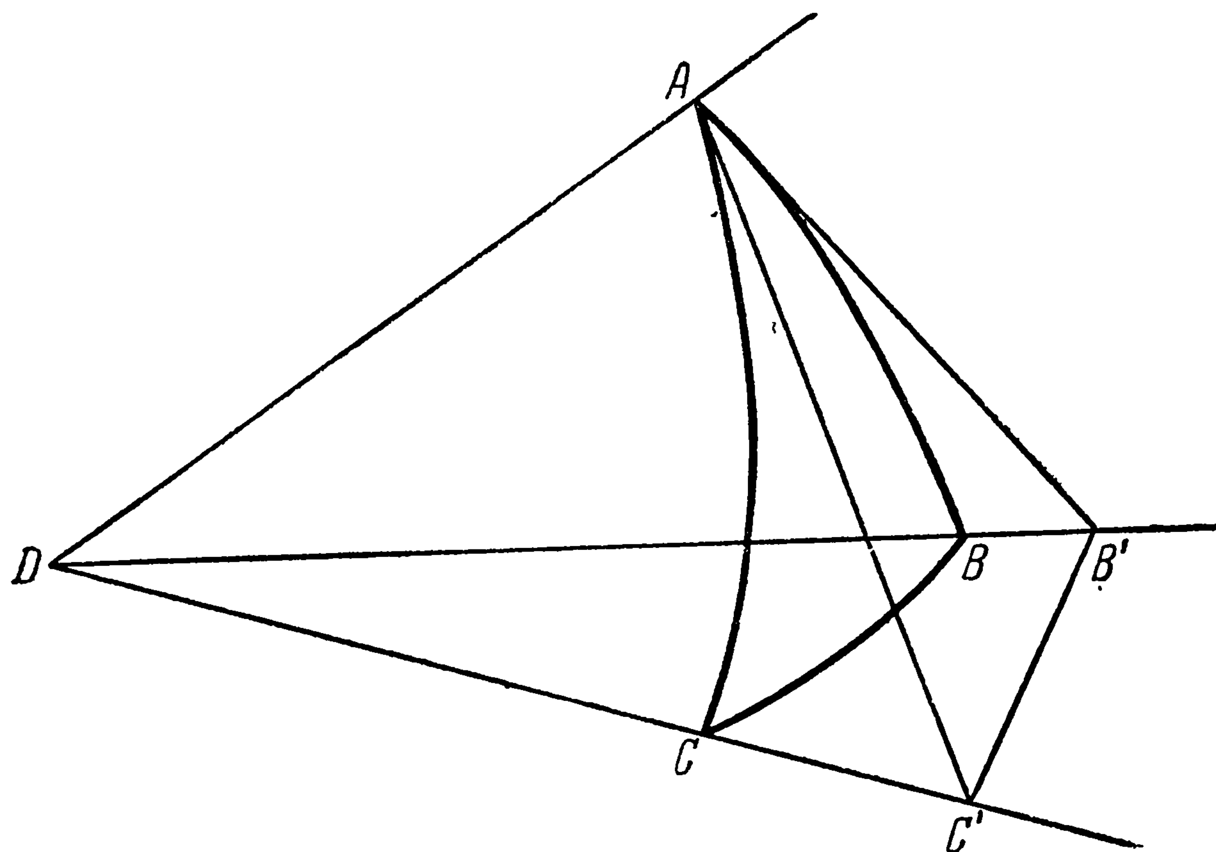
Исключив x в обоих уравнениях и разделив потом на r^2, получим

$$\frac{y^2}{r^2} + \frac{z^2}{r^2} - \frac{2yz}{r^2}\cos A = \frac{\eta^2}{r^2} + \frac{\zeta^2}{r^2} - \frac{2\eta\zeta}{r^2}\cos a.$$

Между тем (ст. 123),

$$\frac{z}{r} = \operatorname{tang} b, \qquad \frac{y}{r} = \operatorname{tang} c,$$

$$\frac{r}{\zeta} = \cos b, \qquad \frac{r}{\eta} = \cos c.$$



Чер. 137

После чего

$$\operatorname{tang} b^2 + \operatorname{tang} c^2 - 2\operatorname{tang} b\operatorname{tang} c\cos A =$$

$$= \frac{1}{\cos b^2} + \frac{1}{\cos c^2} - \frac{2\cos a}{\cos b\cos c}$$

— уравнение, которое принимает вид

$$\cos A\sin b\sin c + \cos b\cos c = \cos a, \tag{103}$$

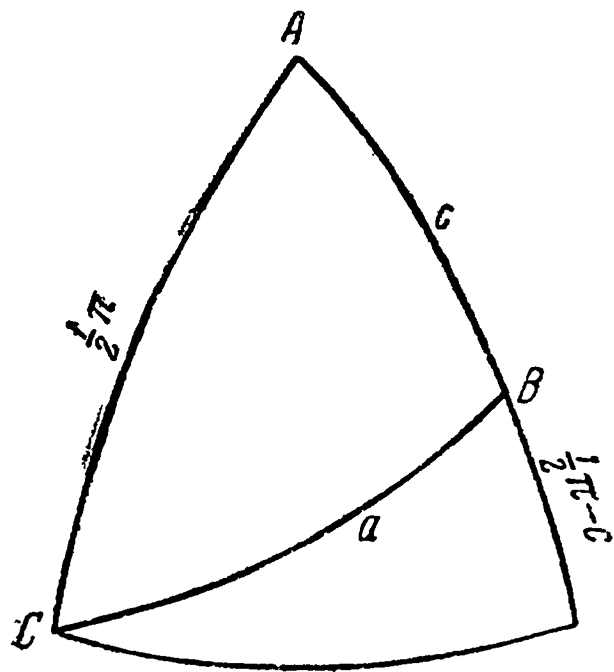
как было найдено выше [ур. (99)]. Остается рассмотреть случаи, когда a, b, c, A не удовлетворяют условиям $a < \pi$, $b < \frac{1}{2}\pi$, $c < \frac{1}{2}\pi$, $A \lessdot \pi$. Заметим еще, что $A = \pi$ поверяет уравнение, потому что с этим вместе $a = \pi$, $b + c = \pi$.

Пусть $b = \frac{1}{2}\pi$, но $c < \frac{1}{2}\pi$; следовательно, надобно доказывать

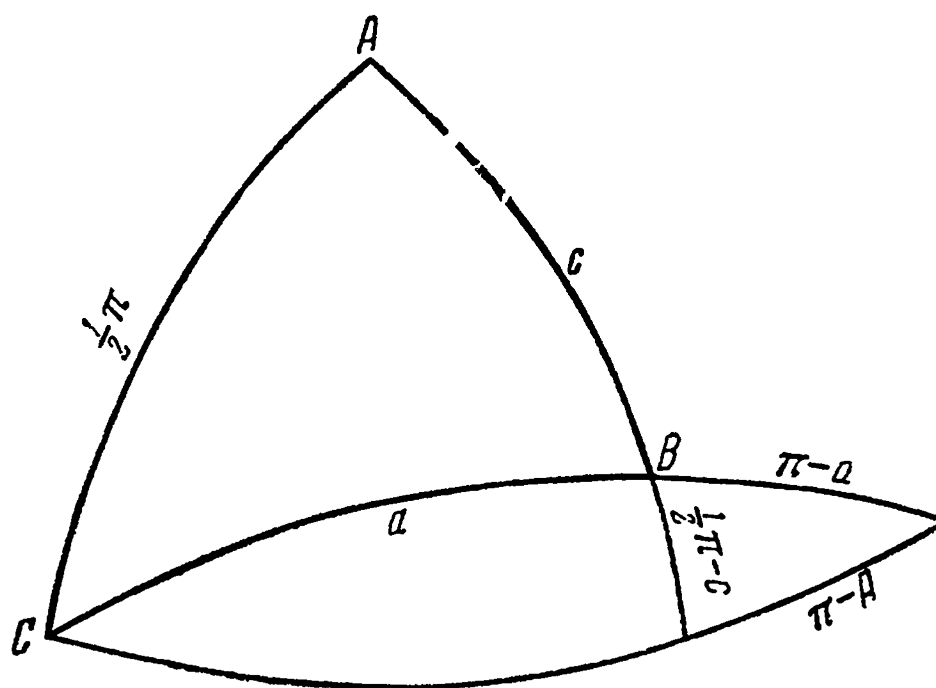
$$\cos A \sin c = \cos a. \tag{104}$$

Продолжение бока c за точку B (чер. 138) делаем равным $\frac{1}{2}\pi - c$, потом конец этого продолжения соединяем дугой с острием угла C. Так составится прямоугольный треугольник, где гипотенуза a, катеты A, $\frac{1}{2}\pi - c$, углы против них $\pi - B$, $\frac{1}{2}\pi - C$.

Если к тому $A < \frac{1}{2}\pi$, то в уравнении (103) можем ставить $\frac{1}{2}\pi$, A, $\frac{1}{2}\pi - c$ вместо A, b, c, оставляя a без перемены: это дает нам уравнение (104). Если $A > \frac{1}{2}\pi$, следовательно,



Чер. 138

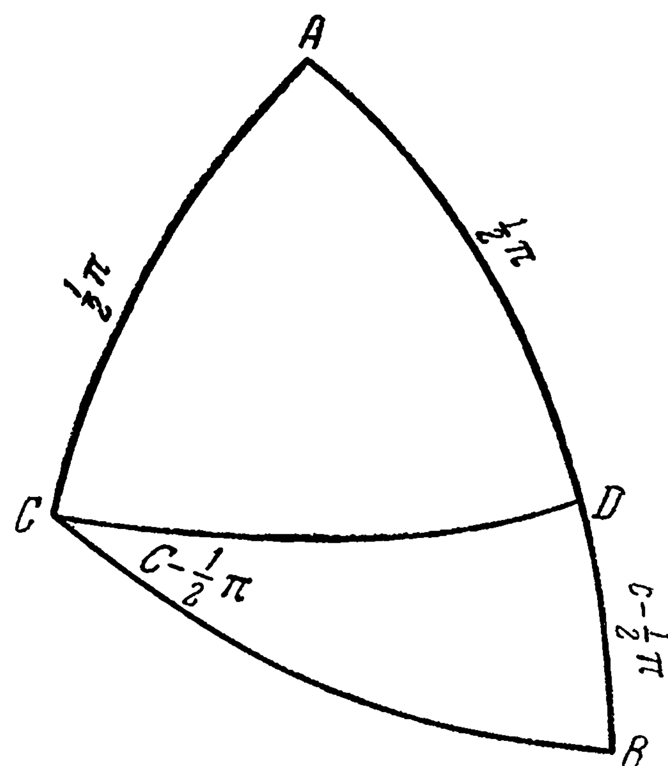


Чер. 139

$a > \frac{1}{2}\pi$, то продолжение A, a в прямоугольном треугольнике по другую сторону бока $\frac{1}{2}\pi - c$ до взаимной встречи произ-

водит снова прямоугольный треугольник (чер. 139), где гипотенуза $\pi - a < \frac{1}{2}\pi$, катеты $\frac{1}{2}\pi - c$, $\pi - A < \frac{1}{2}\pi$, против них углы $\frac{1}{2}\pi - C$, B. В уравнении (103) поставя теперь $\frac{1}{2}\pi$, $\pi - A$, $\frac{1}{2}\pi - c$, $\pi - a$ вместо A, b, c, a, получим опять уравнение (104).

Пусть $b > \frac{1}{2}\pi$, но $c < \frac{1}{2}\pi$, $A < \pi$; следовательно, $a < \pi$. Продолжаем бока a, b до взаимной встречи по другую сторону бока c. Составится новый треугольник, где бока $\pi - a$, $\pi - b < \frac{1}{2}\pi$, $c < \frac{1}{2}\pi$, против них углы $\pi - A$, $\pi - B$, C. После чего можем ставить $\pi - A$, $\pi - a$, $\pi - b$, c в уравнение (103), которое не переменяет от этого своего вида.



Чер. 140

Случай $b = \pi$ поверяет уравнение (103), потому что с этим вместе $a + c = \pi$.

Случай $b = \frac{1}{2}\pi$, $c = \frac{1}{2}\pi$ также поверяет уравнение (103), потому что с этим вместе $a = A$.

Если $b = \frac{1}{2}\pi$, $c > \frac{1}{2}\pi, < \pi$, то снова надобно доказывать уравнение (104). Кладем дугу $\frac{1}{2}\pi$ на бок c от острия A (чер. 140); другой конец этой дуги соединяем с острием C. Составится прямоугольный треугольник, где гипотенуза a, катеты A, $c - \frac{1}{2}\pi < \frac{1}{2}\pi$, против них углы B, $C - \frac{1}{2}\pi$. Удержав a, можем, следовательно, ставить $\frac{1}{2}\pi$, A, $c - \frac{1}{2}\pi$ вместо A, b, c в уравнение (103), которое, таким образом, переходит в уравнение (104).

Если $b > \frac{1}{2}\pi$, но $< \pi$, $c > \frac{1}{2}\pi$, но $< \pi$, то продолжаем

дуги b, c по другую сторону бока a до взаимной встречи. Из боков a, $\pi - b$, $\pi - c$ с углами против них A, $\pi - B$, $\pi - C$ составится треугольник, для которого уравнение (103) сохраняет свой вид.

Если $a > \pi$, но $b < \pi$, $c < \pi$, то, заменив a дугой $2\pi - a < \pi$, получим треугольник с боками $2\pi - a < \pi$, b, c с углами против них $2\pi - A$, $\pi - B$, $\pi - C$. Между тем, уравнение (103) не переменяется для такого треугольника.

Если $b > \pi$, но $a < \pi$, $c < \pi$, то, заменив бок b дугой $2\pi - b < \pi$, составим треугольник из боков $a < \pi$, $2\pi - b < \pi$, $c < \pi$ с углами против них $\pi - A$, $2\pi - B$, $\pi - C$. Уравнение (103) сохраняет опять прежний свой вид.

Из уравнения (103) следует

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}.$$

После чего $1 + \cos A$, $1 - \cos A$ дают

$$\cos \frac{1}{2} A^2 = \frac{\sin \frac{1}{2}(a+b+c) \sin \frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin b \sin c},$$

$$\sin \frac{1}{2} A^2 = \frac{\sin \frac{1}{2}(a+c-b) \sin \frac{1}{2}(a+b-c)}{\sin b \sin c}.$$

Откуда, для краткости, положив $a + b + c = s$, находим

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{2\sqrt{\sin \frac{1}{2} s \sin\left(\frac{1}{2} s - a\right) \sin\left(\frac{1}{2} s - b\right) \sin\left(\frac{1}{2} s - c\right)}}{\sin a \sin b \sin c}$$

и заключаем, что

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b}, \tag{105}$$

не принимая в рассуждение знак перед квадратным корнем, потому что $\sin A$, $\sin a$ бывают вместе положительными числами для $A < \pi$ и вместе отрицательными для $A > \pi$. То же надобно сказать о синусах $\sin B$, $\sin b$.

Уравнения (103), (105) — те самые, которые были даны выше [ур. (96), (99)] и которых уже довольно, чтобы найти два другие (101), (102) для сферических треугольников, как это видели (ст. 145).

Итак, уравнения (96), (99), (101), (102) для сферических треугольников остаются те же, принимаем ли постоянным или переменным угол параллельности.

Также заслуживает замечания то, что уравнения (83), (87), (88), (89) Воображаемой Геометрии для прямолинейных треугольников переходят в уравнения (96), (99), (101), (102) для сферических треугольников, когда вместо боков a, b, c прямолинейного треугольника берем $a\sqrt{-1}$, $b\sqrt{-1}$, $c\sqrt{-1}$ или все равно, вместо произвольного числа e ставим

$$e^{\sqrt{-1}}$$

и разумеем снова под e основание Непперовых логарифмов. С этой переменой должно принимать уже [ур. (62), (63), (64), (65)]

$$\sin \Pi(a) = \frac{1}{\cos a},$$

$$\cos \Pi(a) = \sqrt{-1} \operatorname{tang} a,$$

$$\cot \Pi(a) = \sqrt{-1} \sin a \; *.$$

---

* См. примечание [26].

ВООБРАЖАЕМАЯ ГЕОМЕТРИЯ



Предложение XII * Эвклидовых начал принято в Геометрии как ощутительная истина, которую строго доказать математически напрасно трудились в продолжении двух тысяч лет. Особенно занимался этим предметом Лежандр, и в записках французской Академии собрал все, что, по его мнению, казалось более удовлетворительным (Réflexions sur différentes manières de démontrer la théorie des paralleles ou le théorème sur la somme des trois angles du triangle, par Legendre. Mémoires de l'Acad. roy. d. Sciences de l'Inst. de France, Tome XII, an 1833). Кто ни думал найти решение затруднительного вопроса, все без исключения ошибались, будучи предубеждены в справедливости того, что не может еще следовать прямо из наших понятий о телах, без пособия наблюдений, как я, думаю, доказал это несомнительно в моем сочинении *о началах Геометрии.* Изложив новую теорию параллельных, я утверждал, что сумму углов прямолинейного треугольника, независимо от измерений на самом деле, можно допускать менее половины окружности◇, и на таком предположении основать другую Геометрию, которую назвал я *воображаемой* и которая, если не существует в природе, по крайней мере должна быть принята в Аналитике. С помощию одних геометрических построений выведены были уравнения, которые представляют зависимость боков и углов прямолиней-

* Аксиома о параллельных.

◇ Т. е. менее двух прямых углов.

ного треугольника; наконец даны выражения для елементов линии, поверхности и объема тел; а следовательно Воображаемая Геометрия, как новая отрасль Математических наук, обнята была во всей обширности, чтоб не оставить более сомнения в справедливых и достаточных ее началах. Между тем в тесных пределах повременного сочинения не мог изложить я моего предмета со всей подробностию. Много предложений, помещенных без доказательства, одни выводы из продолжительных и довольно запутанных вычислений, заставляют меня подозревать, что мое сочинение, казавшись с первого взгляда темным, предупреждало охоту заняться им с некоторым вниманием и даже могло подать повод усумниться в строгости моего суждения и в верности выведенных заключений*. Эта причина понудила меня искать другого способа увериться самому в истине мной доказанного и потом осмелиться еще раз представить мои исследования на суд ученых. Теперь, оставляя геометрические построения и выбирая краткий обратный путь, намерен я показать, что главные уравнения, которые нашел я для зависимости сторон и углов треугольника в воображаемой Геометрии, могут быть приняты с пользою в Аналитике и никогда не приведут к заключениям ложным, в каком бы то ни было отношении.

Пусть e означает основание Непперовых логарифмов, π со-

* Статьи о началах Геометрии помещены были в Казанском Вестнике за 1829 и 1830 годы. В № 41 Журнала Сын Отечества 1834 года напечатана критика, весьма оскорбительная для меня, и надеюсь, совершенно несправедливая. Рецензент основал свой отзыв на том только, что он моей Теории не понял и почитает ее ошибочной, потому что в примерах встречает один *нелепый* интеграл. Впрочем, такого интеграла не нахожу я в моем сочинении. В Ноябре месяце прошедшего года послал я к Издателю ответ, который однако ж, не знаю почему, до сих пор, в продолжении пяти месяцев, еще не напечатан. [*Примечание Н. И. Лобачевского.*] См. также сноску* на стр. 401. Самый текст отзыва приведен в сборнике «Материалы для биографии Н. И. Лобачевского» под ред. Л. Б. Модзалевского, Изд-во АН СССР, 1948, стр. 358—362 и частично в книге В. Ф. Кагана, «Лобачевский», Изд-во АН СССР 1944, стр. 185—187.

держание окружности к поперечнику *, то самое число, которое принято в употребительной Геометрии. Пусть a' какой-нибудь угол ◇ $\geqq 0$, $\leqq \frac{1}{2}\pi$; a число, которое вместе представляет сравнительно прямую линию, и которое можно найти помощию одного из таких уравнений △

$$\cot\frac{1}{2}a' = e^a, \qquad \sin a' = \frac{2e^a}{e^{2a}+1},$$

$$\cos a' = \frac{e^{2a}-1}{e^{2a}+1}, \qquad \operatorname{tang} a' = \frac{2e^a}{e^{2a}-1},$$

$$\cot a' = \frac{1}{2}(e^a - e^{-a}) \text{ [75]}.$$

Обратно угол a' определяется числом a, всегда положительным. Вообще над буквой, которая представляет подобное число, будем ставить ударение ○, чтобы означить угол в том же отношении к первой, в какой зависимости предполагаем a' с a.

В прямолинейном прямоугольном треугольнике пусть r гипотенуза, p и q катеты, P и Q противоположные им углы. В предположении $P+Q<\frac{1}{2}\pi$, допускаем

$$\sin r' = \sin p' \sin q', \tag{1}$$

$$\sin r' = \operatorname{tang} P \operatorname{tang} Q, \tag{2}$$

$$\operatorname{tang} r' = \operatorname{tang} p' \sin P \tag{3}$$

и посмотрим, к каким заключениям поведут далее такие уравнения. Соединение первого с третьим дает

$$\cos r' \sin P = \cos p' \sin q'. \tag{3a}$$

* Имеется в виду отношение длины окружности к диаметру в эвклидовой геометрии, т. е. число π. Отношение длины окружности к радиусу в геометрии Лобачевского зависит от радиуса [см.формулу (49) на стр. 340].

◇ Через a' Лобачевский обозначает в этой работе угол параллельности, соответствующий отрезку a. В других работах, помещенных в настоящем издании, вместо a' применяется обозначение $\Pi(a)$.

△ Пользуясь обозначениями гиперболических функций, имеем $\sin a' = \frac{1}{\operatorname{ch} a}$, $\cos a' = \operatorname{th} a$, $\operatorname{tg} a' = \frac{1}{\operatorname{sh} a}$ (ср. сноску * на стр. 70).

○ Т. е. штрих (′).

Взявши квадрат на обеих сторонах и поставя сюда $\sin p'$ из уравнения (1), находим*

$$\cos q' = \cos r' \cos P \tag{4}$$

без обоюдности знаков при извлечении квадратного корня, потому что все углы острые.

Исключаем r' из уравнений (3), (4),

$$\operatorname{tang} P = \cos p' \operatorname{tang} q'. \tag{5}$$

То же делаем с уравнениями (2), (3);

$$\sin Q = \sin p' \cos P. \tag{6}$$

Из уравнений (2), (4) еще находим

$$\operatorname{tang} r' = \operatorname{tang} q' \sin Q. \qquad [6а]$$

Это последнее уравнение в отношении к q', Q то же, что было (3) для p', P, а следовательно, его соединение с первыми двумя (1), (2) должно произвести уравнения, подобные (4), (5), (6)◊, так что число их будет десять, которые все в отношении к частям треугольника или составлены симметрически или без различия принадлежат тому и другому катету с противоположными углами△.

Пусть вообще a, b, c — три стороны прямолинейного треугольника; A, B, C — против них углы. Полагаем наперед $A < \frac{1}{2}\pi$, $B < \frac{1}{2}\pi$ (чер. 1), так как подобные два угла должны

* Вычисления, связанные с выводом формул (4), (5), (6), [6а], проведены в примечании [76].

◊ Т. е. уравнения, получающиеся из (4), (5), (6) заменой p, P на q, Q и наоборот:

$$\cos p' = \cos r' \cos Q, \qquad [4а]$$
$$\operatorname{tg} Q = \cos q' \operatorname{tg} p', \qquad [5а]$$
$$\sin P = \sin q' \cos Q. \qquad [6б]$$

△ Отметим еще важные дифференциальные соотношения (для прямоугольного треугольника с переменными элементами), легко выводимые из приведенных формул. Исключая $\cos r'$ из соотношений (4), [4а], и $\sin q'$ из соотношений (1), [6б], получим

$$\cos p' \cos P = \cos q' \cos Q; \quad \sin p' \sin P = \sin r' \cos Q.$$

всегда найтись в треугольнике. Из общей точки a с b опускаем перпендикул x на c, где он отрежет к углу A линию y, к углу B линию $c-y=z$.

Для прямоугольного треугольника с боками b, x, y, основываясь на уравнении (3), пишем

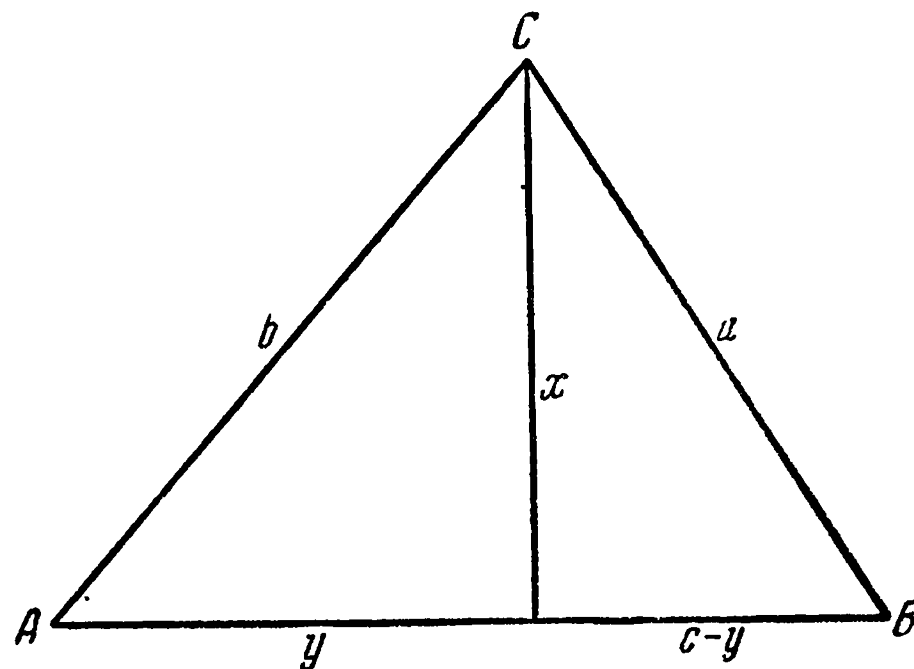
$$\operatorname{tang} b' = \operatorname{tang} x' \sin A.$$

Для прямоугольного треугольника из a, x, z таким же образом

$$\operatorname{tang} a' = \operatorname{tang} x' \sin B;$$

следовательно,

$$\operatorname{tang} a' \sin A = \\ = \operatorname{tang} b' \sin B. \qquad (7)$$



Чер. 1

Далее, дифференцируя соотношение (6), найдем

$$\cos Q dQ = \cos p' \cos P dp' - \sin p' \sin P dP$$

или (учитывая две предыдущие формулы и сокращая на $\cos Q$)

$$dQ = \cos q' dp' - \sin r' dP. \qquad (*)$$

Пользуясь подстановкой Лобачевского (примечание [20]), можно получить из этого соотношения еще 9 других.

Далее, дифференцируя соотношение $\cos x' = \operatorname{th} x$ (сноска△ на стр. 317), получаем

$$-\sin x' dx' = \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \sin^2 x' dx,$$

откуда

$$dx' = -\sin x' dx. \qquad (**)$$

Наконец, дифференцируя соотношение (1), находим [с учетом формулы (**)]

$$\cos p' \sin q' \sin p' dp + \sin p' \cos q' \sin q' dq = \cos r' \sin r' dr =$$
$$= \cos r' \sin p' \sin q' dr,$$

или после сокращения на $\sin p' \sin q'$:

$$\cos p' dp + \cos q' dq = \cos r' dr. \qquad (***)$$

Пользуясь подстановкой Лобачевского, можно получить из этого соотношения еще четыре других.

То же бы нашли, предположивши один из углов A, B тупой.

В прямоугольном треугольнике из b, x, y, согласно с уравнением (4),

$$\cos y' = \cos b' \cos A.$$

Откуда *

$$e^{2y} = \frac{1 + \cos b' \cos A}{1 - \cos b' \cos A}.$$

Таким же образом в треугольнике из a, x, z:

$$e^{2z} = \frac{1 + \cos a' \cos B}{1 - \cos a' \cos B}.$$

Потом

$$e^{2c} = \frac{1 + \cos a' \cos B}{1 - \cos a' \cos B} \cdot \frac{1 + \cos b' \cos A}{1 - \cos b' \cos A}. \tag{8}$$

Если один из углов, например A, тупой (чер. 2), то перпендикул x упадет на продолжение бока c в точке, которой расстояние y от острея A и $z = c + y$ от B. В таком случае

$$\cos y' = -\cos b' \cos A, \quad \cos z' = \cos a' \cos B,$$

потом

$$e^{2y} = \frac{1 - \cos b' \cos A}{1 + \cos b' \cos A},$$

$$e^{2z} = \frac{1 + \cos a' \cos B}{1 - \cos a' \cos B}.$$

Соединение двух последних уравнений дает снова уравнение (8), которое, следовательно, принадлежит вообще всем треугольникам и может быть еще представлено иначе

$$\cos a' \cos B = \frac{(e^{2c} - 1) - (e^{2c} + 1) \cos b' \cos A}{(e^{2c} + 1) - (e^{2c} - 1) \cos b' \cos A}$$

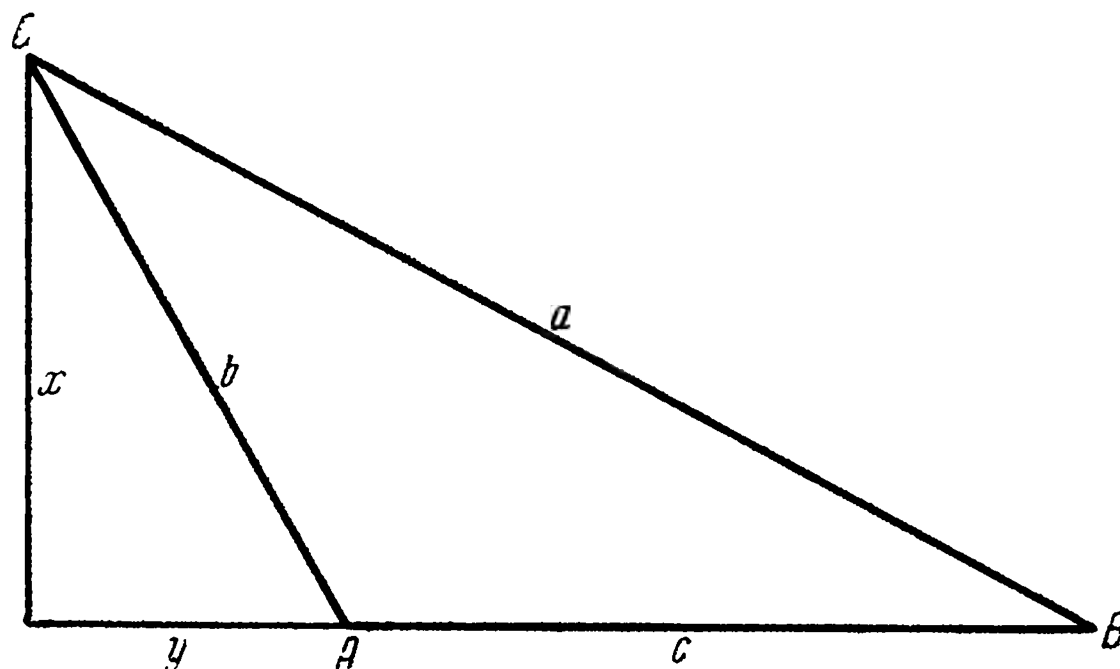
---

* Из соотношения $\cos a' = \dfrac{e^{2a} - 1}{e^{2a} + 1}$ (стр. 317) имеем

$$e^{2a} = \frac{1 + \cos a'}{1 - \cos a'}.$$

или, следуя принятому означению, напишем*

$$\cos a' \cos B = \frac{\cos c' - \cos b' \cos A}{1 - \cos b' \cos c' \cos A}. \tag{9}$$



Чер. 2

Возвысив в квадрат◊, ставим сюда значение $\cos B$ из уравнения (7)

$$\cos^2 a' - \sin^2 a' \sin^2 A \cot^2 b' = \left\{\frac{\cos c' - \cos b' \cos A}{1 - \cos b' \cos c' \cos A}\right\}^2.$$

Откуда находим

$$\sin^2 a' (1 + \sin^2 A \cot^2 b') = \sin^2 c' \frac{1 - \cos^2 b' \cos^2 A}{(1 - \cos b' \cos c' \cos A)^2}.$$

Умножив на $\sin^2 b'$ и разделив на $1 - \cos^2 b' \cos^2 A$, наконец, получим

$$\frac{\sin b' \sin c'}{\sin a'} = 1 - \cos b' \cos c' \cos A. \tag{10}$$

---

* Числитель и знаменатель дроби, стоящей в правой части предыдущего соотношения, следует разделить на $e^{2c} + 1$, а затем воспользоваться приведенным на стр. 317 соотношением

$$\cos a' = \frac{e^{2a} - 1}{e^{2a} + 1}.$$

◊ Простой вывод соотношений (10), (11), (12) приведен в ст. 142 «Новых начал» (стр. 295 настоящего издания), где эти формулы имеют номера (87), (88), (89).

Произведение этого последнего уравнения на уравнение (9) дает такое:

$$\cot a' \cos B \sin b' \sin c' = \cos c' - \cos b' \cos A,$$

которое, со введением сюда значения $\cot a'$ из уравнения (7), переменяется в

$$\cot B \sin A \sin c' + \cos A = \frac{\cos c'}{\cos b'} . \qquad (11)$$

Откуда

$$\cos b' = \frac{\cos c'}{\cot B \sin A \sin c' + \cos A} .$$

Уравнение (11) в том же треугольнике дает еще

$$\cot C \sin A \sin b' + \cos A = \frac{\cos b'}{\cos c'} .$$

После чего

$$(\cot B \sin A \sin c' + \cos A)(\cot C \sin A \sin b' + \cos A) = 1 .$$

Отсюда

$$\cot C \sin b' = \frac{\sin A - \cot B \sin c' \cos A}{\cot B \sin A \sin c' + \cos A} .$$

Произведение этого уравнения на (11) будет

$$\cot C \cos c' \operatorname{tang} b' = \sin A - \cot B \sin c' \cos A.$$

Ставим сюда значение $\operatorname{tang} b'$ из уравнения (7), наперед переменив здесь* a', A на c', C

$$\sin c' \cos C = \sin A \sin B - \cos B \cos A \sin c'.$$

Это последнее уравнение разделив на $\sin c'$ и заменив буквы другими в том же треугольнике, получим

$$\cos A + \cos B \cos C = \frac{\sin B \sin C}{\sin a'} . \qquad (12)$$

* Т. е. в уравнении (7).

Уравнения (7), (10), (11), (12) для всякого треугольника будут, следовательно, такие

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{tang} a' \sin A - \operatorname{tang} b' \sin B = 0, \\ &\cos A \cos b' \cos c' + \frac{\sin b' \sin c'}{\sin a'} - 1 = 0, \\ &\cot A \sin B \sin c' + \cos B - \frac{\cos c'}{\cos a'} = 0, \\ &\cos A + \cos B \cos C - \frac{\sin B \sin C}{\sin a'} = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

всего четыре и где a', b', c' можем переставлять, делая то же соответственно с A, B, C, покуда произойдет 15 уравнений для одного треугольника с произвольными боками a, b, c. Из всех этих уравнений стоит выбрать три различных, чтобы вывести отсюда прочие. Например, можно довольствоваться одним вторым, отнеся его ко всем углам треугольника *. Чтобы увериться в этом на самом деле, заметим, что поставивши $a\sqrt{-1}$, $b\sqrt{-1}$, $c\sqrt{-1}$ вместо a, b, c и, следовательно ◊,

$$\frac{1}{\cos a} \qquad \sqrt{-1}\operatorname{tang} a \qquad \sqrt{-1}\sin a$$

вместо

$$\sin a' \qquad \cos a' \qquad \cot a',$$

уравнения (13) переменяем в такие:

$$\left.\begin{aligned} &\sin A \sin b - \sin B \sin a = 0, \\ &\cos A \sin b \sin c + \cos b \cos c - \cos a = 0, \\ &\cot A \sin B + \cos B \cos c - \cot a \sin c = 0, \\ &\cos A + \cos B \cos C - \sin B \sin C \cos a = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

— известные уравнения Сферической Тригонометрии и которых справедливость, скажу мимоходом, доказал я в моем сочинении о началах Геометрии△, независимо от предположения о сумме

---

* Т. е. сделав в нем две круговые перестановки букв.

◊ См. сноску △ на стр. 317.

△ См. также сочинения «Геометрические исследования» и «Новые начала» (стр. 58—59 и 300—311 настоящего издания).

углов прямолинейного треугольника. Второе из уравнений (14), как всякий знает, будучи принято без различия для всех боков и углов треугольника, заключает уже в себе и остальные три. После этого дозволяется утверждать, что свойства прямолинейных треугольников, оправданные вторым из уравнений (13), не встретят противоречия в трех других, а следовательно, и во всех вообще вычислениях, основанных на уравнениях (13).

Теперь посмотрим, удовлетворяют ли уравнения (13) тем условиям, при которых составление всякого треугольника возможно. Таких условий, независимо от значения суммы трех углов, находится только два: *составление треугольника всякий раз возможно, когда даны* или *три стороны, из которых сумма двух более третьей,* или *две стороны и угол между ними произвольные.* Этому последнему требованию удовлетворяет второе из уравнений (13), потому что здесь

$$\sin a' = \frac{\sin b' \sin c'}{1 - \cos b' \cos c' \cos A}.$$

Между тем, каковы два бока b, c и угол A ни будут, всегда*

$$1 + 2\sin^2\frac{1}{2}A\cos b'\cos c' > \cos(b' - c').$$

Прикладывая на обеих сторонах $\cos b'\cos c'$, получим °

$$1 - \cos b'\cos c'\cos A > \sin b'\sin c'.$$

После чего $\sin a' < 1$ и, следовательно, угол a' с линией a — действительные числа △. Что касается до другого условия, то из второго уравнения (13) находим

$$\cos A = \frac{1}{\sin a'} \cdot \frac{\sin a' - \sin b'\sin c'}{\cos b'\cos c'},$$

* Это неравенство справедливо потому, что левая его часть больше единицы ($\cos b'$ и $\cos c'$ положительны, так как углы b' и c' — острые).

° Вычитая из обеих частей $\cos b'\cos c'$.

△ Итак, если даны две стороны и угол между ними, то третья сторона однозначно определяется. Два другие угла легко определяются из третьего соотношения (13) (зная две стороны a, c и угол B между ними, находим $\operatorname{ctg} A$ и, следовательно, угол A).

потом, переходя от тригонометрических функций к их значению в линиях a, b, c *

$$\cos A = \frac{(e^b+e^{-b})(e^c+e^{-c})-2(e^a+e^{-a})}{(e^b-e^{-b})(e^c-e^{-c})}.$$

Пусть $a = b - c + d$, то ◇

$$\cos^2 \frac{1}{2} A = \frac{(e^{2b+d}-1)(e^{2c-d}-1)}{(e^{2b}-1)(e^{2c}-1)}. \qquad [14a]$$

Пусть еще

$$e^{2b} = 1+\beta, \qquad e^{2c} = 1+\gamma, \qquad e^d = 1+\delta,$$

так, что необходимо β, γ, δ положительные числа и притом △

$$d > 0, \qquad \beta \gtreqless \gamma, \qquad \gamma > \delta.$$

После этого значению $\cos^2 \frac{1}{2} A$ можем дать двоякий вид ○:

---

* Т. е. пользуясь формулами, приведенными на стр. 317.

◇ Пользуясь предыдущей формулой, находим

$$\cos^2 \frac{1}{2} A = \frac{1}{2}(1+\cos A) = \frac{e^{b+c}+e^{-b-c}-(e^a+e^{-a})}{(e^b-e^{-b})(e^c-e^{-c})}.$$

Умножив числитель и знаменатель последней дроби на $e^b \cdot e^c$ и подставив вместо a его значение $b - c + d$, найдем

$$\cos^2 \frac{1}{2} A = \frac{e^{2b+2c}+1-e^{2b+d}-e^{2c-d}}{(e^{2b}-1)(e^{2c}-1)},$$

что и дает формулу [14a].

△ Лобачевский предполагает здесь, что заданы три отрезка a, b, c, из которых каждый меньше суммы (и, следовательно, больше разности) двух других. Поэтому в соотношении $a = b - c + d$ число d (а потому и δ) положительно. Соотношение $\beta \geqslant \gamma$ означает, что $e^{2b} \geqslant e^{2c}$, т. е. $b \geqslant c$. Таким образом, Лобачевский здесь полагает для определенности, что $b \geqslant c$ (это предположение, повидимому, пропущено в русском тексте «Воображаемой геометрии»; во французском тексте это предположение указано, см. Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. III, Гостехиздат, 1948, стр. 145). Наконец, сопоставляя соотношения $a = b - c + d$, $a < b + c$, находим $d < 2c$, откуда $e^{2c} > e^d$ или $\gamma > \delta$. Итак, $d > 0$, $\beta \geqslant \gamma$, $\gamma > \delta$, что и указывает Лобачевский.

○ Имеем

$$\cos^2 \frac{1}{2} A = \frac{1}{\beta\gamma}[(1+\beta)(1+\delta)-1]\left(\frac{1+\gamma}{1+\delta}-1\right) = \frac{(\beta+\delta+\beta\delta)(\gamma-\delta)}{\beta\gamma(1+\delta)} =$$

$$\cos^2\frac{1}{2}A=\left(1-\frac{\delta}{\gamma}\right)\left\{1+\frac{\delta}{\beta(1+\delta)}\right\},$$

$$\cos^2\frac{1}{2}A=1-\delta\left\{\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\beta(1+\delta)}\right\}-\frac{\delta^2}{\beta\gamma(1+\delta)};$$

первый доказывает, что $\cos^2\frac{1}{2}A>0$, а второй, что $\cos^2\frac{1}{2}A<1$*, и, следовательно, угол A действительный.

Ищем теперь сумму углов во всяком треугольнике, чтобы решить, как она предполагается с тем вместе, когда уравнения (1), (2), (3) будут приняты для прямоугольного треугольника. Разумея $s=a+b+c$ и начиная с

$$\cos^2\frac{1}{2}A=\frac{(e^{s-2a}-1)(e^s-1)}{(e^{2b}-1)(e^{2c}-1)}\text{◇},$$

как сейчас видели, нетрудно продолжать и найти

$$\sin^2\frac{1}{2}A=\frac{e^{s-2a}(e^{s-2b}-1)(e^{s-2c}-1)}{(c^{2b}-1)(e^{2c}-1)},$$

$$\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B=\frac{e^s-1}{e^{2c}-1}e^{c-\frac{1}{2}s}\sin\frac{1}{2}C,$$

$$\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B=\frac{e^{\frac{s}{2}}-e^{2c-\frac{s}{2}}}{e^{2c}-1}\sin\frac{1}{2}C,$$

$$\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B=e^{\frac{1}{2}s-a}\frac{e^{s-2b}-1}{e^{2c}-1}\cos\frac{1}{2}C,$$

$$\cos\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}B=e^{\frac{1}{2}s-b}\frac{e^{s-2a}-1}{e^{2c}-1}\cos\frac{1}{2}C,$$

$$=\frac{\delta+\beta(1+\delta)}{\beta(1+\delta)}\cdot\frac{\gamma-\delta}{\gamma}=\left(1-\frac{\delta}{\gamma}\right)\left(1+\frac{\delta}{\beta(1+\delta)}\right);$$

второе соотношение получается из этого при помощи разложения по степеням δ.

* Ибо из неравенства $\beta\geqslant\gamma$ следует

$$\frac{1}{\gamma}\geqslant\frac{1}{\beta}\geqslant\frac{1}{\beta(1+\delta)}.$$

◇ Эта и дальнейшие формулы выведены в примечании [77].

$$\cos\frac{1}{2}(A+B)=e^{-\frac{1}{2}s}\,\frac{e^s+e^c}{e^c+1}\sin\frac{1}{2}C,$$

$$\sin\frac{1}{2}(A+B)=e^{\frac{1}{2}s}\,\frac{e^{-a}+e^{-b}}{e^c+1}\cos\frac{1}{2}C,$$

$$\cos\frac{1}{2}(A+B+C)=\frac{(1-e^{-a})(1-e^{-b})}{e^c+1}\,e^{\frac{1}{2}s}\sin\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}C.$$

Ставя в это последнее уравнение значения $\sin\frac{1}{2}C$, $\cos\frac{1}{2}C$, получим:

$$\cos\frac{1}{2}(A+B+C)=\frac{\sqrt{(e^s-1)(e^{s-2a}-1)(e^{s-2b}-1)(e^{s-2c}-1)}}{(e^a+1)(e^b+1)(e^c+1)}$$

— число менее единицы, потому что углы A, B, C действительные, как мы уже доказали. Это число вместе положительное, потому что $C<\pi$, и, наконец, не делается нулем, покуда каждые две стороны треугольника более третьей; а следовательно, $A+B+C<\pi$, единственное предположение, которое до сих пор в Геометрии нельзя было опровергнуть.

В этом самом предположении, чтобы дополнить все Геометрическое учение, остается теперь указать только способ, каким образом должны быть измеряемы линии, поверхности и объем тела. Способ к тому сам собой уже представляется, когда заметим, что для весьма малых сторон a, b, c в треугольнике и когда можем довольствоваться в приближении значениями

$$\sin a'=1-\frac{1}{2}a^2,\quad \cos a'=a,$$

подобным образом для b, c; уравнения (13) сделаются

$$\left.\begin{aligned}&b\sin A-a\sin B=0,\\&a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,\\&\sin(A+B)-\frac{c}{a}\sin A=0,\\&\cos A+\cos(B+C)=0\end{aligned}\right\}\qquad(15)$$

—уравнениями для прямолинейных треугольников в употреби-

тельной Геометрии*. После всего этого мы в праве утверждать:

1. *В теории ничто не мешает сумму углов прямолинейного треугольника принимать менее двух прямых.*

2. *С таким предположением уравнения* (13) *заменяют уравнения* (15) *и не могут вести к ложным заключениям* [78].

3. *Воображаемая Геометрия обнимает употребительную Геометрию, как частный случай, к которому переходим, принимая линии бесконечно малыми: так что в этом отношении употребительная Геометрия может быть названа Геометрия дифференциальная.*

4. *Значения для елементов линии, поверхности и объема тел в обеих Геометриях одинаковы.*

5. *Предположение, что сумма углов треугольника менее двух прямых, может быть допущено только в применении к Аналитике, потому что измерения в природе не открывают нам в этой сумме ни малейшего отклонения от половины окружности.*

В моем сочинении о началах Геометрии я доказывал, основываясь на некоторых астрономических наблюдениях, что в треугольнике, которого бока почти таковы, как расстояние земли до солнца, сумма углов может разниться от двух прямых не более 0,″0003 в шестидесятичных секундах градуса. Предположение употребительной Геометрии надобно, следовательно, почитать как бы строго доказанным, а вместе быть убеждену и в том, что независимо от опыта, напрасно было бы искать доказательства на такую истину, которая еще не заключается сама собою в нашем понятии о телах. Может быть кому-нибудь покажется с первого взгляда предположение уравнений (1), (2), (3) столько произвольным, что его легко заменить другим; однако же этого сделать нельзя, как доказал я в моем сочинении о началах Геометрии. В самом деле, выбор здесь ограничен такими условиями, которым иначе удовлетворить невозможно. Надобно, чтобы из первых трех положений для прямоугольного треугольника происходили четыре уравнения для всякого,

* См. сноски *, ◊ на стр. 70.

которые бы одинаково применялись ко всем частям этого последнего, а следовательно, заключали в себе собственно 15 уравнений, единообразно составленных для сторон и углов, как скоро их отношение в треугольнике остается то же. Надобно, чтобы в четырех уравнениях для всякого треугольника заключались, как частный случай, те три, которые приняты в употребительной Геометрии. Надобно еще удовлетворить двум требованиям, чтобы составление треугольника было возможно. Наконец, присоединяется условие, которое произвол выбора уже совершенно уничтожает. Сумма углов в треугольнике должна быть всегда менее двух прямых и увеличиваться с возрастанием площади пропорционально к недостатку в сумме углов против π. Действительно, ежели в треугольнике сумма углов $\pi-\alpha$, а в другом $\pi-\beta$, и оба треугольника соединяются в один, то здесь уже сумма углов будет $\pi-\alpha-\beta$. Это замечание остается верным даже и в том случае, когда для составления треугольника из двух потребуется деление на части и расположение частей в новом порядке. На таком свойстве треугольников можно бы основать уже полную теорию параллельных и, следовательно, всю Геометрию; но я предпочел способ, изложенный в моем первом сочинении об этом предмете, и где все доказательства, с одними геометрическими построениями, в естественном ходе самой науки, совершенно свободны от предположения аналитических функций.

Займемся теперь применениями к Аналитике, и в этот раз, оставляя способ геометрических построений, для простоты и поверки будем основываться единственно на одинаковости значения елементов в той и другой Геометрии.

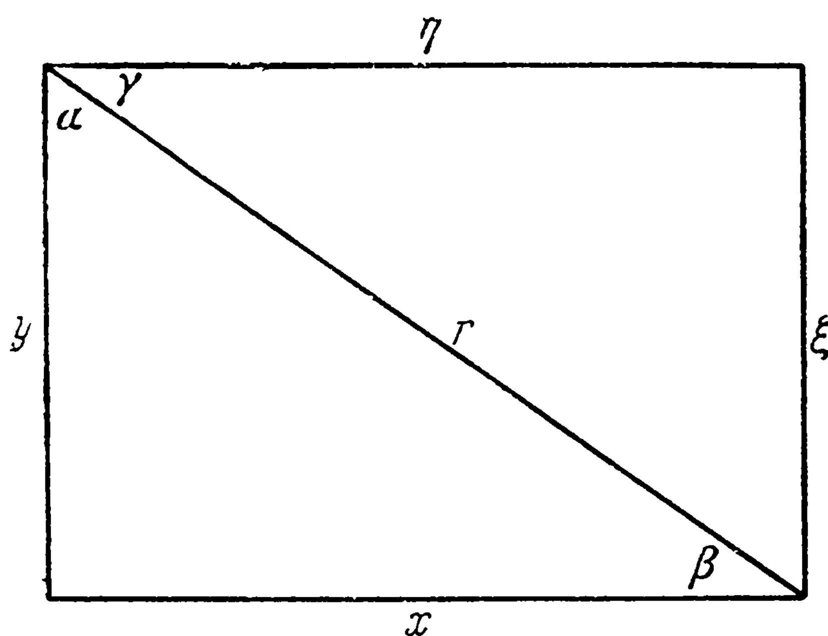
Пусть y, x, ξ, η (чер. 3) линии, перпендикулярные по порядку одна к другой*, замыкают площадь и составляют, таким

---

* Т. е. $y \perp x$, $x \perp \xi$, $\xi \perp \eta$. Эти четыре отрезка образуют фигуру, называемую *четырехугольником Ламберта* или *трипрямоугольником*. Ниже Лобачевский приводит ряд соотношений для трипрямоугольника. Другой, более простой способ вывода этих соотношений указан в примечании [79].

образом, трапецию, которую диогонал r разделяет на два прямоугольных треугольника, проходя через точки соединения x с ξ, y с η. В треугольниках называем α, β, γ углы против x, y, ξ; четвертый острый угол против η будет, следовательно, $\frac{1}{2}\pi - \beta$.

Уравнения (1), (4), (5) для прямоугольного треугольника из x, y, r дают



Чер. 3

$$\sin r' = \sin x' \sin y', \tag{16}$$

$$\cos x' = \cos r' \cos \beta, \tag{17}$$

$$\operatorname{tang} \beta = \cos y' \operatorname{tang} x', \tag{18}$$

$$\operatorname{tang} \alpha = \cos x' \operatorname{tang} y', \tag{19}$$

а для треугольника из ξ, η, r:

$$\sin r' = \sin \xi' \sin \eta', \tag{20}$$

$$\cos \xi' = \cos r' \sin \beta, \tag{21}$$

$$\cot \beta = \cos \eta' \operatorname{tang} \xi', \tag{22}$$

$$\operatorname{tang} \gamma = \cos \xi' \operatorname{tang} \eta'. \tag{23}$$

Из уравнений (17), (21) находим

$$\cos \xi' = \cos x' \operatorname{tang} \beta. \tag{24}$$

Сравнивая отсюда значение $\operatorname{tang} \beta$ с теми, которые заключаются в уравнениях (18) и (22), выводим

$$\cos x' = \cos \eta' \sin \xi', \tag{25}$$

$$\cos \xi' = \cos y' \sin x'. \tag{26}$$

Исключая ξ' в этих последних уравнениях, получим*

$$\operatorname{tang} \eta' = \sin y' \operatorname{tang} x'. \tag{27}$$

---

* Из (25), (26) получаем

$$\frac{\cos^2 x'}{\cos^2 \eta'} + \cos^2 y' \sin^2 x' = \sin^2 \xi' + \cos^2 \xi' = 1,$$

откуда

$$(1 + \operatorname{tg}^2 \eta') \cos^2 x' + \cos^2 y' \sin^2 x' = 1,$$

$$\operatorname{tg}^2 \eta' \cos^2 x' = 1 - \cos^2 x' - \cos^2 y' \sin^2 x' = \sin^2 x' (1 - \cos^2 y') = \sin^2 x' \sin^2 y'$$

или

$$\operatorname{tg}^2 \eta' = \operatorname{tg}^2 x' \sin^2 y'.$$

Итак, для перехода от одной системы координат к другой служат уравнения

$$\left.\begin{aligned}\cos x' &= \sin\xi'\cos\eta',\\ \operatorname{tang} y' &= \sin\eta'\operatorname{tang}\xi'\ ^*,\end{aligned}\right\}\tag{28}$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\eta' &= \frac{\cos x'}{\sin\xi'},\\ \cos y' &= \frac{\cos\xi'}{\sin x'},\end{aligned}\right\}\tag{29}$$

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tang} x' &= \frac{\operatorname{tang}\eta'}{\sin y'},\\ \operatorname{tang}\xi' &= \frac{\operatorname{tang} y'}{\sin\eta'}.\end{aligned}\right\}\tag{30}$$

Куда вместо x, η ставим бесконечно малые линии dx, $d\eta$, то уравнение (25) переменится в такое ◇:

$$d\eta = \frac{dx}{\sin\xi'}.\tag{31}$$

Уравнения (19), (23) дают

$$\operatorname{tang}(\alpha+\gamma) = \frac{\cos x'\operatorname{tang} y' + \cos\xi'\operatorname{tang}\eta'}{1-\cos x'\cos\xi'\operatorname{tang} y'\operatorname{tang}\eta'}.$$

Куда вставляя значения $\cos\xi'$, $\operatorname{tang}\eta'$ из уравнений (26), (27), получим △

$$\operatorname{tang}(\alpha+\gamma) = \frac{\operatorname{tang} y'}{\cos x'},\tag{32}$$

---

* Во всех соотношениях, имеющих место для трипрямоугольника (черт. 3), величины x, y, ξ, η могут быть заменены соответственно величинами ξ, η, x, y (в силу их равноправия). При этой замене формула (27) переходит во второе соотношение (28) [его можно также получить без этой замены из соотношений (25), (26), (27)].

◇ Разлагая выражение $\cos x'$ в ряд по x, получаем (см. стр. 317):

$$\cos x' = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = \frac{(1+2x+\ldots)-1}{(1+2x+\ldots)+1} = x+\ldots$$

△ Подставляя в предыдущую формулу значения $\cos\xi'$ и $\operatorname{tg}\eta'$ из (26), (27) и умножая числитель и знаменатель полученной дроби на $\cos x'\cos y'$, найдем

$$\operatorname{tg}(\alpha+\gamma) = \frac{\cos^2 x'\sin y' + \sin y'\sin^2 x'\cos^2 y'}{\cos x'\cos y' - \cos x'\sin^2 x'\cos y'\sin^2 y'} =$$

а в соединении с уравнением (27) находим *

$$\cos(\alpha+\gamma)=\cos y'\cos\eta'. \tag{33}$$

Из уравнений (17), (21) следует

$$\cos^2 x'+\cos^2\xi'=\cos^2 r', \tag{34}$$

а из уравнений (29) с помощию уравнений (16), (20) выводим ◊

$$\cot\eta'=\frac{\cos x'}{\sin r'},\qquad \cot y'=\frac{\cos\xi'}{\sin r'}.$$

Потому отсюда, с присоединением уравнения (34),

$$\cot^2 y'+\cot^2\eta'=\cot^2 r'. \tag{35}$$

Если x, y перпендикулярные друг к другу коордонаты кривой линии, на которой лежат вершины y, то елемент ds линии должен быть гипотенуза в прямоугольном треугольнике, где один катет dy, а другой проведен от вершины y к соседней ордонате и, следовательно, будет [см. ур. (31)]

$$\frac{dx}{\sin y'}.$$

После чего

$$ds=\sqrt{dy^2+\frac{dx^2}{\sin^2 y'}}\ [^{80}]. \tag{36}$$

Площадь S, ограниченную какой-нибудь линией, разделяем перпендикулами y к оси x (чер. 4). Расстояние между двумя последующими y пусть измеряется на оси x бесконечно малою линией dx. Полоса между двумя такими y пусть еще разде-

---

$$=\frac{\sin y'}{\cos x'\cos y'}\cdot\frac{\cos^2 x'+\sin^2 x'\cos^2 y'}{1-\sin^2 x'\sin^2 y'}=$$

$$=\frac{\operatorname{tg} y'}{\cos x'}\,\frac{1-\sin^2 x'+\sin^2 x'(1-\sin^2 y')}{1-\sin^2 x'\sin^2 y'}=\frac{\operatorname{tg} y'}{\cos x'}.$$

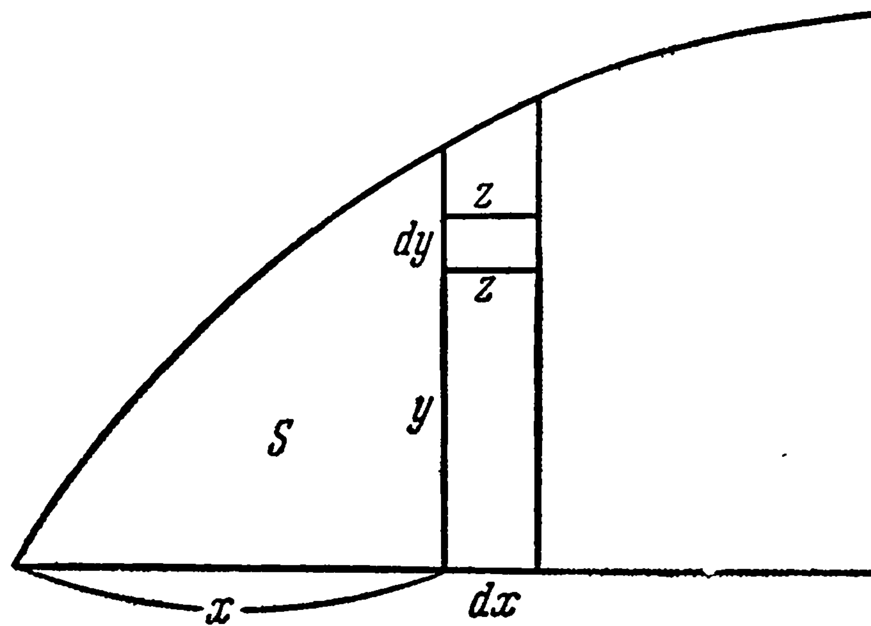
* $$\frac{1}{\cos^2(\alpha+\gamma)}=1+\operatorname{tg}^2(\alpha+\gamma)=1+\frac{\operatorname{tg}^2 y'}{\cos^2 x'}=1+\operatorname{tg}^2 y'(1+\operatorname{tg}^2 x')=$$

$$=1+\operatorname{tg}^2 y'\left(1+\frac{\operatorname{tg}^2\eta'}{\sin^2 y'}\right)=\frac{1}{\cos^2 y'}+\frac{\operatorname{tg}^2\eta'}{\cot^2 y'}=\frac{1}{\cos^2 y'\cos^2\eta'}.$$

◊ Значение $\sin\xi'$ из (20) нужно подставить в первую из формул (29), значение $\sin x'$ из (16) — во вторую из формул (29).

лится перпендикулами z к y на квадраты *, из которых dy бок по направлению y, а другой, как мы видели [см. урав. (31)],

$$z = \frac{dx}{\sin y'}.$$



Чер. 4

Следовательно, елемент площади S выражается

$$d^2S = \frac{dx\,dy}{\sin y'}. \quad (37)$$

Интегрирование этого уравнения в отношении к y от $y' = \frac{1}{2}\pi$ дает ◊

$$dS = dx \cot y'. \quad (38)$$

Если координаты x, y, перпендикулярные одна к другой, переменяем на ξ, x, отрезанные на перпендикулярных осях (чер. 3), то выражение для dS в соединении с уравнением (25) △ сделается

$$dS = \frac{dx \cos \xi'}{\sqrt{\sin^2 x' - \cos^2 \xi'}}.$$

---

* Лобачевский имеет право говорить здесь о «квадратах» (точнее, прямоугольниках), так как в бесконечно малом его геометрия не отличается от евклидовой.

◊ Учитывая формулы в сноске △ на стр. 317, имеем

$$S = \int_0^x\int_0^y \frac{dx\,dy}{\sin y'} = \int_0^x\int_0^y \operatorname{ch} y\,dx\,dy = \int_0^x \operatorname{sh} y\,dx = \int_0^x \operatorname{ctg} y'\,dx,$$

откуда и следует (38).

△ Должна быть ссылка на формулу (26):

$$\operatorname{tg}^2 y' = \frac{1}{\cos^2 y'} - 1 = \frac{\sin^2 x'}{\cos^2 \xi'} - 1 = \frac{\sin^2 x' - \cos^2 \xi'}{\cos^2 \xi'}.$$

откуда

$$\operatorname{ctg} y' = \frac{\cos \xi'}{\sqrt{\sin^2 x' - \cos^2 \xi'}}.$$

Рассматривая здесь ξ постоянным и интегрируя от $x = 0$ или $x' = \frac{1}{2}\pi$, находим площадь трапеции, которой два бока y, ξ перпендикулярны к третьему x, а четвертый η из вершины y падает перпендикулярно к ξ,

$$S = \frac{1}{2}\pi - \arccos(\cot\xi' \cot x')\,^*.$$

Отсюда

$$\operatorname{tang} S = \frac{\cot\xi' \cot x'}{\sqrt{1 - \cot^2\xi' \cot^2 x'}},$$

а поставивши значение $\cos\zeta'$ из уравнения (26), получим ◊

$$\operatorname{tang} S = \cos x' \cot y'. \qquad (39)$$

Одинаковость значения $\frac{1}{2}\pi - S$ с значением угла в трапеции между y, η [см. урав. (32)] показывает, что площадь S трапеции равна недостатку в сумме ее углов против 2π. В моем первом сочинении помощию одних геометрических построений

---

* Пользуясь формулой (**), приведенной в сноске △ на стр. 318—319, имеем

$$S = \int_0^x \frac{dx \cos\xi'}{\sqrt{\sin^2 x' - \cos^2\xi'}} = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{x'} \frac{dx' \cos\xi'}{\sin x' \sqrt{\sin^2 x' - \cos^2\xi'}} =$$

$$= \int_{x'}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx' \operatorname{ctg}\xi'}{\sin^2 x' \sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2\xi' \operatorname{ctg}^2 x'}} = -\int_{x'}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\operatorname{ctg}\xi' \operatorname{ctg} x')}{\sqrt{1 - (\operatorname{ctg}\xi' \operatorname{ctg} x')^2}} =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \arccos(\operatorname{ctg} x' \operatorname{ctg}\xi').$$

◊ Из (26) следует

$$\operatorname{ctg}^2\xi' \operatorname{ctg}^2 x' = \frac{\cos^2\xi' \operatorname{ctg}^2 x'}{1 - \cos^2\xi'} = \frac{\cos^2 y' \sin^2 x' \operatorname{ctg}^2 x'}{1 - \cos^2 y' \sin^2 x'} = \frac{\cos^2 y' \cos^2 x'}{1 - \cos^2 y' \sin^2 x'};$$

$$1 - \operatorname{ctg}^2\xi' \operatorname{ctg}^2 x' = \frac{1 - \cos^2 y' \sin^2 x' - \cos^2 y' \cos^2 x'}{1 - \cos^2 y' \sin^2 x'} =$$

$$= \frac{1 - \cos^2 y'}{1 - \cos^2 y' \sin^2 x'} = \frac{\sin^2 y'}{1 - \cos^2 y' \sin^2 x'},$$

откуда и получается выражение (39) для S.

выведено, что площадь всякого многоугольника с n боками будет разность $(n-2)\pi$ без суммы углов многоугольника *.

Выражение (38) елемента dS площади может быть заменено выражением $d\xi \cot \eta'^{2}$ с переменою системы координат на другую, так что x, ξ, выходя из того же начала, перпендикулярны друг к другу, а η из точки кривой падает перпендикулярно к ξ. Зависимость тех и других координат определяется в таком случае уравнениями (28) или, что все равно, такими ◇

$$\cos \xi' = \sin x' \cos y', \quad \operatorname{tang} \eta' = \sin y' \operatorname{tang} x'. \tag{40}$$

Если кривая пересекает оси x и ξ, то, полагая $x = X$ для $y = 0$ и пользуясь найденным значением трапеции (39) внутри кривой, должны получить △

$$\int\limits_{x}^{X} dx \cot y' = \int\limits_{0}^{\xi} d\xi \cot \eta' - \operatorname{arc\,tang} (\cos x' \cot y'). \tag{41}$$

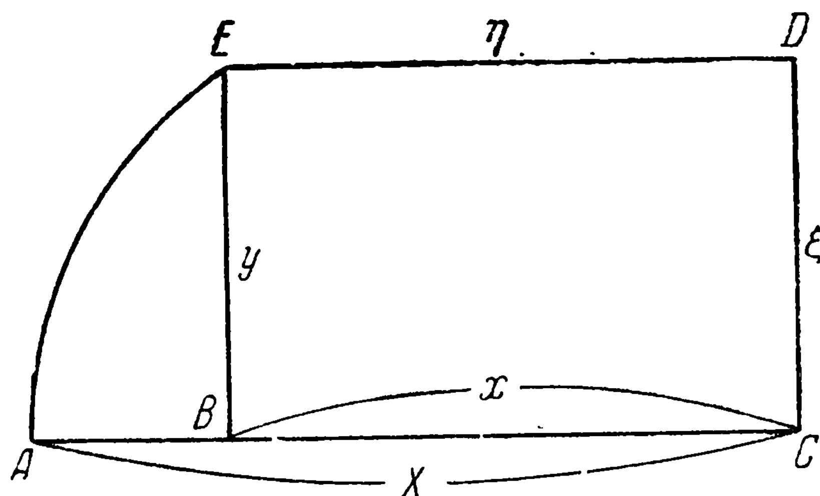
В уравнения (40), (41), поставя $x\sqrt{-1}$ вместо x ○, находим ⊗:

---

* См. Приложение 1, стр. 415.

◇ См. сноску * на стр. 331.

△ Площадь фигуры ABE (черт. 4а) Лобачевский вычисляет как разность площадей фигур $ACDE$ и $BCDE$.



Черт. 4а

○ И $i \operatorname{ctg} \eta'$ вместо $\operatorname{ctg} \eta'$.

⊗ Используя формулы сноски △ на стр. 317 и соотношение

$$\operatorname{arctg} [\operatorname{ctg} y' \cos (ix)'] = \operatorname{arctg} (i \operatorname{ctg} y' \operatorname{tg} x) = \frac{i}{2} \ln \frac{1 + \operatorname{ctg} y' \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{ctg} y' \operatorname{tg} x} = \frac{i}{2} \ln \frac{\sin (y' + x)}{\sin (y' - x)}.$$

$$\left.\begin{aligned}\int\limits_x^X dx\cot y' &= \int\limits_0^\xi d\xi\cot\eta' - \frac{1}{2}\log\frac{\sin(y'+x)}{\sin(y'-x)},\\ \cos\xi'\cos x = \cos y', &\quad \sin x\operatorname{tang}\eta' = \sin y'.\end{aligned}\right\}\quad(42)$$

Ставим сюда x' вместо x, потом $x\sqrt{-1}$, $-\xi\sqrt{-1}$ вместо x, ξ *;

$$\left.\begin{aligned}\int\limits_x^X \frac{dx}{\cos x}\cot y' &= \int\limits_0^\xi d\xi\cot\eta' - \operatorname{arc}\operatorname{tang}\left\{\frac{\cot y'}{\sin x}\right\},\\ \operatorname{tang}\xi\operatorname{tang}x = \cos y', &\quad \operatorname{tang}\eta' = \sin y'\cos x.\end{aligned}\right\}\quad(43)$$

Переменяем здесь x на x', ξ на $\frac{1}{2}\pi-\xi'$, потом ставим $x\sqrt{-1}$, $\xi\sqrt{-1}$ вместо x, ξ; и, наконец, $\frac{1}{2}\pi-\xi$ вместо ξ ◦:

---

* Иначе говоря, x заменяем на $(ix)'$, а ξ — на $-i\xi$. **При этом** dx заменится на (см. сноску △ на стр. 318—319)

$$d(ix)' = -d(ix)\sin(ix)' = -\frac{idx}{\cos x},$$

а выражение

$$\frac{1}{2}\ln\frac{\sin(y'+x)}{\sin(y'-x)} = \frac{1}{i}\operatorname{arctg}(i\operatorname{ctg}y'\operatorname{tg}x)$$

заменится на

$$\frac{1}{i}\operatorname{arctg}(i\operatorname{ctg}y'\operatorname{tg}(ix)') = \frac{1}{i}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{ctg}y'}{\sin x}\right).$$

◦ Иначе говоря, x, ξ и $\operatorname{ctg}\eta$ заменяются соответственно на $(ix)'$, $\frac{\pi}{2}-\left[i\left(\frac{\pi}{2}-\xi\right)\right]'$, $-i\operatorname{ctg}\eta$. Последовательное выполнение преобразований, которые, таким образом, были проделаны в соотношениях (40), (41), сводятся к замене x, ξ на $i[i(ix)']'$, $-i\left\{\frac{\pi}{2}-\left[i\left(\frac{\pi}{2}-\xi\right)\right]'\right\}$. В результате $\frac{1}{\sin x'} = \operatorname{ch}x$ заменится на (см. сноску △ на стр. 317)

$$\operatorname{ch}i[i(ix)']' = \cos[i(ix)']' = \operatorname{th}i(ix)' = i\operatorname{tg}(ix)' = \frac{i}{\operatorname{sh}ix} = \frac{1}{\sin x},$$

т. е. x' заменится на x. Аналогично $\frac{1}{\sin\xi'}$ заменится на $\frac{1}{\sin\xi}$, т. е. ξ' заменится на ξ. Таким образом, заменой x' и ξ' на x и ξ можно соотношения (40), (41) сразу перевести в (44).

$$\left.\begin{aligned}\int\limits_x^X \frac{dx}{\sin x}\cot y' &= \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\xi} \frac{d\xi}{\sin\xi}\cot\eta' + \operatorname{arc\,tang}(\cot y'\cos x),\\ \cos\xi = \cos y'\sin x, &\quad \operatorname{tang}\eta' = \sin y'\operatorname{tang} x.\end{aligned}\right\}\quad(44)$$

Последние уравнения прямо следуют из уравнений (40), (41), когда сюда вводим x', ξ' вместо x, ξ; именно*:

$$dx = -\frac{dx'}{\sin x'}\qquad d\xi = -\frac{d\xi'}{\sin\xi'}.$$

Когда в уравнениях (40), (41) вместо ξ, y ставим $\xi\sqrt{-1}$, $y\sqrt{-1}$, то получим ◊

$$\left.\begin{aligned}\int\limits_x^X dx\sin y &= \int\limits_0^{\xi} d\xi\cot\eta' - \frac{1}{2}\log\frac{1+\cos x'\sin y}{1-\cos x'\sin y},\\ \operatorname{tang}\xi = \sin x'\operatorname{tang} y, &\qquad \operatorname{tang}\eta'\cos y = \operatorname{tang} x'.\end{aligned}\right\}\quad(45)$$

То же делая с уравнениями (42), находим△:

$$\left.\begin{aligned}\int\limits_x^X dx\sin y &= \int\limits_0^{\xi} d\xi\cot\eta' - \operatorname{arc\,tang}(\operatorname{tang} x\sin y),\\ \operatorname{tang}\xi\cos x = \operatorname{tang} y, &\quad \operatorname{tang}\eta'\cos y = \frac{1}{\sin x}.\end{aligned}\right\}\quad(46)$$

Если в уравнения (43) ставим $\xi\sqrt{-1}$, $y\sqrt{-1}$ вместо ξ, y,

---

* См. сноску △ на стр. 318—319.

◊ При замене y на iy выражение $\operatorname{arctg}(\cos x'\operatorname{ctg} y')$ заменится на

$$\operatorname{arctg}(i\cos x'\sin y) = \frac{i}{2}\ln\frac{1+\cos x'\sin y}{1-\cos x'\sin y}.$$

△ Иначе говоря, можно воспользоваться соотношениями (40), (41), заменив в них x, y, ξ, $\operatorname{ctg}\eta'$ соответственно через ix, iy, $i\xi$, $i\operatorname{ctg}\eta'$.

потом ξ' вместо ξ, наконец, $-\xi\sqrt{-1}$ вместо ξ, то будет*

$$\left.\begin{array}{c}\displaystyle\int\limits_x^X \frac{dx}{\cos x}\sin y = \int\limits_0^\xi \frac{d\xi}{\cos\xi}\cot\eta' - \frac{1}{2}\log\left(\operatorname{tang}\frac{x+y}{2}\cot\frac{x-y}{2}\right)^{\diamond},\\ \sin\xi = \operatorname{tang} x\cot y, \quad \operatorname{tang}\eta'\cos y = \cos x.\end{array}\right\} \quad (47)$$

Уравнения (40), (41), (42), (43), (44), (45), (46) и (47) представляют интегрирование, подобное обыкновенному по частям.

---

* При замене ξ, y на $(-i\xi)'$, iy выражение $\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{ctg} y'}{\sin x}\right)$ заменится на

$$\operatorname{arctg}\left(i\frac{\sin y}{\sin x}\right) = \frac{i}{2}\ln\frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \frac{i}{2}\ln\left(\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}\operatorname{ctg}\frac{x-y}{2}\right),$$

а дифференциал $d\xi$ заменится на

$$d(-i\xi)' = -d(-i\xi)\sin(-i\xi)' = \frac{id\xi}{\cos\xi}.$$

Лобачевский ошибочно говорит о замене ξ, y на $i(-i\xi)'$, iy [вместо $(-i\xi)'$, iy].

$\diamond$ При дифференцировании соотношения (41) получается следующее дифференциальное соотношение

$$d\operatorname{arctg}(\cos x'\operatorname{ctg} y') = \operatorname{ctg}\eta'\, d\xi + \operatorname{ctg} y'\, dx, \qquad (*)$$

которое легко вытекает также из соотношений (40). Однако этим проверка интегрального соотношения (41) еще не закончена, так как при интегрировании соотношения (*) может появиться постоянная интегрирования. Но при $x = X$ мы имеем $y = 0$ и потому [см. (40)] $\xi = 0$. Так как эти значения удовлетворяют интегральному соотношению (41), то оно справедливо при всех значениях переменных. Аналогично проверяются соотношения (42)—(46). Что же касается интегрального соотношения (47), то его дифференцирование дает правильное дифференциальное соотношение [легко получающееся, как указывает Лобачевский, из (43)]; между тем само интегральное соотношение (47) бессмысленно. Действительно, при $x = X$ (верхний предел интегрирования) мы имеем $y = 0$, и для определения ξ получается бессмысленное уравнение $\sin\xi = \infty$.

Следует также иметь в виду, что формулы (40) устанавливают гомеоморфное отображение плоскости переменных x, y на плоскость переменных ξ, η, в то время как преобразования, содержащиеся в формулах (42)—(47), не являются гомеоморфизмами этих плоскостей.

В справедливости всех этих интегральных выражений можно увериться прямо помощию дифференцирования.

Для круга, которого r полупоперечник, центр в начале координат x, y и, следовательно,

$$\sin x' \sin y' = \sin r',$$

уравнение (38) делается *

$$dS = -dx' \sqrt{\cot^2 r' - \cot^2 x'}.$$

Полагая здесь ◇

$$\sin \psi = \operatorname{tang} r' \cot x', \quad \cot \theta = \cot \psi \sin r'$$

и интегрируя от $\psi = 0$, $\theta = 0$, находим △

$$S = \frac{\theta}{\sin r'} - \psi.$$

---

* $$dS = dx \operatorname{ctg} y' = -dx' \frac{\operatorname{ctg} y'}{\sin x'} = -dx' \sqrt{\frac{1}{\sin^2 x'}\left(\frac{1}{\sin^2 y'} - 1\right)} =$$
$$= -dx' \sqrt{\frac{1}{\sin^2 x' \sin^2 y'} - \frac{1}{\sin^2 x'}} = -dx' \sqrt{\frac{1}{\sin^2 r'} - \frac{1}{\sin^2 x'}} =$$
$$= -dx' \sqrt{\operatorname{ctg}^2 r' - \operatorname{ctg}^2 x'}.$$

Однако для интегрирования это преобразование излишне: можно сразу интегрировать выражение (38), перейдя к переменным θ и ψ (см. сноску △ на этой же странице).

◇ Как следует из соотношений (2), (3), углы ψ и θ имеют значения, показанные на чер. 46 (где $BQ \perp QA$, $PR \perp QA$).

△ Применяя к треугольнику, изображенному на чер. 46, соотношение (*) сноски △ на стр. 318—319, получим:

$$-d\theta = \cos y'\, dx' - \sin r'\, d\psi,$$

после чего [см. (38) и (1)]

$$S = \int_0^x dx \operatorname{ctg} y' = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{x'} \frac{dx' \operatorname{ctg} y'}{\sin x'} = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{x'} \frac{dx' \cos y'}{\sin r'} =$$

Умножая это уравнение на 4 и делая $\theta = \frac{1}{2}\pi$, $\psi = \frac{1}{2}\pi$, получим площадь круга

$$S = \pi\left(e^{\frac{1}{2}r} - e^{-\frac{1}{2}r}\right)^2. \tag{48}$$

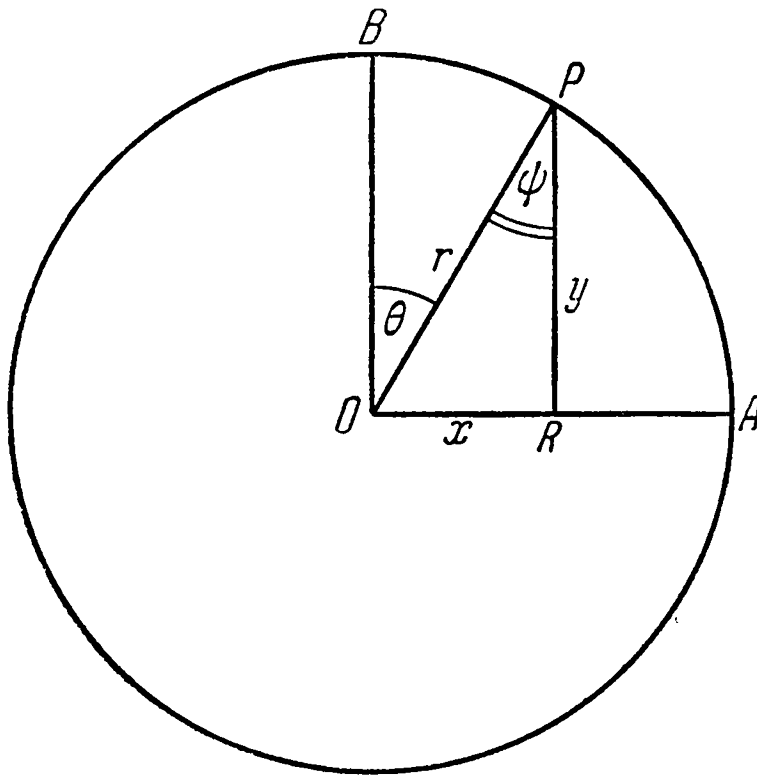
Для r весьма малого $S = \pi r^2$, как и в употребительной Геометрии. Дифференцируя значение S в уравнении (48), находим окружность круга

$$\left\{\frac{dS}{dr}\right\} = 2\pi \cot r'. \tag{49}$$

То же бы самое нашли, интегрируя выражение (36) для елемента ds кривой линии.

Считая x, ξ от начала координат на двух перпендикуляр-

$$= \int\limits_0^\theta \frac{d\theta}{\sin r'} - \int\limits_0^\psi d\psi = \frac{\theta}{\sin r'} - \psi.$$



Черт. 46

Это есть площадь криволинейной трапеции $BPRO$ на черт. 46. Полагая $x = r$ $\left(\text{т. е. } \theta = \psi = \frac{\pi}{2}\right)$, найдем площадь четверти круга:

$$\frac{1}{4} S_{\text{кр}} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\sin r'} - 1\right) = \frac{\pi}{2}(\operatorname{ch} r - 1) = \frac{\pi}{4}\left(e^{\frac{r}{2}} - e^{-\frac{r}{2}}\right)^2.$$

ных осях; y, η ведя перпендикулярно из точки к осям x, ξ; как это предполагалось в уравнениях (28), (29) и (30), выражению (37) для елемента d^2S площади можем давать различный вид, употребляя те или другие координаты по известному способу для подобных превращений. Так, находим*

$$d^2S = \frac{\sin x' \sin \xi' \, dx' \, d\xi'}{(1 - \cos^2 x' - \cos^2 \xi')^{\frac{3}{2}}}, \tag{50}$$

$$d^2S = \frac{dy \, d\eta}{\sqrt{1 - \cos^2 y' \cos^2 \eta'}}. \tag{51}$$

Наконец, вводя полярные координаты, r расстояние от начала и ω угол r с осью x, уравнение (50) с помощию уравнений (34) и (17), разумея в последнем ω под β, переменяем в

$$d^2S = d\omega \, dr \cot r'. \tag{52}$$

Пусть теперь $F(a)$, $f(a)$ — две какие-нибудь функции от произвольного a; к тому означаем

$$\frac{dF(a)}{da} = F'(a), \quad \frac{df(a)}{da} = f'(a)$$

и полагаем

$$F\{a + f(\infty)\} = 0.$$

Уравнение (52) дает ◇

$$\iint d^2S \cdot F'\left\{a + f\left(\frac{1}{\sin r'}\right)\right\} f'\left\{\frac{1}{\sin r'}\right\} = \frac{1}{2}\pi F\{a + f(1)\}, \tag{53}$$

---

* Формулы (50), (51), (52) выведены в примечании [81].

◇ Рассматриваемый интеграл I распространен на первый квадрант плоскости:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} F'\left[a + f\left(\frac{1}{\sin r'}\right)\right] f'\left(\frac{1}{\sin r'}\right) \operatorname{ctg} r' \, d\omega \, dr.$$

Он легко берется, так как

$$\frac{d}{dr} F\left\{a + f\left(\frac{1}{\sin r'}\right)\right\} = F'\left\{a + f\left(\frac{1}{\sin r'}\right)\right\} f'\left(\frac{1}{\sin r'}\right) \operatorname{ctg} r'.$$

В тексте интегрирование по r происходит в пределах от $r = \infty$ до $r=0$, чем и объясняется отсутствие знака «минус» в правой части. Одна-

где двойное интегрирование распространяется между теми двумя крайними значениями переменных, которые отвечают $r'=0$, $r'=\frac{1}{2}\pi$.

Если теперь в уравнение (53) ставим выражение (37) для d^2S, потом $\sin r' = \sin x' \sin y'$ [см. ур. (16)], наконец, делаем

$$\cot\frac{1}{2}x' = \alpha + \sqrt{\alpha^2-1}, \quad \cot\frac{1}{2}y' = \beta + \sqrt{\beta^2-1},$$

то получим *

$$\int_1^\infty\int_1^\infty \frac{\beta d\alpha d\beta}{\sqrt{(\alpha^2-1)(\beta^2-1)}} f'(\alpha\beta) F'\{a+f(\alpha\beta)\} =$$
$$= -\frac{1}{2}\pi F\{a+f(1)\}. \qquad (54)$$

Если же в уравнение (53) ставим выражение (50) для d^2S, потом значение $\sin r'$ из уравнения (34), наконец, делаем

$$\cos x' = \alpha, \quad \cos\xi' = \beta, \qquad [54a]$$

то находим ◇

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{d\alpha\, d\beta}{(1-\alpha^2-\beta^2)^{\frac{3}{2}}} f'\left(\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}}\right) F'\left\{a+f\left(\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}}\right)\right\} =$$
$$= -\frac{1}{2}\pi F\{a+f(1)\}. \qquad (55)$$

ко в тексте этот знак отсутствует и в правых частях интегралов (54), (55), (56), что противоречит обычному условию, согласно которому якобиан считается положительным (ср. примечание [81]).

* Из соотношений

$$\operatorname{ctg}\frac{x'}{2} = e^x = \alpha + \sqrt{\alpha^2-1}, \quad \operatorname{ctg}\frac{y'}{2} = e^y = \beta + \sqrt{\beta^2-1}$$

вытекает

$$\alpha = \operatorname{ch} x = \frac{1}{\sin x'}; \quad \beta = \operatorname{ch} y = \frac{1}{\sin y'}; \quad \frac{1}{\sin r'} = \frac{1}{\sin x' \cdot \sin y'} = \frac{1}{\alpha\beta},$$

$$dx = \frac{d\alpha}{\operatorname{sh} x} = \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha^2-1}}, \quad dy = \frac{d\beta}{\operatorname{sh} y} = \frac{d\beta}{\sqrt{\beta^2-1}}.$$

◇ Согласно (34) имеем

$$\sin r' = \sqrt{1-\cos^2 x' - \cos^2\xi'} = \sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}$$

(координаты $\alpha = \cos x'$, $\beta = \cos\xi'$ называются *бельтрамиевыми*; в этих коор-

Ставим еще выражение (51) для d^2S в уравнение (53), потом вместо $\sin r'$ его значение из уравнения (35) и полагаем

$$\cot y' = \alpha, \quad \cot \eta' = \beta.$$

Получим *

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{d\alpha\, d\beta}{\sqrt{1+\alpha^2+\beta^2}} f'\left(\sqrt{1+\alpha^2+\beta^2}\right) F'\left\{a+f\left(\sqrt{1+\alpha^2+\beta^2}\right)\right\} = \\ = -\frac{1}{2}\pi F\{a+f(1)\}. \quad (56)$$

Для $f(a) = a^2 - 1$ это последнее уравнение делается

$$\int_0^\infty\int_0^\infty d\alpha\, d\beta F'(a+\alpha^2+\beta^2) = -\frac{1}{4}\pi F(a),$$

как находит и Льувиль (Mémoire sur une formule d'analyse, par Liouville. Crelle's Jour. f. d. reine u. ang. Math, 1834. B. XII).

динатах уравнение прямой линейно). Отметим, что пределы интегрирования указаны в формуле (55) неверно: интегрирование должно производиться по четверти круга. Действительно, из (34) следует, что преобразование [54a] переводит первый квадрант плоскости (x, y) в область Ω, определяемую неравенствами:

$$\alpha > 0, \ \beta > 0, \ \alpha^2 + \beta^2 < 1.$$

* Из (35) имеем

$$\frac{1}{\sin r'} = \sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 r'} = \sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 y' + \operatorname{ctg}^2 \eta'} = \sqrt{1+\alpha^2+\beta^2}.$$

Далее, из (51) получаем

$$d^2S = \frac{dy'd\eta'}{\sin y' \sin \eta' \sqrt{1-\cos^2 y' \cos^2 \eta'}} = \frac{d\operatorname{ctg} y' \cdot d\operatorname{ctg} \eta'}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2 y'}\cdot\frac{1}{\sin^2 \eta'} - \operatorname{ctg}^2 y' \operatorname{ctg}^2 \eta'}} =$$

$$= \frac{d\alpha\, d\beta}{\sqrt{(1+\alpha^2)(1+\beta^2)-\alpha^2\beta^2}} = \frac{d\alpha\, d\beta}{\sqrt{1+\alpha^2+\beta^2}}.$$

Разумея то же под $F(x)$, $F'(x)$, к тому означая λ произвольное постоянное и полагая

$$F(\infty) = 0,$$

берем двойной интеграл *

$$-\int\limits_0^\pi\int\limits_0^\infty dB\, dc \cot c' F'\left(\frac{\lambda}{\sin c'}\right) = \frac{\pi}{\lambda} F(\lambda), \qquad [56а]$$

который, следовательно, распространяется на бесконечную плоскость по одну сторону прямой линии. Составляем треугольник из боков a, b, c с противоположными углами A, B, C, взявши a произвольно ◇. Второе из уравнений (13) △ дает

$$\frac{1}{\sin c'} = \frac{1}{\sin a' \sin b'} - \cot a' \cot b' \cos C.$$

Пусть

$$\lambda = p \sin a', \ \lambda \cot a' = q; \qquad [56б]$$

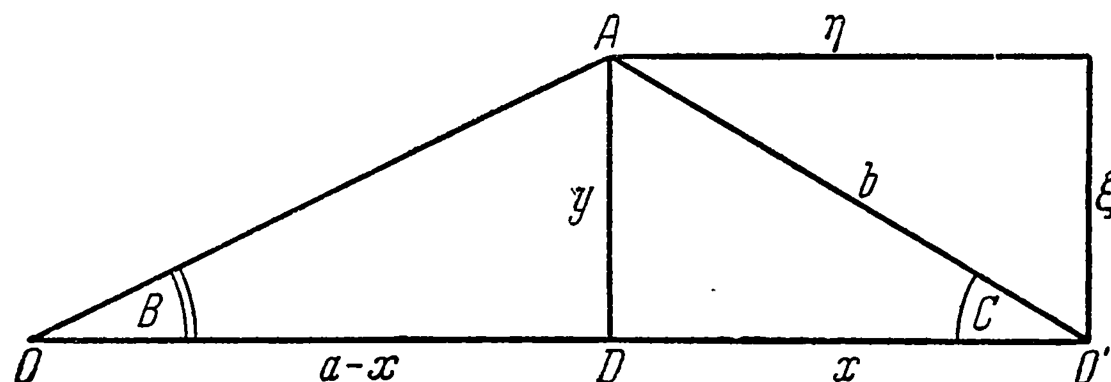
следовательно,

$$\frac{\lambda}{\sin c'} = \frac{p - q \cos b' \cos C}{\sin b'}.$$

---

* Обозначим через c радиус-вектор, а через B — полярный угол произвольной точки. Тогда согласно (52) будем иметь $d^2S = dBdc \operatorname{ctg} c'$. Положив теперь в (53) $a = 0$, $f(x) = \lambda x$ и распространив интегрирование на всю верхнюю полуплоскость, получим [56а]. Заметим, что постоянная λ предполагается положительной: при $\lambda < 0$ формула [56а] остается справедливой, если $F(-\infty) = 0$.

◇ См. черт. 4в.



Черт. 4в

△ После замены a, b, c, A на c, a, b, C.

Между тем выражение (52) для елемента предполагает

$$dB\,dc\cot c' = dC\,db\cot b'\ *.$$

После чего

$$-\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} dC\,db\cot b' F'\left(\frac{p-q\cos b'\cos C}{\sin b'}\right) = \frac{\pi F(\sqrt{p^2-q^2})}{\sqrt{p^2-q^2}} \quad (57)$$

или с обыкновенным означением ◇

$$-\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} d\omega\,dx\,(e^x-e^{-x})\,F'\{(p-q\cos\omega)e^x+(p+q\cos\omega)e^{-x}\} =$$

$$= \frac{\pi F(2\sqrt{p^2-q^2})}{\sqrt{p^2-q^2}}, \quad (58)$$

где $p^2 > q^2$ — произвольные △ числа.

Означаем y перпендикул в треугольнике из острея A на сторону a○, на которой отрезанную часть к углу C называем x. Основываясь на уравнениях (17) и (16), (37) и (52), вставляем

$$\sin b' = \sin x' \sin y,\quad \cos b'\cos C = \cos x',$$

$$dC\,db\cot b' = \frac{dx\,dy}{\sin y'}\ ⊗$$

---

* Правая часть этой формулы есть элемент площади в полярных координатах с полюсом в точке O' и полярной осью $O'O$ (b — радиус-вектор, а C — полярный угол). Формула (57) получается из [56а] после перехода к этим новым полярным координатам (с учетом соотношения $\lambda^2 = p^2 - q^2$, вытекающего из [56б]).

◇ Формула (58) получается из (57) при замене C, b, p, q соответственно на ω, x, $2p$, $2q$. При этом следует воспользоваться соотношениями

$$\frac{1}{\sin x'} = \frac{e^x+e^{-x}}{2},\quad \operatorname{ctg} x' = \frac{e^x-e^{-x}}{2}.$$

△ Положительные.

○ См. черт. 4в.

⊗ В подлиннике перед левой частью стоит знак «минус», в связи с чем в левых частях соотношений (59), (60), (61) знак «минус» отсутствует.

в интеграл (57), который таким образом сделается

$$-\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}\frac{dx\,dy}{\sin y'}F'\left(\frac{p-q\cos x'}{\sin x'\sin y'}\right)=\frac{\pi F(\sqrt{p^2-q^2})}{\sqrt{p^2-q^2}}, \qquad (59)$$

или с обыкновенным означением для произвольных положительных и постоянных a, b*:

$$-\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{\infty} dx\,dy\,(e^y+e^{-y})\,F'\{(ae^x+be^{-x})(e^y+e^{-y})\}=$$

$$=\frac{\pi F(4\sqrt{ab})}{2\sqrt{ab}}, \qquad (60)$$

или, наконец,◊

$$-\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{x}\,dy\,F'\left\{\left(ax+\frac{b}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)\right\}=\frac{\pi F(4\sqrt{ab})}{2\sqrt{ab}}. \qquad (61)$$

Например, для $F(x)=x^{-n}$ находим

$$\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{x\left(ax+\frac{b}{x}\right)^{n+1}}\int_{0}^{\infty}\frac{dy\,y^{n+1}}{(y^2+1)^{n+1}}=\frac{\pi}{n}(ab)^{-\frac{n+1}{2}}\cdot 2^{-2n-1}, \qquad (62)$$

---

* Для получения формулы (60) нужно заменить p и q соответственно через $2(b+a)$, $2(b-a)$, а также воспользоваться формулами, приведенными в сноске ◊ на стр. 345.

◊ Заменяя e^x, e^y через x_1, y_1, найдем

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} dxdye^yF'[(ae^x+be^{-x})(e^y+e^{-y})]=\int_{0}^{\infty}\int_{1}^{\infty}\frac{dx_1}{x_1}\,dy_1F'\left[\left(ax_1+\frac{b}{x_1}\right)\left(y_1+\frac{1}{y_1}\right)\right],$$

а заменяя e^x, e^{-y} на x_1, y_1, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} dxdye^{-y}F'[(ae^x+be^{-x})(e^y+e^{-y})]=-\int_{0}^{\infty}\int_{1}^{0}\frac{dx_1}{x_1}\,dy_1F'\left[\left(ax_1+\frac{b}{x_1}\right)\left(y_1+\frac{1}{y_1}\right)\right].$$

Складывая почленно эти равенства, убедимся, что левые части соотношений (60), (61) одинаковы.

или, поставя $\sqrt{x}\sqrt{\frac{b}{a}}$ вместо x, $\sqrt{y}$ вместо y *,

$$\int_0^\infty \frac{dx\, x^{\frac{n-1}{2}}}{(1+x)^{n+1}} \int_0^\infty \frac{dy\, y^{\frac{n}{2}}}{(1+y)^{n+1}} = \frac{\pi}{n} 2^{-2n+1}. \tag{63}$$

Справедливость этого уравнения поверяется известными свойствами функции ◊

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{n-1} dx = \Gamma(n).$$

* Проще будет положить в (62) $a = b = 1$ и после этого принять x^2, y^2 за новые переменные x_1, y_1 (которые после замены снова обозначаются через x, y).

◊ Согласно формуле [64а], ниже приводимой Лобачевским, левая часть соотношения (63) имеет вид

$$\frac{\left[\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\right]^2 \Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{[\Gamma(n+1)]^2},$$

а в силу известного соотношения

$$\Gamma(m+1) = m\Gamma(m) \tag{*}$$

ей можно придать вид

$$\frac{n}{2}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(n+1)}\right]^2.$$

Для проверки соотношения (63) достаточно, таким образом, убедиться в справедливости равенства

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(n+1)} = \frac{\sqrt{\pi}}{n}\cdot 2^{1-n}. \tag{**}$$

Для $n = 1,2$ это равенство непосредственно проверяется $\left[\text{с учетом формулы } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\right]$, а далее идет [в силу (*)] индукция от n к $n+2$:

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}{\Gamma(n+3)} = \frac{\frac{n+1}{2}\cdot\frac{n}{2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{(n+2)(n+1)\Gamma(n+1)} =$$

Однако ж заметим, что уравнению (62) можно дать еще такой вид *

$$\int_0^\pi \frac{d\varphi \sin^n\varphi}{(p+q\cos\varphi)^{n+1}} = \frac{2\sqrt{\pi}}{n(p^2-q^2)^{\frac{n+1}{2}}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \qquad [63a]$$

или, все равно, такой

$$\int_0^\pi \frac{d\psi \sin^n\psi}{(p+q\cos\psi)^{n+1}} = \frac{\pi\Gamma(n)}{n2^{n-2}(p^2-q^2)^{\frac{n+1}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)^2}. \qquad (64)$$

$$= \frac{n}{4(n+2)} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{n} 2^{1-n} = \frac{\sqrt{\pi}}{n+2} 2^{1-(n+2)}.$$

Таким образом, формула (63) вытекает из свойств Г-функции. Соотношение, эквивалентное формуле (**), приведено Лобачевским ниже (стр. 349).

* Формулы [63a], (64) легко вывести следующим путем. Подстановка

$$a = \frac{p-q}{2},\; b = \frac{p+q}{2},\; x = \operatorname{tg}\frac{\psi}{2},\; y = \sqrt{z}$$

приводит соотношение (62) к виду

$$\frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{d\psi \sin^n\psi}{(p+q\cos\psi)^{n+1}} \cdot \int_0^\infty \frac{z^{\frac{n}{2}} dz}{(1+z)^{n+1}} = \frac{\pi}{n2^n(p^2-q^2)^{\frac{n+1}{2}}}. \qquad (***)$$

Далее, согласно [64a] имеем

$$\int_0^\infty \frac{z^{\frac{n}{2}} dz}{(1+z)^{n+1}} = \frac{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(n+1)} = \frac{\left[\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right]^2}{2\Gamma(n)}$$

[см. соотношение (*) в предыдущей сноске]. Подставляя это значение в формулу (***), мы и получаем (64). Наконец, подставляя в правую часть формулы (64) вместо $\Gamma(n)$ его значение

$$\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n} = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)2^{n-1}}{\sqrt{\pi}}$$

[см. формулы (*), (**) в предыдущей сноске], получим [63a].

К этому интегралу приходим, когда в уравнение (62) ставим*

$a = \frac{1}{2}(p - q)$, $b = \frac{1}{2}(p + q)$, $x = \frac{1}{2}\,\mathrm{tang}.\frac{1}{2}\,\psi$, $y = \mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\varphi$;

а к тому заметим, что

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}dx}{(1+x)^{n+m}} = \frac{\Gamma(m)\cdot\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}. \qquad [64a]$$

Если здесь один раз полагаем $x = \mathrm{tang}^2\varphi$, в другой $x = \mathrm{tang}^2\frac{1}{2}\psi$ и интегрируем между границами $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, $\psi = 0$, $\psi = \frac{1}{2}\pi$, то находим

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}dx}{(1+x)^{m+n}} = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2m-1}\varphi\cos^{2n-1}\varphi\,d\varphi =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\psi\left(\sin^{2m-1}\frac{1}{2}\psi\cos^{2n-1}\frac{1}{2}\psi + \sin^{2n-1}\frac{1}{2}\psi\cos^{2m-1}\frac{1}{2}\psi\right).$$

Отсюда нетрудно заключить, что

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi\,\sin^{m-1}\varphi = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}m\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)},$$

или

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi\,\sin^{m-1}\varphi = \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)^2}{\Gamma(m)}\cdot 2^{m-2}$$

и что, следовательно,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) = 2^{1-n}\sqrt{\pi}\,\Gamma(n).$$

---

* Эта замена указана ошибочно. См. предыдущую сноску.

В треугольнике, который до сих пор рассматривали*, ведем ось координат ξ перпендикулярно к a из острея угла C, называя η другую координату, перпендикулярную к ξ из угла A. Помощию уравнения (26) находим◇:

$$\frac{p-q\cos x'}{\sin x' \sin y'} = \frac{p-q\cos x'}{\sqrt{\sin^2 x' - \cos^2 \xi'}}.$$

К тому выражения (37), (50) для елемента дают

$$\frac{dx\,dy}{\sin y'} = \frac{\sin x' \sin \xi' \, dx'\, d\xi'}{(\sin^2 x' - \cos^2 \xi')^{\frac{3}{2}}}.$$

После чего интеграл (59) сделается △

$$\int_{\pi}^{0}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx'\,d\xi' \sin x' \sin \xi'}{(\sin^2 x' - \cos^2 \xi')^{\frac{3}{2}}} F'\left(\frac{p-q\cos x'}{\sqrt{\sin^2 x' - \cos^2 \xi'}}\right) =$$

$$= \frac{\pi F(\sqrt{p^2-q^2})}{\sqrt{p^2-q^2}},$$

---

* См. черт. 4в.

◇ $\sin x' \sin y' = \sqrt{\sin^2 x' (1-\cos^2 y')} = \sqrt{\sin^2 x' - \sin^2 x' \cos^2 y'} =$
$= \sqrt{\sin^2 x' - \cos^2 \xi'}$.

△ В этой формуле пределы интегрирования указаны неверно: из (34) следует, что $\cos^2 x' + \cos^2 \xi' < 1$, или $\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x'\right) < \sin^2 \xi'$, откуда $\left|\frac{\pi}{2} - x'\right| < \xi'$. Таким образом, область интегрирования является треугольником, определенным неравенствами $x' + \xi' > \frac{\pi}{2}$, $x' - \xi' < \frac{\pi}{2}$, $\xi' < \frac{\pi}{2}$. Если при этом интеграция ведется в направлении возрастания переменных x' и ξ', то перед левой частью следует поставить знак «минус». Неверно указаны пределы интегрирования и в формуле (65): интеграция должна производиться по полукругу

$$x^2 + y^2 < 1, \qquad x > 0.$$

а после того, как поставим сюда x, y вместо $\cos\xi'$, $\cos x'$,

$$-\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1}\frac{dx\,dy}{(1-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}}F'\left(\frac{p-qy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)=\frac{\pi F(\sqrt{p^2-q^2})}{\sqrt{p^2-q^2}}. \qquad (65)$$

Основываясь на уравнении (27), находим *

$$\frac{p-q\cos x'}{\sin x'\sin y'}=-q\cot\eta'+p\sqrt{1+\cot^2 y'+\cot^2\eta'}\;.$$

К тому выражения (37) и (51) дают

$$\frac{dx\,dy}{\sin y'}=\frac{dy\,d\eta}{\sqrt{1-\cos^2 y'\cos^2\eta'}}\,.$$

После чего интеграл (59) сделается ◇

$$-\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy\,d\eta}{\sqrt{1-\cos^2 y'\cos^2\eta'}}F'(-q\cot\eta'+p\sqrt{1+\cot^2 y'+\cot^2\eta'})=$$
$$=\frac{\pi F(\sqrt{p^2-q^2})}{\sqrt{p^2-q^2}},$$

а когда ставим x, y вместо $\cot y'$, $\cot\eta'$ △,

$$-\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx\,dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}F'(-qy+p\sqrt{1+x^2+y^2})=$$

---

* Согласно (27) имеем

$$\frac{1}{\sin x'\sin y'}=\sqrt{\frac{1}{\sin^2 y'}(1+\operatorname{ctg}^2 x')}=\sqrt{\frac{1}{\sin^2 y'}\left(1+\frac{\sin^2 y'}{\operatorname{tg}^2\eta'}\right)}=$$
$$=\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 y'+\operatorname{ctg}^2\eta'},\quad \frac{\cos x'}{\sin x'\sin y'}=\frac{1}{\operatorname{tg}x'\sin y'}=\operatorname{ctg}\eta'.$$

◇ В подлиннике в левых частях этой формулы и формул (65), (66) знак «минус» отсутствует.

△ Имеем:

$$\frac{dy\,d\eta}{\sqrt{1-\cos^2 y'\cos^2\eta'}}=\frac{dy\,d\eta}{\sin y'\sin\eta'\sqrt{\frac{1}{\sin^2 y'\sin^2\eta'}-\frac{\cos^2 y'\cos^2\eta'}{\sin^2 y'\sin^2\eta'}}}=$$

$$= \frac{\pi F(\sqrt{p^2 - q^2})}{\sqrt{p^2 - q^2}}. \qquad (66)$$

Ведем еще из начала координат линию под углом ω к оси x, увеличивая при том y*. Перпендикул из острея угла A на эту линию называем η, отрезок на ней к началу координат ξ. В двух прямоугольных треугольниках, которым b служит общей гипотенузой, находим ◊

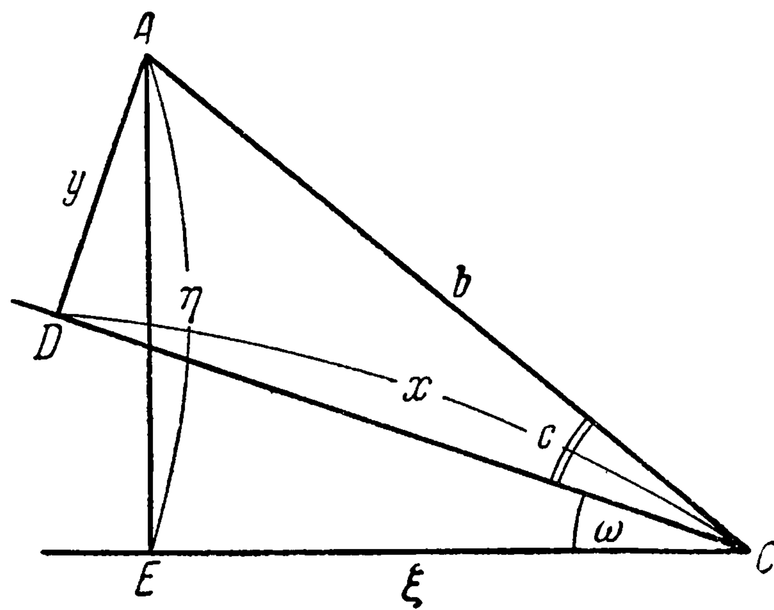
$$\operatorname{tang} \eta' \sin(C + \omega) = \operatorname{tang} b', \qquad \cos \xi' = \cos b' \cos(C + \omega),$$

$$\operatorname{tang} C = \cos y' \operatorname{tang} x', \qquad \sin b' = \sin x' \sin y'.$$

$$= \frac{\operatorname{ch} y \operatorname{ch} \eta \, dy \, d\eta}{\sqrt{(1 + \operatorname{ctg}^2 y')(1 + \operatorname{ctg}^2 \eta') - \operatorname{ctg}^2 y' \operatorname{ctg}^2 \eta'}} = \frac{d(\operatorname{sh} y)\, d(\operatorname{sh} \eta)}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 y' + \operatorname{ctg}^2 \eta'}} =$$

$$= \frac{d(\operatorname{ctg} y')\, d(\operatorname{ctg} \eta')}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 y' + \operatorname{ctg}^2 \eta'}}.$$

* См. чер. 4г. Как видно из этого чертежа, проводимое преобразование представляет собой поворот координатных осей на угол ω.



Чер. 4г

◊ См. формулы (3), (4), (5), (1). Впрочем, вместо применения двух последних из приведенных формул удобнее воспользоваться выкладками, проведенными в следующей сноске.

Исключая отсюда углы b', C, получим*

$$\left.\begin{aligned} \cos\xi' &= \cos x'\cos\omega - \sin x'\cos y'\sin\omega,\\ \cot\eta' &= \cot y'\cos\omega + \frac{\cot x'}{\sin y'}\sin\omega \end{aligned}\right\} \tag{67}$$

— два уравнения для перемены двух перпендикулярных коордонат ξ, η на другие x, y, также перпендикулярные. Итак, полагая◇

$$p + q\cos\omega = 4a,$$
$$p - q\cos\omega = 4b,$$
$$q\sin\omega = 4c,$$

находим △

$$\frac{p - q\cos\xi'}{\sin\xi'\sin\eta'} = (ae^x + be^{-x})(e^y + e^{-y}) + 2c(e^y - e^{-y}).$$

---

* Согласно (4), [3a] имеем

$$\cos b'\cos C = \cos x', \quad \cos b'\sin C = \sin x'\cos y',$$

откуда получаем первую из формул (67):

$$\cos\xi' = \cos b'\cos(C+\omega) = \cos b'\cos C\cos\omega - \cos b'\sin C\sin\omega = $$
$$= \cos x'\cos\omega - \sin x'\cos y'\sin\omega.$$

Далее, согласно (3), (4), (1) имеем

$$\frac{\sin C}{\operatorname{tg} b'} = \operatorname{ctg} y', \quad \frac{\cos C}{\operatorname{tg} b'} = \cos C\cos b'\cdot\frac{1}{\sin b'} = \cos x'\cdot\frac{1}{\sin x'\sin y'} = \frac{\operatorname{ctg} x'}{\sin y'},$$

что дает вторую из формул (67)

$$\operatorname{ctg}\eta' = \frac{\sin(C+\omega)}{\operatorname{tg} b'} = \frac{\sin C\cos\omega}{\operatorname{tg} b'} + \frac{\cos C\sin\omega}{\operatorname{tg} b'} = \operatorname{ctg} y'\cos\omega +$$
$$+ \frac{\operatorname{ctg} x'}{\sin y'}\sin\omega.$$

◇ Для вывода формулы (68) следует произвести несколько иную замену:

$$p - q\cos\omega = 4a, \quad p + q\cos\omega = 4b, \quad q\sin\omega = 4c.$$

△ Используя соотношение $\sin\xi'\sin\eta' = \sin x'\sin y'$ $(= \sin b')$ и подставляя значения a, b, c по формулам предыдущей сноски, имеем

$$\frac{p - q\cos\xi'}{\sin\xi'\sin\eta'} = \frac{p - q\cos\omega\cos x' + q\sin\omega\sin x'\cos y'}{\sin x'\sin y'} =$$

К тому должно быть

$$\frac{dx\,dy}{\sin y'} = \frac{d\xi\,d\eta}{\sin \eta'}.$$

Между тем значение интеграла (59), распространенного на всю бесконечную плоскость, дает

$$-\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi\,d\eta}{\sin \eta'} F'\left(\frac{p - q\cos\xi'}{\sin\xi'\sin\eta'}\right) = \frac{2\pi F\left(\sqrt{p^2 - q^2}\right)}{\sqrt{p^2 - q^2}}.$$

После чего*

$$-\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx\,dy\,(e^y + e^{-y})F'\,\{(ae^x + be^{-x})(e^y + e^{-y}) +$$

$$+ 2c\,(e^y - e^{-y})\} = \frac{\pi F\left(4\sqrt{ab - c^2}\right)}{\sqrt{ab - c^2}}\,^{\diamond}, \qquad (68)$$

где a, b, c — произвольные числа, ограниченные только условием

$$ab - c^2 > 0.$$

Все такие двойные интегралы переходят еще в другие, когда здесь линии умножаем на $\sqrt{-1}$, а интегрирование распространяем на половину или на всю поверхность шара, основываясь на том, как замечено было выше, что в этом случае прямолинейный треугольник переходит в сферический, а бесконечная плоскость обращается в поверхность шара. Условие $F(\infty) = 0$ для функции $F(\lambda)$ от λ теперь будет уже $F(-\lambda) = 0$, а потому для всякого числа λ вместо $F(\lambda)$ должно везде писать $F(\lambda) - F(-\lambda)$. Следуя этому правилу, легко переходим от интеграла (68) к тому, который Г. Пуассон употребил для интегрирования линейных уравнений с частными дифференциалами (Sur l'integ. de qnelques équations linéaires etc. Mémoires de l'Acad. roy. d. sciences de l'Institut

---

$= p\,\mathrm{ch}\,x\,\mathrm{ch}\,y - q\cos\omega\,\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}\,y + q\sin\omega\,\mathrm{sh}\,y = [(a + b)\,\mathrm{ch}\,x - (b - a)\,\mathrm{sh}\,x]2\mathrm{ch}\,y + 4c\,\mathrm{sh}\,y = (ae^x + be^{-x})(e^y + e^{-y}) + 2c\,(e^y - e^{-y}).$

* $16(ab - c^2) = (p - q\cos\omega)(p + q\cos\omega) - q^2\sin^2\omega = p^2 - q^2\cos^2\omega - q^2\sin^2\omega = p^2 - q^2.$

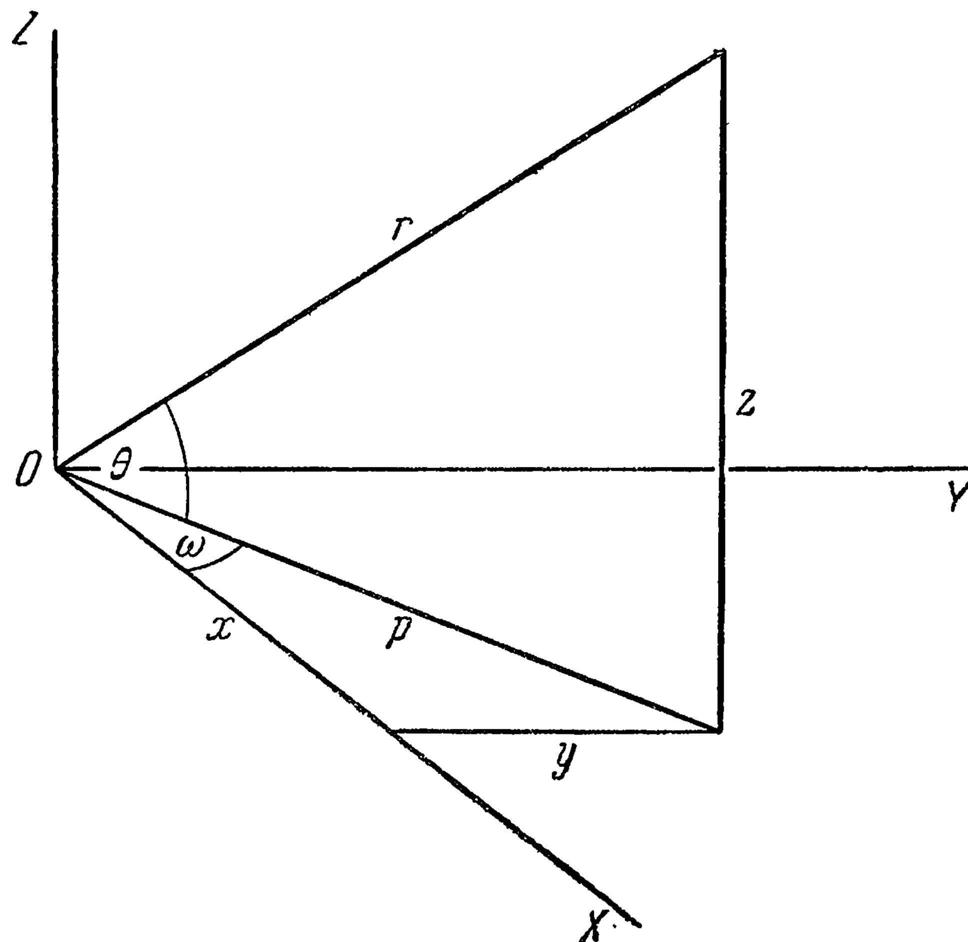
◇ В оригинале знак «минус» перед левой частью отсутствует.

de France, année 1818. T. III, p. 128) [82]. Можно, следовательно, предвидеть, что интегралы (59), (65), (66), (68) должны служить к достижению той же цели. Такое применение составляет уже само по себе столь обширный предмет, что здесь не место было бы вдаваться в подобные исследования. Обратимся к Воображаемой Геометрии.

Положение точки в пространстве определяем тремя коордонатами x, y, z, одна к другой по порядку перпендикулярными *, и таким образом, чтобы y, z заключались в плоскости, перпендикулярной к линии x, которая выходит из начала коордонат [83]. Объем тела P разделится на елементы тремя рядами плоскостей, перпендикулярных к x и $x+dx$, к y и $y+dy$, к z и $z+dz$. Первые четыре плоскости вырезывают

---

* Т. е. $x \perp y$, $y \perp z$ (черт. 4д). Иначе говоря, из взятой точки нужно опустить перпендикуляр z на плоскость XY, а из основания этого перпендикуляра — перпендикуляр y на прямую OX (в плоскости XY). Тогда согласно предложению 13 на стр. 18 плоскость отрезков y, z перпендикулярна прямой OX.



Черт. 4д

в теле призму*, которой основание на плоскости, проведенной чрез x, y, будет прямоугольник с боками

$$dy, \frac{dx}{\sin y'},$$

как мы видели выше [урав. (37)]. Таким же образом основание призмы на плоскости, перпендикулярной к ее расстоянию z, будет прямоугольник с боками

$$\frac{dy}{\sin z'}, \frac{dx}{\sin y' \sin z'},$$

которых произведение на dz дает величину елемента

$$d^3P = \frac{dx\, dy\, dz}{\sin y' \sin^2 z'}. \tag{69}$$

Интегрируя в отношении к y от $y = 0$, получим ◇

$$d^2P = \frac{dx\, dz}{\sin^2 z'} \cot y'$$

или, иначе,

$$d^2P = \frac{dx'\, dz'}{\sin x' \sin^3 z'} \cot y'.$$

Для шара, которого r полупоперечник,

$$\sin r' = \sin x' \sin y' \sin z' \;△.$$

---

* Черт. 4ж.

◇ $d^2P = \int_0^y d^3P = \int_0^y \frac{dx\, dy\, dz}{\sin y' \sin^2 z'} = \int_0^y \frac{dx\, dz}{\sin^2 z'} \operatorname{ch} y\, dy = \frac{dx\, dz}{\sin^2 z'} \operatorname{sh} y = \frac{dx dz}{\sin^2 z'} \operatorname{ctg} y'$

(ср. сноску ◇ на стр. 333).

△ Из точки C, лежащей на поверхности шара, опустим перпендикуляр $CB = z$ на плоскость XY, а из основания — перпендикуляр $BA = y$ на ось OX (чер. 4е). Тогда плоскость отрезков y, z перпендикулярна оси OX (сноска * на стр. 355), т. е. $CA \perp OX$. Таким образом, треуголь-

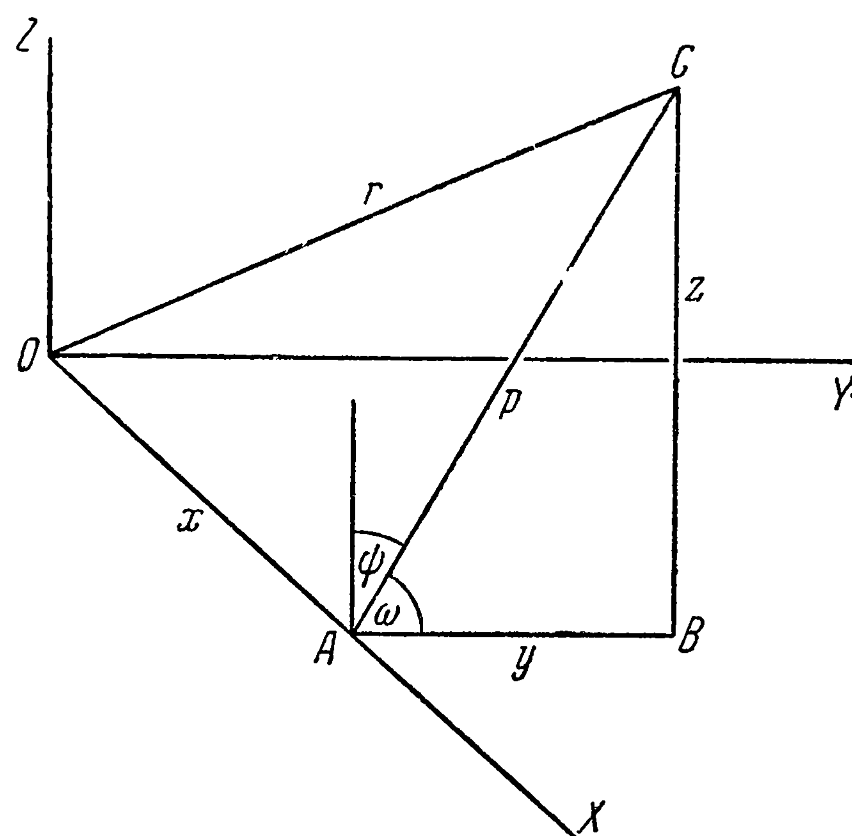
После чего *

$$d^2P = \frac{dx'\,dz'}{\sin^2 z'}\sqrt{\frac{1}{\sin^2 r'} - \frac{1}{\sin^2 x' \sin^2 z'}}\,.$$

Принимая x' постоянным и полагая ◇

$$\cos\psi = \frac{\cot z' \sin r'}{\sqrt{\sin^2 x' - \sin^2 r'}}\,,$$

ники CBA и CAO — прямоугольные. Из рассмотрения этих треугольников имеем (обозначая $AC = p$, $OC = r$)



Черт. 4е

$$\sin p' = \sin y' \sin z', \quad \sin r' = \sin x' \sin p' = \sin x' \sin y' \sin z'.$$

* $$d^2P = \frac{dx'dz'}{\sin x' \sin^3 z'}\operatorname{ctg} y' = \frac{dx'dz'}{\sin^2 z'}\cdot\frac{\cos y'\cdot}{\sin x' \sin y' \sin z'} =$$

$$= \frac{dx'dz'}{\sin^2 z'}\sqrt{\frac{1-\sin^2 y'}{\sin^2 x' \sin^2 y' \sin^2 z'}} = \frac{dx'dz'}{\sin^2 z'}\sqrt{\frac{1}{\sin^2 r'} - \frac{1}{\sin^2 x' \sin^2 z'}}\,.$$

Однако для интегрирования это преобразование излишне (см. сноску * на стр. 358).

◇ Проведем через точку A перпендикуляр к плоскости XY (черт. 4е); тогда ψ есть угол между этим перпендикуляром и прямой AC, т. е. $\psi = \frac{\pi}{2} - \omega$, где $\omega = \angle CAB$. Действительно, из прямоугольного треугольника AOC имеем

$$\operatorname{ctg}^2 p' = \frac{1}{\sin^2 p'} - 1 = \frac{\sin^2 x'}{\sin^2 r'} - 1 = \frac{\sin^2 x' - \sin^2 r'}{\sin^2 r'}\,, \qquad (*)$$

потом, интегрируя от $\psi = 0$ или $\sin r' = \sin x' \sin z'$, находим *

$$dP = -\frac{dx' \sin x'}{4 \sin^4 r'}\left(1 - \frac{\sin^2 r'}{\sin^2 x'}\right)(2\psi - \sin 2\psi),$$

а распространяя значение интеграла до $\psi = \frac{1}{2}\pi$ или $z = 0$,

$$dP = -\frac{\pi dx' \sin x'}{4 \sin^4 r'}\left(1 - \frac{\sin^2 r'}{\sin^2 x'}\right).$$

откуда

$$\operatorname{tg} p' = \frac{\sin r'}{\sqrt{\sin^2 x' - \sin^2 r'}};$$

далее, из прямоугольного треугольника ABC имеем [см. (3)] $\sin \omega = \operatorname{tg} p' \operatorname{ctg} z'$ или

$$\cos\psi = \sin\omega = \operatorname{tg} p' \operatorname{ctg} z' = \frac{\operatorname{ctg} z' \sin r'}{\sqrt{\sin^2 x' - \sin^2 r'}}.$$

Таким образом, угол ψ, отмеченный на черт. 4е, определяется формулой, приведенной в тексте Лобачевского.

* Вводя переменное ψ, преобразуем выражение для d^2P. Для этого продифференцируем при постоянном x (и, значит, постоянном p) соотношение $\operatorname{ctg} z' = \operatorname{ctg} p' \cos\psi$ (см. предыдущую сноску). Мы получим

$$\frac{dz'}{\sin^2 z'} = \operatorname{ctg} p' \sin\psi\, d\psi$$

и потому

$$d^2P = \frac{dx' dz'}{\sin x' \sin^3 z'} \operatorname{ctg} y' = \frac{dx' d\psi}{\sin x' \sin z'} \operatorname{ctg} y' \operatorname{ctg} p' \sin\psi =$$

$$= \frac{dx' d\psi}{\sin x'} \operatorname{ctg} p' \cdot \frac{\cos y' \sin\psi}{\sin p'} = \frac{dx'\, d\psi}{\sin x'} \operatorname{ctg}^2 p' \sin^2\psi =$$

$$= \frac{\operatorname{ctg}^2 p'}{\sin x'} dx' d\left(\frac{\psi}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\psi\right).$$

Таким образом, учитывая соотношение (*) предыдущей сноски,

$$d^2P = \frac{dx'}{\sin x'}\left(\frac{\sin^2 x' - \sin^2 r'}{\sin^2 r'}\right) d\left(\frac{\psi}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\psi\right) =$$

$$= \frac{dx' \sin x'}{4 \sin^2 r'}\left(1 - \frac{\sin^2 r'}{\sin^2 x'}\right) d(2\psi - \sin 2\psi).$$

Интегрирование этого выражения от ψ до 0 (при увеличении z угол ψ уменьшается) дает приводимое Лобачевским значение dP.

Наконец, отсюда *

$$P = \frac{\pi}{4\sin^2 r'}\left(\cos x' - \sin^2 r' \log\cot\frac{1}{2}x'\right)$$

— объем вырезка из шара, ограниченного сферой, тремя перпендикулярными друг к другу плоскостями в центре и четвертой плоскостию, перпендикулярной к линии пересечения двух первых на расстоянии x от центра. Умножая на 8 и полагая $x = r$, получим объем шара

$$P = \frac{1}{2}\pi\left(e^{2r} - e^{-2r} - 4r\right). \tag{70}$$

Разложение в строку до r^3 дает

$$P = \frac{4}{3}\pi r^3,$$

---

* Выражение для dP, полученное Лобачевским, можно представить в виде

$$dP = -\frac{\pi dx' \sin x'}{4\sin^2 r'}\left(1 - \frac{\sin^2 r'}{\sin^2 x'}\right) = -\frac{\pi \sin x'}{4\sin^2 r'}dx' - \frac{\pi}{4}dx,$$

откуда (интегрируя от нуля до x) получим

$$P = \frac{\pi\cos x'}{4\sin^2 r'} - \frac{\pi}{4}x.$$

Это совпадает с выражением, приведенным Лобачевским, так как в силу основного соотношения $\operatorname{ctg}\frac{1}{2}x' = e^x$ имеем $\ln\operatorname{ctg}\frac{1}{2}x' = x$. При $x = r$ получаем объем одного октанта:

$$P = \frac{\pi\cos r'}{4\sin^2 r'} - \frac{\pi r}{4} = \frac{\pi}{4}(\operatorname{th} r \operatorname{ch}^2 r - r) = \frac{\pi}{4}(\operatorname{sh} r \operatorname{ch} r - r) =$$

$$= \frac{\pi}{16}\left(e^{2r} - e^{-2r} - 4r\right).$$

Умножив на 8, найдем объем всего шара.

как это принято в употребительной Геометрии. Дифференцируя выражение (70) в отношении к r, находим поверхность шара

$$\left(\frac{dP}{dr}\right) = \pi(e^r - e^{-r})^2. \tag{71}$$

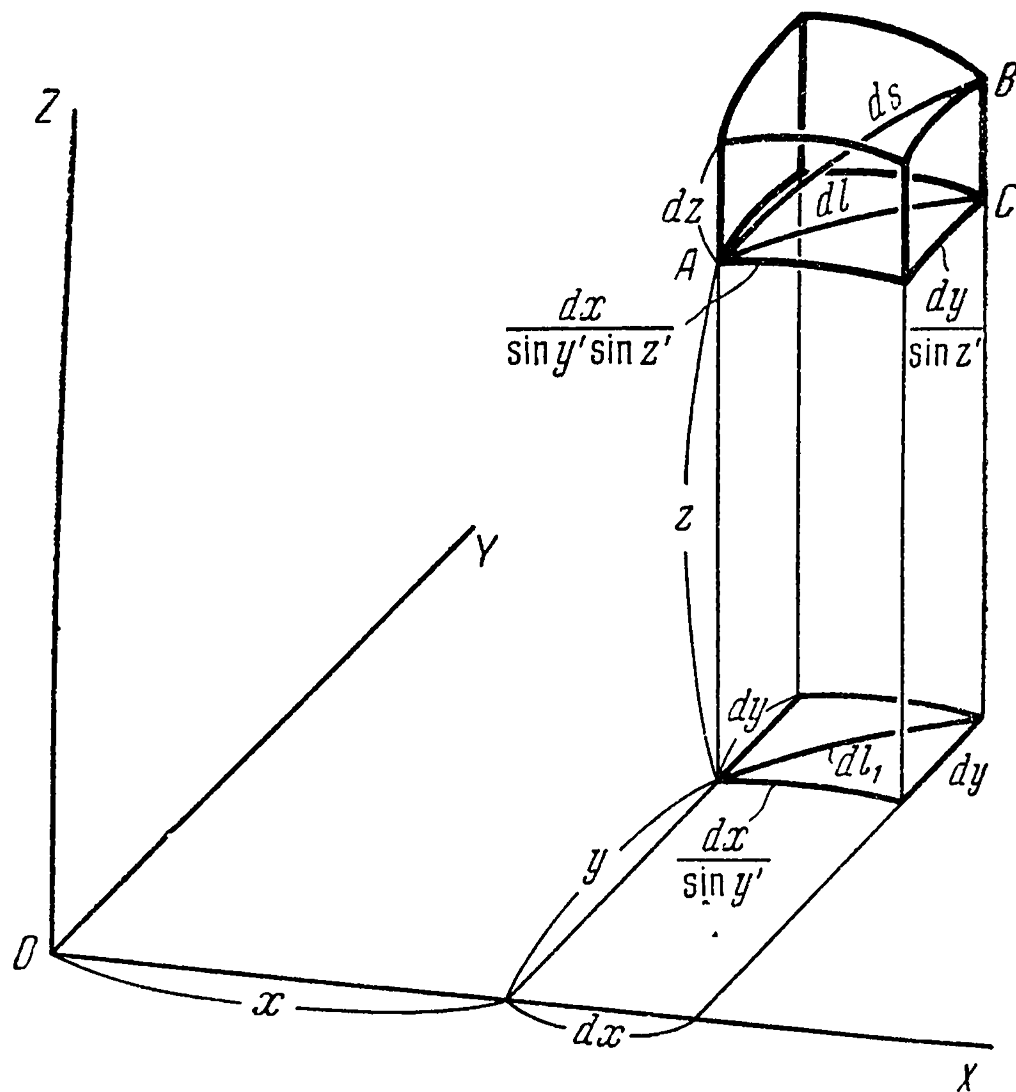
То же бы самое нашли, полагая елемент всякой поверхности

$$d^2S = \frac{dx\,dy}{\sin z'}\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2 y'}\left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2 y' \sin^2 z'}}\,{}^{*}, \tag{72}$$

к которому выражению легко прийти, следуя всегда обыкновенному способу в вычислении бесконечно малых линий и площадей, как это подробно изложено в моем сочинении *о началах Геометрии*◇.

* Здесь и на стр. 361—363 подразумевается, что все рассматриваемые производные — частные.

◇ Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. I, Гостехиздат, 1946, стр. 227—228. Формулу (72) легко также получить следующим путем. Пусть A и B — две близкие точки кривой линии в пространстве (черт. 4ж). Проведем через точку A плоскость $z = \text{const}$ и пусть C —



Черт. 4ж

Если ось x принимаем за ось обращения, гипотенузу в прямоугольном треугольнике из y, z называем p, против z угол ω, то *

$$\sin y' \sin z' = \sin p',$$

$$\operatorname{tang} p' = \operatorname{tang} z' \sin \omega,$$

$$\cos p' \cos \omega = \cos y'.$$

Отсюда ◇

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{\cos p'}{\cos z'} \left(\frac{dp}{dx}\right), \quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = -\frac{\cos y'}{\cos z'},$$

проекция точки B на эту плоскость. Тогда, считая треугольник ABC бесконечно малым, легко найдем (см. черт. 4ж)

$$ds^2 = dl^2 + dz^2 = \frac{dx^2}{\sin^2 y' \sin^2 z'} + \frac{dy^2}{\sin^2 z'} + dz^2.$$

Таково выражение линейного элемента в пространстве Лобачевского. Если теперь в пространстве расположена поверхность $z = z(x, y)$, то линейный элемент этой поверхности принимает вид

$$ds^2 = \frac{dx^2}{\sin^2 y' \sin^2 z'} + \frac{dy^2}{\sin^2 z'} + \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right)^2 =$$

$$= \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2 y' \sin^2 z'}\right] dx^2 + 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} dx\, dy + \left[\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2 z'}\right] dy^2.$$

Отсюда сразу следует, что элемент поверхности

$$d^2S = \sqrt{EG - F^2}\, dx\, dy$$

приводится к виду (72).

* Черт. 4е. Для вывода указываемых Лобачевским соотношений нужно применить к прямоугольному треугольнику ABC формулы (1), (3), (4).

◇ Применяя к треугольнику ABC формулу (***), приведенную в сноске△ на стр. 318—319, получим:

$$\cos y'\, dy + \cos z'\, dz = \cos p'\, dp.$$

Отсюда и получаются приводимые Лобачевским формулы (величина p для поверхности, имеющей OX осью вращения, не зависит от y).

а выражение елемента (72) для поверхности обращения сделается

$$d^2S = \frac{dx\,dy\cos p'}{\sin z'\cos z'}\sqrt{\left(\frac{dp}{dx}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2 p'}}^{*}. \qquad [72а]$$

Так как здесь y с ω изменяются, когда x и p остаются постоянными, то

$$dy\sin^2 y' = -d\omega\cos p'\sin\omega\ ^{\diamond}$$

и, следовательно,

$$d^2S = dx\,d\omega\cot p'\sqrt{\left(\frac{dp}{dx}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2 p'}}. \qquad [72б]$$

Интегрируя от $\omega = 0$ до $\omega = 2\pi$, получим

$$dS = 2\pi\,dx\cot p'\sqrt{\left(\frac{dp}{dx}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2 p'}}. \qquad (73)$$

---

* Это выражение легко получается из (72), если подставить найденные значения производных $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, а также заменить $\sin y'$ и $\cos y'$ по формулам

$$\sin^2 y' = \frac{\sin^2 p'}{\sin^2 z'},\quad \cos^2 y' = 1 - \frac{\sin^2 p'}{\sin^2 z'}.$$

◇ Это соотношение получается при дифференцировании равенства $\cos y' = \cos p'\cos\omega$ (с учетом соотношения $dy' = -\sin y'\,dy$). Применяя соотношение [3а] к треугольнику ABC, получим

$$\sin\omega = \frac{\cos z'\sin y'}{\cos p'}$$

и потому

$$dy = -d\omega\frac{\cos p'}{\sin^2 y'}\cdot\sin\omega = -d\omega\frac{\cos p'}{\sin^2 y'}\cdot\frac{\cos z'\sin y'}{\cos p'} = -d\omega\frac{\cos z'}{\sin y'} =$$

$$= -d\omega\frac{\cos z'\sin z'}{\sin p'} = -d\omega\frac{\cos z'\sin z'}{\cos p'}\operatorname{ctg} p'. \qquad (*)$$

При подстановке этого выражения для dy в соотношение [72а] получаем [72б] (знак «минус» можно отбросить, так как площадь поверхности определена только по абсолютной величине).

Для поверхности шара, которого r полупоперечник, а центр в начале координат x, должно полагать *

$$\sin x' \sin p' = \sin r', \ \left(\frac{dp}{dx}\right) = -\frac{\cos x'}{\cos p'}.$$

После чего ◇

$$dS = -\frac{2\pi \cos r'}{\sin^2 r'} \sin x'\, dx'.$$

Интегрируя от $x' = \frac{1}{2}\pi$ до $x' = r'$, находим, как и выше [выр. (71)],

$$S = 4\pi \cot^2 r'. \qquad (74)$$

Между тем выражение (73) для поверхности шара делается △

---

* Применяя к треугольнику OAC (черт. 4e) соотношение (***) сноски △ на стр. 318—319 и учитывая, что r постоянно, найдем $\cos x' dx + \cos p' dp = 0$, откуда получаем выражение для $\frac{\partial p}{\partial x}$.

◇ $$dS = -2\pi \frac{dx' \operatorname{ctg} p'}{\sin x'} \sqrt{\frac{\cos^2 x'}{\cos^2 p'} + \frac{1}{\sin^2 p'}} = -2\pi \frac{dx'}{\sin x' \sin^2 p'} \times$$

$$\times \sqrt{\cos^2 x' \sin^2 p' + \cos^2 p'} = -\frac{2\pi\, dx'}{\sin x' \sin^2 p'} \sqrt{(1-\sin^2 x')\sin^2 p' + \cos^2 p'} =$$

$$= -\frac{2\pi dx'}{\sin x' \sin^2 p'} \sqrt{1 - \sin^2 x' \sin^2 p'} = -\frac{2\pi dx' \cos r'}{\sin^2 x' \sin^2 p'} \sin x' =$$

$$= -\frac{2\pi dx' \cos r'}{\sin^2 r'} \sin x'.$$

△ Те же выкладки, которые были проведены в сноске ◇ на стр. 362, приводят выражение [72б] к виду (учитывая отброшенный знак «минус» и формулу (*) в сноске ◇ на стр. 362):

$$d^2 S = \frac{\cos r'}{\sin^2 r'} \sin x' dx' d\omega = -\frac{\cos r'}{\sin^2 r'} \sin x' \cdot \frac{\sin y'}{\cos z'} dx' dy =$$

$$= \frac{\cos r'}{\sin^2 r'} \cdot \frac{\sin x'}{\cos z'} dx' dy' = \frac{\cos r'}{\sin^2 r'} \cdot \frac{\sin^2 x' \sin y'\, dx'\, dy'}{\sin x' \sin y' \sqrt{1 - \sin^2 z'}} =$$

$$= \frac{\cos r'}{\sin^2 r'} \cdot \frac{\sin^2 x' \sin y'\, dx' dy'}{\sqrt{\sin^2 x' \sin^2 y' - \sin^2 r'}}.$$

$$d^2S = \frac{\cos r'}{\sin^2 r'} \cdot \frac{dx'dy' \sin^2 x' \sin y'}{\sqrt{\sin^2 x' \sin^2 y' - \sin^2 r'}} \qquad [74а]$$

и с положением

$$\cos\psi = \operatorname{tang} r' \cot y', \qquad \cos x' = \cos r' \sin\psi \sin\varphi \qquad [74б]$$

переменяется в *

$$d^2S = d\varphi\, d\psi \frac{\cos^2 r'}{\sin r'} \cdot \frac{\sin\psi \sqrt{1 - \cos^2 r' \sin^2\psi \sin^2\varphi}}{1 - \cos^2 r' \sin^2\psi}. \qquad [74в]$$

Умножая на 8 и интегрируя от $\psi = 0$ до $\psi = \frac{1}{2}\pi$, от $\varphi = 0$ до $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, сравнивая потом с значением [поверхности] сферы (74), заключаем, что

$$\frac{\pi}{2\sin r'} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\psi\, d\varphi \sin\psi \sqrt{1 - \cos^2 r' \sin^2\psi \sin^2\varphi}}{1 - \cos^2 r' \sin^2\psi}. \qquad (75)$$

Итак, если означаем еллиптическую функцию с постоянным углом α,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi \sqrt{1 - \sin^2\alpha \sin^2\varphi} = \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} E(\sin\alpha),$$

то ◊

$$\frac{1}{2}\pi \cot\alpha = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\psi\, E(\cos\alpha \sin\psi). \qquad (76)$$

Пусть

$$E(x) = A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + \ldots$$

---

* Вычисления, связанные с выводом формул [74в], (75), проведены в примечании [84].

◊ Подставляя в предыдущее соотношение $\cos\alpha \sin\psi$ вместо $\sin\alpha$ и интегрируя по ψ, находим

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\psi\, E(\cos\alpha \sin\psi) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\psi \cdot \frac{\cos\alpha \sin\psi}{1 - \cos^2\alpha \sin^2\psi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi \sqrt{1 - \cos^2\alpha \sin^2\psi \sin^2\varphi} =$$

$$= \frac{1}{2}\pi \operatorname{ctg}\alpha \quad [\text{см. } (75)].$$

Ставя сюда $x = \cos\alpha \sin\psi$, умножая на $d\psi$ и интегрируя от $\psi = 0$ до $\psi = \frac{1}{2}\pi$, получим*

$$\frac{1}{2}\pi \cot\alpha = A_1 \cos\alpha + \frac{2}{3} A_3 \cos^3\alpha + \frac{4\cdot 2}{5\cdot 3} A_5 \cos^5\alpha + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{2}\pi \left\{ \frac{1}{2} A_2 \cos^2\alpha + \frac{3\cdot 1}{4\cdot 2} A_4 \cos^4\alpha + \frac{5\cdot 3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2} A_6 \cos^6\alpha + \ldots \right\}.$$

Отсюда ◇

$$A_2 = 0, \qquad A_4 = 0, \qquad A_6 = 0, \ldots$$
$$A_1 = \frac{1}{2}\pi, \qquad A_3 = \frac{1}{2}\pi \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2, \qquad A_5 = \frac{1}{2}\pi \cdot 5 \cdot \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2, \ldots$$

После чего

$$E(x) = \frac{1}{2}\pi \left\{ x + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 x^3 + \right.$$
$$\left. + 5\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 x^5 + 7\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 x^7 + \ldots \right\}, \tag{77}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi \sqrt{1 - x^2 \sin^2\varphi} = \frac{1}{2}\pi \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 x^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 x^4 - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{5}\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 x^6 + \ldots \right\}^{\triangle}. \qquad [77a]$$

---

* Следует воспользоваться формулами

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 px\, dx = \frac{1\cdot 3\ldots\cdot 2p-1}{2\cdot 4\ldots\cdot 2p}\,\frac{\pi}{2}; \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p+1} x\, dx = \frac{2\cdot 4\ldots\cdot 2p}{1\cdot 3\ldots\cdot 2p+1}$$

(Э. Гурса, Курс математического анализа, т. I, ГТТИ, М., 1936, стр. 246).

◇ Мы имеем

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1 - \cos^2\alpha}} = \cos\alpha + \frac{1}{2}\cos^3\alpha + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cos^5\alpha + \ldots$$

Подставляя это разложение $\operatorname{ctg}\alpha$ в предыдущую формулу и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\cos\alpha$, находим все A_k, т. е. получаем разложение (77).

△ Это разложение получается из (77) умножением на $\frac{1-x^2}{x}$, так как

$$E(x) = \frac{x}{1-x^2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi \sqrt{1 - x^2 \sin^2\varphi}.$$

Умножая последнее уравнение на x^2 и складывая с предыдущим, получим известную строку *

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-x^2\sin^2\varphi}} = \frac{1}{2}\pi\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 x^2+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 x^4+\ldots\right\}. \qquad [77б]$$

Если означаем теперь

$$x\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-x^2\sin^2\varphi}} = H(x),$$

то уравнение (77) дает ◇

$$H(x) = \int_0 \frac{dx}{x} E(x).$$

После чего из уравнения (76) находим △

$$\frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}\pi-\alpha\right) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\psi\, H(\cos\alpha\sin\psi). \qquad (78)$$

---

* Обозначая интеграл в левой части [77а] через I, найдем

$$I - x\frac{dI}{dx} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-x^2\sin^2\varphi}{\sqrt{1-x^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2\sin^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-x^2\sin^2\varphi}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-x^2\sin^2\varphi}},$$

и согласно [77а] находим для этой функции разложение

$$\frac{1}{2}\pi\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2 x^2-\frac{1}{3}\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 x^4-\ldots\right]+\frac{1}{2}\pi\left[2\left(\frac{1}{2}\right)^2 x^2+\frac{4}{3}\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 x^4+\ldots\right]=$$

$$= \frac{1}{2}\pi\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 x^2+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 x^4+\ldots\right].$$

◇ Ибо из (77) и [77б] следует, что обе функции разлагаются в один и тот же ряд (верхний предел интеграла равен x).

△ Из предыдущей формулы получаем $H'(x) = \frac{E(x)}{x}$, после чего соотношение (76) может быть переписано в виде

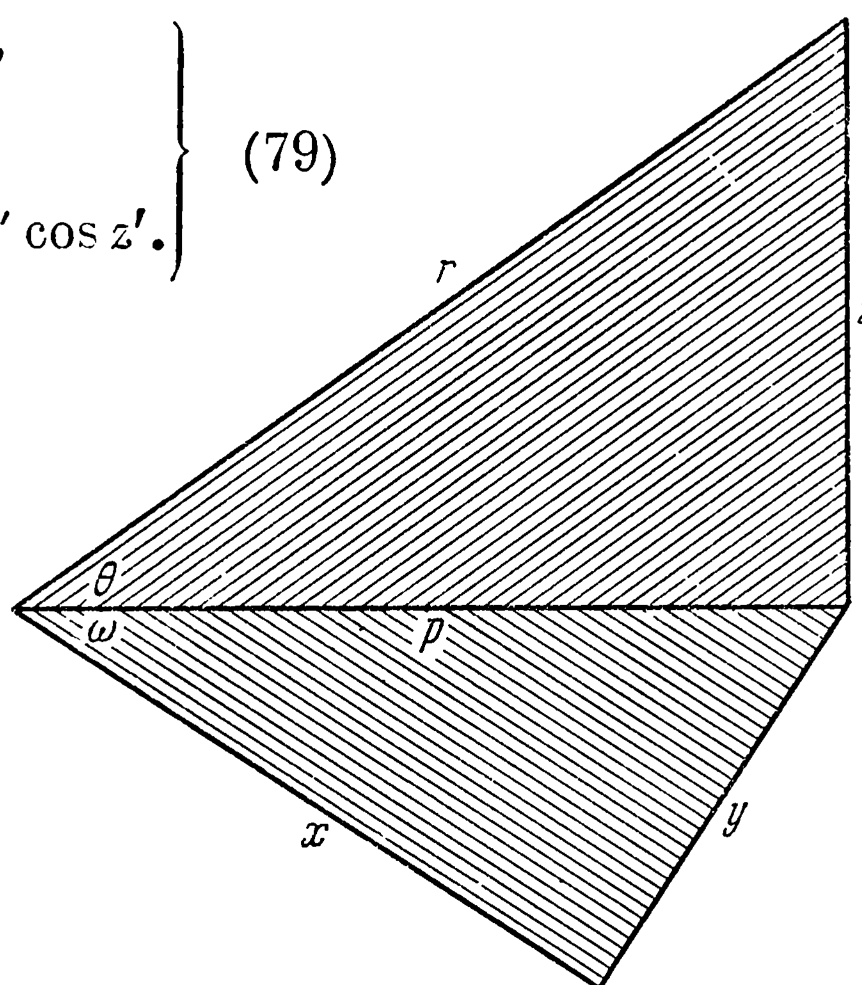
$$\frac{1}{2}\pi = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \operatorname{tg}\alpha\, E(\cos\alpha\sin\psi)\, d\psi = -\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{E(\cos\alpha\sin\psi)}{\cos\alpha\sin\psi}\cdot\frac{d(\cos\alpha\sin\psi)}{d\alpha}\, d\psi =$$

Если вместо прямых, друг другу перпендикулярных кордонат x, y, z хотим употребить полярные*: r расстояние до начала кордонат, θ угол линии r с ее проекцией p на плоскость кордонат x, y (чер. 5)◇, ω угол p с осью x. Основываясь на уравнениях (1), (5), пишем

$$\left.\begin{aligned} \sin r' &= \sin p' \sin z', & \sin p' &= \sin x' \sin y' \\ \operatorname{tang}\omega &= \cos y' \operatorname{tang} x', & \operatorname{tang}\theta &= \cos z' \operatorname{tang} p'. \end{aligned}\right\} \quad [78a]$$

Отсюда находим △:

$$\left.\begin{aligned} \sin r' &= \sin x' \sin y' \sin z', \\ \operatorname{tang}\omega &= \cos y' \operatorname{tang} x', \\ \sin\theta &= \frac{1}{\cos r'} \sin x' \sin y' \cos z'. \end{aligned}\right\} \quad (79)$$



Чер. 5

$$= -\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\,(H\,(\cos\alpha \sin\psi))}{d\alpha}\, d\psi.$$

Интегрируя это равенство по α в пределах от α до $\frac{1}{2}\pi$, получим (78).

* Сферические.

◇ Черт. 5. Лобачевского представляет собою развертку обоих треугольников (z, p, r) и (x, y, p) на одну плоскость (ср. черт. 4д).

△ Третье соотношение (79) легче всего получается из формулы [3а]

$$\sin\theta = \frac{\cos z' \sin p'}{\cos r'} = \frac{\cos z' \sin x' \sin y'}{\cos r'}.$$

Обратно *

$$\left.\begin{aligned} \cos x' &= \cos r' \cos \omega \cos \theta, \\ \cot y' &= \frac{\cos r' \sin \omega \cos \theta}{\sqrt{1 - \cos^2 r' \cos^2 \theta}}, \\ \cot z' &= \cot r' \sin \theta. \end{aligned}\right\} \qquad (80)$$

Елемент объема в теле можно, следовательно, выразить в полярных координатах r, θ, ω, следуя обыкновенному способу и основываясь на уравнениях (79) или (80); но я по краткости предпочитаю здесь Геометрическое построение и в намерении показать верность такого рода представлений.

Изменениям углов θ, ω отвечают на расстоянии r изменения дуг [выраж. (49)] ◊

$$d\theta \cot r', \qquad d\omega \cot p'.$$

Второе из этих приращений, будучи разделено на $\sin z'$ [ур. (31)], дает дугу, которую описывает r с изменением $d\omega$ в угле ω. Умножая на dr произведение двух дуг, описанных концом r, получим елемент объема P в теле.

$$d^3P = dr\, d\omega\, d\theta \cot r' \frac{\cot p'}{\sin z'}.$$

---

* Из соотношения (4) получаем

$$\cos x' = \cos p' \cos \omega, \qquad \cos p' = \cos r' \cos \theta,$$

откуда имеем первую формулу (80). Далее, согласно [6a] имеем

$$\operatorname{ctg} y' = \frac{\sin \omega}{\operatorname{tg} p'} = \frac{\sin \omega \cos p'}{\sqrt{1 - \cos^2 p'}} = \frac{\sin \omega \cos r' \cos \theta}{\sqrt{1 - \cos^2 r' \cos^2 \theta}}.$$

Третья формула (80) вытекает из [6a].

◊ Величины $d\theta \operatorname{ctg} r'$, $d\omega \operatorname{ctg} p'$ представляют собой элементы дуг окружностей AZ, BD (чер. 5a), а согласно (31) величина $\frac{d\omega \operatorname{ctg} p'}{\sin z'}$ есть элемент дуги окружности AC. Так как эти дуги AZ, AC перпендикулярны между собой и к радиусу OA, то элемент объема в сферических координатах имеет вид

$$d^3P = d\theta \operatorname{ctg} r' \cdot \frac{d\omega \operatorname{ctg} p'}{\sin z'} \cdot dr.$$

В треугольнике, которого p, z катеты, r гипотенуза, находим [ур. (3), (5)]

$$\tang r' = \tang z' \sin\theta,$$
$$\tang\theta = \cos z' \tang p'.$$

После чего*

$$d^3P = \frac{1}{4}\, dr d\omega\, d\theta \cos\theta (e^r - e^{-r})^2. \tag{81}$$

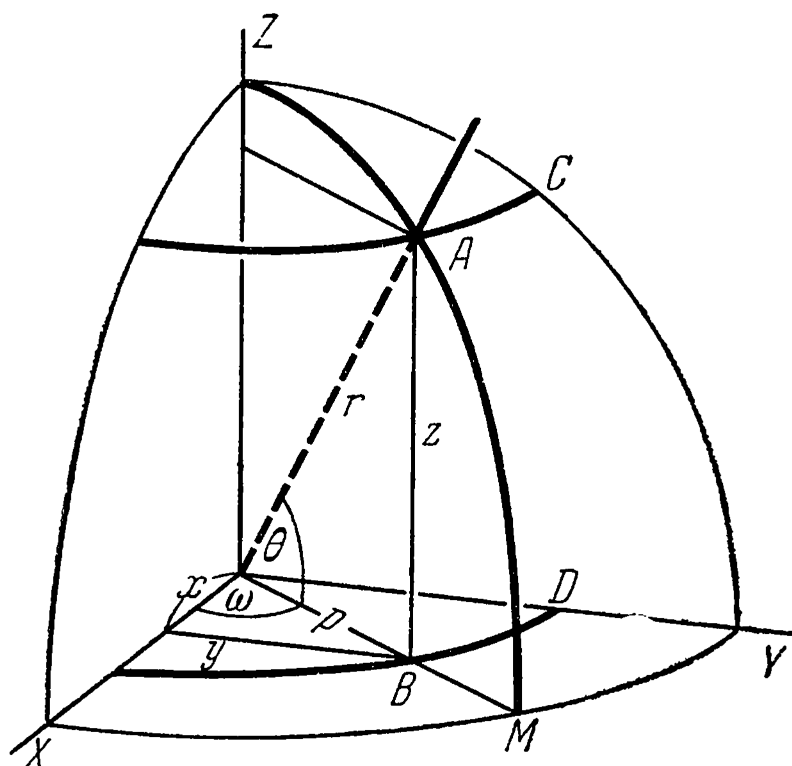
Когда r постоянное, то интегрирование от $\omega = 0$ до $\omega = 2\pi$, от $\theta = 0$ до $\theta = \pi$ ◇ дает снова выражение (70) △ для шара.

---

* Из предыдущих формул вытекает

$$\frac{\operatorname{ctg} r' \operatorname{ctg} p'}{\sin z'} = \frac{\operatorname{ctg} r'}{\cos z'}\cdot\frac{\operatorname{ctg} p'}{\operatorname{tg} z'} = \frac{\operatorname{ctg} r'}{\cos z'}\cdot\frac{\cos z' \operatorname{ctg}\theta}{\dfrac{\operatorname{tg} r'}{\sin\theta}} =$$

$$= \operatorname{ctg}^2 r' \cos\theta = \operatorname{sh}^2 r \cos\theta = \frac{1}{4}(e^r - e^{-r})^2 \cos\theta\cdot$$



Черт. 5а

◇ По θ следует интегрировать от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ (черт. 5а)

△ Должно стоять (71).

Вычисляем теперь объем конуса с плоским основанием. Называем h высоту (чер. 6*), от пяты которой ведем расстояние r до ребра c ◇, и пусть θ угол r с основанием, φ угол между h и c, ω угол проекции r на основание с линией здесь постоянной.

Чер. 6

Интегрируя выражение (81) для элемента от $r = 0$, находим △

$$2d^2P = \cos\theta\left\{\frac{\cos r'}{\sin^2 r'} - \log\cot\frac{1}{2}r'\right\}d\omega\, d\theta. \qquad (82)$$

* На черт. 6 дана развертка треугольника и сектора на одну плоскость. См. черт. 6а.

Черт. 6а

◇ Точнее — до некоторой (переменной) точки образующей.

$$\triangle\ 2d^2P = \cos\theta\, d\omega\, d\theta\int_0^r \frac{1}{2}(e^r - e^{-r})^2\, dr = \cos\theta\, d\omega\, d\theta\left(\frac{e^{2r} - e^{-2r}}{4} - r\right) =$$

$$= \cos\theta\,(\operatorname{sh} r \operatorname{ch} r - r)\, d\omega\, d\theta = \cos\theta\left(\frac{\cos r'}{\sin^2 r'} - \ln\operatorname{ctg}\frac{1}{2}r'\right)d\omega\, d\theta$$

(ср. сноску * на стр. 359).

В треугольнике*, которого h, r стороны, φ угол против r, $\frac{1}{2}\pi - \theta$ угол между h и r, третье из уравнений (13) дает

$$\cos r' = \frac{\cos h'}{\cot\varphi\cos\theta\sin h' + \sin\theta},$$

после чего ◇

$$2\left(\frac{d^2P}{d\omega\, d\theta}\right) = \frac{\cos h' \cos\theta(\cot\varphi\cos\theta\sin h' + \sin\theta)}{(\cot\varphi\cos\theta\sin h' + \sin\theta)^2 - \cos^2 h'} - $$

$$- \frac{1}{2}\cos\theta\log\left(\frac{\cot\varphi\cos\theta\sin h' + \sin\theta + \cos h'}{\cot\varphi\cos\theta\sin h' + \sin\theta - \cos h'}\right). \qquad [82a]$$

Умноживши на $d\theta$, интегрируем от $\theta = 0$.

$$2\left(\frac{dP}{d\omega}\right) = \int_0 \frac{\cos h' \sin h' \cot\varphi\, d\theta}{(\cot\varphi\cos\theta\sin h' + \sin\theta)^2 - \cos^2 h'} -$$

$$- \frac{1}{2}\sin\theta\log\left(\frac{\cot\varphi\cos\theta\sin h' + \sin\theta + \cos h'}{\cot\varphi\cos\theta\sin h' + \sin\theta - \cos h'}\right)^{\triangle}.$$

Полагаем здесь

$$\cot\varphi\sin h' = \cot\lambda$$

и распространяем интегрирование до $\theta = \frac{1}{2}\pi$.

$$2\left(\frac{dP}{d\omega}\right) = \sin h' \cos h' \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\theta \sin^2\lambda\cot\varphi}{\cos^2(\theta - \lambda) - \sin^2\lambda\cos^2 h'} - \frac{1}{2}\log\left(\frac{1 + \cos h'}{1 - \cos h'}\right) =$$

$$= -h + \frac{\cos\lambda}{2\sqrt{1 - \cos^2 h' \sin^2\lambda}}\log\left\{\frac{\cos\lambda + \cos h'\sqrt{1 - \sin^2\lambda\cos^2 h'}}{\cos\lambda - \cos h'\sqrt{1 - \sin^2\lambda\cos^2 h'}}\right\}^{\circ}.$$

---

* Дальнейшие вычисления на этой и следующей страницах связаны с выводом формулы (84); более простой вывод этой формулы указан в примечании [85].

◇ Выражение, стоящее в [82a] под знаком логарифма, получается из формулы

$$\operatorname{ctg}\frac{1}{2}r' = \frac{\cos\frac{1}{2}r'}{\sin\frac{1}{2}r'} = \sqrt{\frac{1 + \cos r'}{1 - \cos r'}}.$$

△ Правильность этой формулы устанавливается непосредственным дифференцированием.

○ Согласно формулам сноски △ на стр. 317 имеем

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1 + \cos h'}{1 - \cos h'} = \frac{1}{2}\ln\frac{1 + \operatorname{th} h}{1 - \operatorname{th} h} = \frac{1}{2}\ln e^{2h} = h; \qquad (*)$$

Вводим снова угол φ *.

$$2\left(\frac{dP}{d\omega}\right) = \frac{1}{2}\cos\varphi \log\left(\frac{\cos\varphi + \cos h'}{\cos\varphi - \cos h'}\right) - h.$$

Уравнение (4) для треугольника, которого h, c бока и φ угол между ними, дает

$$\cos h' = \cos c' \cos\varphi; \qquad (83)$$

следовательно ◇,

$$2\left(\frac{dP}{d\omega}\right) = c\cos\varphi - h. \qquad (84)$$

Если основание конуса круг, то c, φ и h постоянные. В таком случае объем конуса

$$P = \pi(c\cos\varphi - h)\ [^{85}].$$

Ставим сюда значение h из уравнения (83)

$$P = \pi\left\{c\cos\varphi - \frac{1}{2}\log\frac{1+\cos\varphi\cos c'}{1-\cos\varphi\cos c'}\right\}.$$

Иначе

$$P = \pi\left\{c\cos\varphi - \frac{1}{2}\log\frac{1+\cos^2\frac{1}{2}\varphi(e^{2c}-1)}{1+\sin^2\frac{1}{2}\varphi(e^{2c}-1)}\right\}.$$

Разлагая в строку и продолжая до члена с c^3, находим

$$P = \frac{1}{3}\pi c^3 \sin^2\varphi\cos\varphi,$$

как и в обыкновенной Геометрии.

Впрочем, какое основание конуса ни будет, уравнение (84) всегда дает объем

$$P = \frac{1}{2}\int(c\cos\varphi - h)\,d\omega, \qquad (85)$$

где c ребро, h высота конуса, φ угол между c и h, ω угол, который описывает плоскость, проходя чрез h.

Берем снова уравнение (82), которому можно дать такой вид:

$$2\left(\frac{d^2P}{d\omega\,d\theta}\right) = \cos\theta\left\{\frac{\cos r'}{\sin^2 r'} - r\right\}. \qquad [85a]$$

далее, стоящий в этой формуле интеграл вычисляется по известной формуле интегрального исчисления

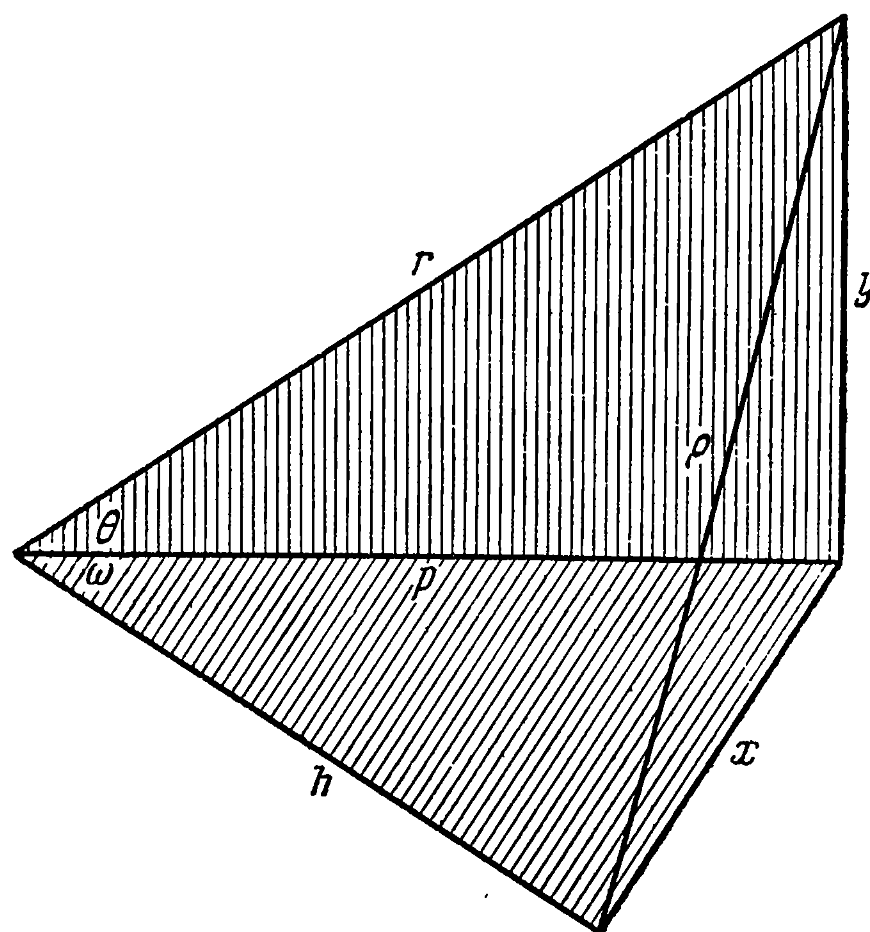
$$\int\frac{dx}{\cos^2 x - a} = \frac{1}{2\sqrt{a(1-a)}}\ln\frac{\sqrt{1-a}\cos x + \sqrt{a}\sin x}{\sqrt{1-a}\cos x - \sqrt{a}\sin x}.$$

* Имеем

$$\frac{\cos\lambda}{\sqrt{1-\cos^2 h'\sin^2\lambda}} = \frac{\operatorname{ctg}\lambda}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2\lambda + 1 - \cos^2 h'}} = \frac{\operatorname{ctg}\varphi\sin h'}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2\varphi\sin^2 h' + \sin^2 h'}} = \cos\varphi.$$

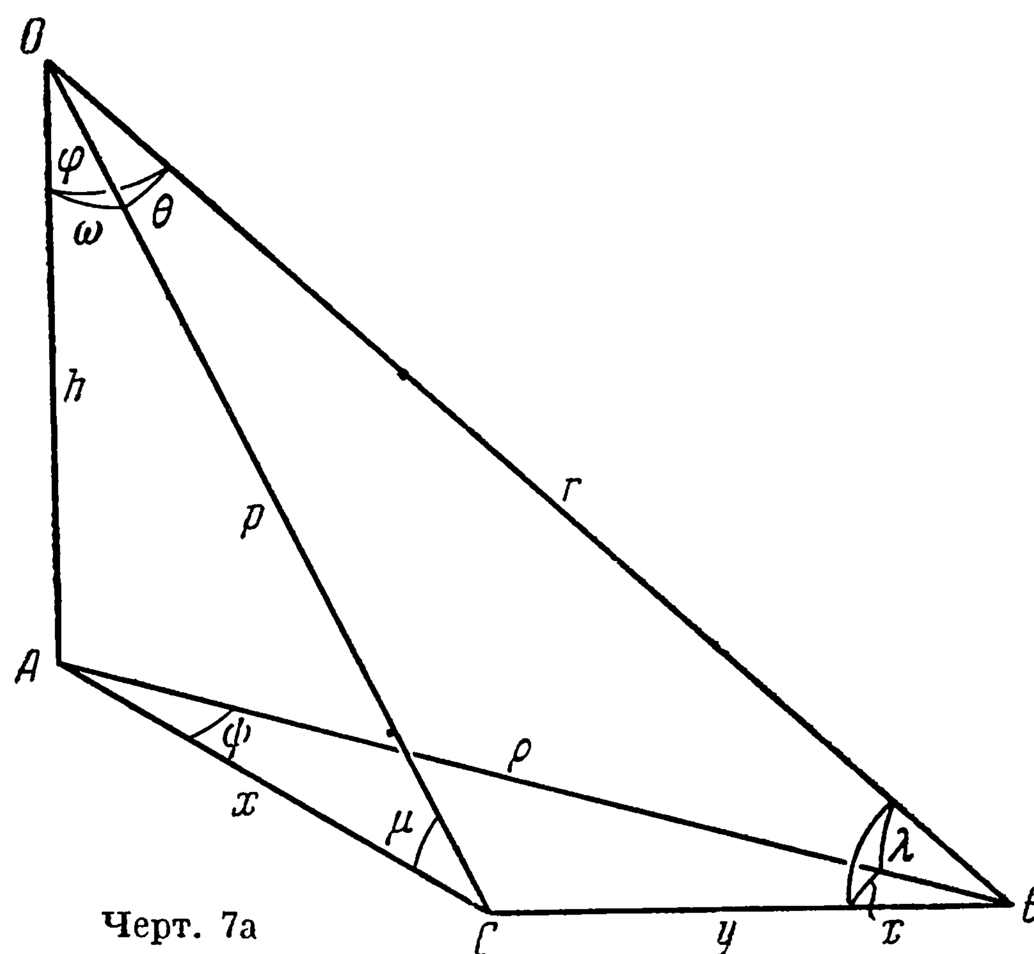
◇ См. выкладку (*) в сноске ° на предыдущей странице.

Считаем в этот раз линию r от вершины конуса (чер. 7)*,



Чер. 7

* На черт. 7 дана развертка двух прямоугольных треугольников (h, x, p) и (y, p, r), изображенных на черт. 7a. При этом прямоугольный треугольник (x, y, ρ), конечно, получился в искаженном виде: отрезок ρ на черт. 7 получился длиннее натурального, и прямой угол (x, y) получился тупым.



Черт. 7a

разумеем θ угол между r и проекцией его p на плоскости, проведенной чрез h, где ω угол между h и p. Здесь*

$$\cos r' \cos\theta = \cos p' \tag{86}$$

и, следовательно,

$$4\left(\frac{d^2P}{d\omega\, d\theta}\right) = \frac{2\cos p' \cos^2\theta}{\cos^2\theta - \cos^2 p'} - \cos\theta \log\left(\frac{\cos\theta + \cos p'}{\cos\theta - \cos p'}\right)^{\diamond}.$$

Умножаем на $d\theta$ и интегрируем от $\theta = 0$.

$$4\left(\frac{dP}{d\omega}\right) = \frac{1}{\sin p'} \log\left(\frac{1 + \cot p' \operatorname{tang}\theta}{1 - \cot p' \operatorname{tang}\theta}\right) - \sin\theta \log\left(\frac{\cos\theta + \cos p'}{\cos\theta - \cos p'}\right)^{\circ}.$$

Соединяем концы линий p и h, p и r, r и h прямыми x, y, ρ, из которых первые две перпендикулярны друг к другу. В двух прямоугольных треугольниках, у которых p общая сторона, находим [ур. (1), (5)]

$$\left.\begin{aligned} \sin p' &= \sin h' \sin x',\\ \operatorname{tang}\omega &= \cos x' \operatorname{tang} h',\\ \operatorname{tang}\theta &= \cos y' \operatorname{tang} p', \end{aligned}\right\} \tag{86a}$$

с помощью которых уравнений и еще уравнения (86) получим ⊗

---

* См. формулу (4).

◇ Для получения этой формулы можно заменить $2r$ через $\ln\frac{1+\cos r'}{1-\cos r'}$ (ср. формулу (*) в сноске ° на стр. 371), а затем подставить значение $\cos r'$ из (86).

○ Правильность этой формулы устанавливается непосредственным дифференцированием.

⊗ Первый логарифм в предыдущей формуле имеет (согласно третьей формуле [86a]) значение

$$\ln\frac{1+\cos y'}{1-\cos y'} = 2y$$

[см. формулу (*) в сноске ° на стр. 371]. Аналогично, второй логарифм [согласно (86)] равен $2r$.

$$2\left(\frac{dP}{d\omega}\right)=\frac{y}{\sin h' \sin x'}-r\sin\theta. \qquad [86b]$$

Удерживая одни переменяющиеся x, y, должны сюда поставить [ур. (79)] *

$$\cos r' = \sqrt{1-\sin^2 h' \sin^2 x' \sin^2 y'},$$
$$\sin\theta=\frac{1}{\cos r'}\sin h' \sin x' \cos y',$$
$$d\omega=-\frac{dx' \sin x' \sin h' \cos h'}{1-\sin^2 h' \sin^2 x'}. \qquad [86c]$$

После чего ◇

$$dP=-\frac{1}{2}\cos h' \frac{dx' \log \cot \frac{1}{2}y'}{1-\sin^2 h' \sin^2 x'}+$$

Впрочем, формула [86b] легче получается из формулы (*) примечания [85], если учесть равенство $\cos r' \sin\theta=\cos y' \sin p'$ (см. [3a]). Действительно, дифференцируя это равенство (p не зависит от θ), получаем $d(\cos r' \sin\theta)=-\sin y' \sin p' \, dy'=-\sin r' \, dy'$, после чего

$$2\frac{dP}{d\omega}=-\int\frac{dy'}{\sin r'}-r\sin\theta=-\frac{1}{\sin p'}\int\frac{dy'}{\sin y'}-r\sin\theta=\frac{1}{\sin p'}\int dy-$$
$$-r\sin\theta=\frac{y}{\sin p'}-r\sin\theta.$$

* При применении формул (79) следует иметь в виду, что координаты точки B обозначены на черт. 7а через h, x, y вместо x, y, z. Формула [86c] получается дифференцированием второго соотношения [86a]:

$$d\omega=-\sin x' \operatorname{tg} h' \cos^2\omega \, dx'=-\frac{\sin x' \operatorname{tg} h' \, dx'}{\operatorname{tg}^2\omega+1}=-\frac{\sin x' \operatorname{tg} h' \, dx'}{1+\cos^2 x' \operatorname{tg}^2 h'}=$$
$$=-\frac{\sin x' \operatorname{tg} h' \, dx'}{1+\operatorname{tg}^2 h'-\sin^2 x' \operatorname{tg}^2 h'}=-\frac{\sin x' \operatorname{tg} h' \, dx'}{\frac{1-\sin^2 x' \sin^2 h'}{\cos^2 h'}}=$$
$$=-\frac{\sin x' \sin h' \cos h' \, dx'}{1-\sin^2 x' \sin^2 h'}.$$

◇ Следует учесть соотношение $\ln \operatorname{ctg}\frac{1}{2}y'=y$.

$$+\sin^2 h' \cos h' \frac{dx' r \cos y' \sin^2 x'}{2\cos r' (1 - \sin^2 h' \sin^2 x')}. \tag{87}$$

Интегрируя от $x' = \frac{1}{2}\pi$ до того x', для которого $y' = \frac{1}{2}\pi$, получим часть конуса, вырезанную двумя перпендикулярными друг к другу плоскостями, проведенными чрез высоту h. Значение такой части дает выражение (85), которое теперь будет

$$P = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (r\cos\varphi - h)\, d\psi, \tag{88}$$

где φ угол между r и h, ψ — угол против y в прямоугольном треугольнике из катетов x, y. Взаимная зависимость переменных в обоих выражениях (87), (88) для P определяется уравнениями *

$$\left.\begin{aligned} \sin r' &= \sin x' \sin y' \sin h', \\ \operatorname{tang}\psi &= \cos y' \operatorname{tang} x', \\ \cos r' \cos\varphi &= \cos h'. \end{aligned}\right\} \tag*{[88a]}$$

Если основание конуса — круг с полупоперечником ρ, то ρ, r, φ — постоянные и тогда

$$\sin\rho' = \sin x' \sin y',$$

$$P = \frac{1}{4}\pi (r\cos\varphi - h). \tag{89}$$

Другое значение для P, какое бы основание конуса ни было ◊, находим из уравнения (87),

$$P = \frac{1}{2}\cos h' \int_{\rho'}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx' \log\cot\frac{1}{2}y'}{1 - \sin^2 h' \sin^2 x'} -$$

$$-\frac{r\sin^2 h' \cos h'}{2\cos r'} \int_{\rho'}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx' \cos y' \sin^2 x'}{1 - \sin^2 h' \sin^2 x'}. \tag{90}$$

* Соотношения [88a] получаются из (79), (5), (4).

◊ Вопреки этому утверждению формула (90) верна только для прямого кругового конуса, так как в противном случае r и $\cos r'$ нельзя вынести за знак интеграла.

Для конуса с кругом в основании получим* [86]

$$\int\limits_{\rho'}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx' \cos y' \sin^2 x'}{1-\sin^2 h' \sin^2 x'} = \int\limits_{\rho'}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx' \sin x' \sqrt{\cos^2 \rho - \cos^2 x'}}{1-\sin^2 h' \sin^2 x'} =$$

---

* Согласно (4) имеем $\cos x' = \cos \rho' \cos \psi$, откуда

$$dx' = \frac{\cos \rho' \sin \psi}{\sin x'} d\psi,$$

а также

$$\sin^2 x' = 1 - \cos^2 \rho' \cos^2 \psi.$$

Далее, согласно [3а] имеем

$$\cos y' \sin x' = \cos \rho' \sin \psi.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{\rho'}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx' \cos y' \sin^2 x'}{1-\sin^2 h' \sin^2 x'} = \cos^2 \rho' \int\limits_{0}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^2 \psi \, d\psi}{\cos^2 h' + \sin^2 h' \cos^2 \rho' \cos^2 \psi} \qquad (*)$$

(у Лобачевского переменная интегрирования обозначена через ξ, а не через ψ). Последний интеграл легко представить в виде разности двух интегралов

$$(\cos^2 \rho' + \operatorname{ctg}^2 h') \int\limits_{0}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\psi}{\cos^2 h' + \sin^2 h' \cos^2 \rho' \cos^2 \psi} - \frac{1}{\sin^2 h'} \int\limits_{0}^{\frac{1}{2}\pi} d\psi,$$

первый из которых берется по известной формуле интегрального исчисления:

$$\int \frac{dx}{a + b\cos^2 x} = \frac{1}{\sqrt{a(a+b)}} \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{a}{a+b}} \operatorname{tg} x\right) \qquad (**)$$

$(a(a+b) > 0)$ и оказывается равным

$$\frac{\pi \sqrt{\cos^2 \rho' + \operatorname{ctg}^2 h'}}{2 \sin h' \cos h'} = \frac{\pi \sqrt{\cos^2 \rho' \sin^2 h' + 1 - \sin^2 h'}}{2 \sin^2 h' \cos h'} =$$

$$= \frac{\pi \sqrt{1 - \sin^2 h' \sin^2 \rho'}}{2 \sin^2 h' \cos h'} = \frac{\pi \sqrt{1 - \sin^2 r'}}{2 \sin^2 h' \cos h'} = \frac{\pi \cos r'}{2 \sin^2 h' \cos h'}.$$

$$= \cos^2\rho' \int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\xi \sin^2 \xi}{\cos^2 h' + \sin^2 h' \cos^2 \rho' \cos^2 \xi} = \frac{\pi(\cos r' - \cos h')}{2 \cos h' \sin^2 h'}.$$

Итак, два значения (89) и (90) будут теперь

$$P = \frac{1}{4}\pi\left(r\frac{\cos h'}{\cos r'} - h\right)^{*},$$

$$P = \frac{1}{2}\cos h' \int\limits_{\rho'}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx' \log\cot\frac{1}{2}y'}{1-\sin^2 h' \sin^2 x'} + \frac{\pi r(\cos h' - \cos r')}{4\cos r'},$$

которых сравнение дает

$$\int\limits_{\rho'}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dx' \log\cot\frac{1}{2}y'}{1-\sin^2 h' \sin^2 x'} = \frac{1}{2}\,\frac{\pi(r-h)}{\cos h'}. \qquad [90a]$$

Подставя сюда значение x' и отбросив для простоты все ударения над буквами, получим ◇

$$\int\limits_{\rho}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin y \cos y \log\cot\frac{1}{2}y\,dy}{(\sin^2 y - \sin^2 r)\sqrt{\sin^2 y - \sin^2 \rho}} = \frac{\pi \log\left(\operatorname{tang}\frac{1}{2}h \cot\frac{1}{2}r\right)}{2\sin\rho\cos h}, \qquad (91)$$

где

$$\sin r = \sin h \sin \rho. \qquad [91a]$$

Интеграл (91), сколько мне известно, не был еще замечен в такой обширности; некоторые частные только случаи можно видеть у Лежандра (Exercices de calcul intégral., T. 1, suppl.).

---

* См. третье соотношение [88a].

◇ Согласно (1) имеем

$$\sin x' = \frac{\sin \rho'}{\sin y'},$$

и, следовательно,

$$dx' = -\frac{\sin\rho' \cos y'\,dy'}{\cos x' \sin^2 y'}.$$

Подставляя эти значения в левую часть соотношения [90a], получим (91).

Если в интеграле (91), кроме предположения

$$\sin r = \sin h \sin \rho,$$

еще делаем*

$$\cos y = \cos \rho \sin \varphi, \quad \cos \rho = \cos r \cos \lambda, \tag{[91b]}$$

то находим ◊

$$\sin \lambda = \operatorname{tang} r \cot h, \tag{[91c]}$$

$$\left(\cot \frac{1}{2} h \operatorname{tang} \frac{1}{2} r\right)^2 = \frac{1 - \cos r}{1 + \cos r} \cdot \frac{1 + \cos h}{1 - \cos h} =$$

$$= \frac{\cos \lambda - \cos \rho}{\cos \lambda + \cos \rho} \cdot \frac{\sin \rho + \sin r \cot h}{\sin \rho - \sin r \cot h} =$$

$$= \operatorname{tang} \frac{1}{2} (\rho + \lambda) \operatorname{tang} \frac{1}{2} (\rho - \lambda) \frac{\sin \rho + \sin \lambda \cos r}{\sin \rho - \sin \lambda \cos r} =$$

$$= \operatorname{tang} \frac{1}{2} (\rho + \lambda) \operatorname{tang} \frac{1}{2} (\rho - \lambda) \frac{\sin (\rho + \lambda)}{\sin (\rho - \lambda)} = \left\{ \frac{\sin \frac{1}{2} (\rho + \lambda)}{\cos \frac{1}{2} (\rho - \lambda)} \right\}^2.$$

Рассматривая теперь y и φ только переменными, интегралу (91) даем новый вид [87]

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi \sin \varphi}{1 - \cos^2 \lambda \sin^2 \varphi} \log \frac{1 + \cos \rho \sin \varphi}{1 - \cos \rho \sin \varphi} =$$

$$= \frac{\pi}{\sin \lambda \cos \lambda} \log \frac{\cos \frac{1}{2} (\rho - \lambda)}{\sin \frac{1}{2} (\rho + \lambda)}. \tag{92}$$

---

* Второе из соотношений [91b] показывает, что λ есть значение угла между образующей и основанием конуса [см. (4)]. Угол же φ не совпадает с ранее рассматривавшимся углом между осью и образующей конуса. Соотношения [91b] вводят новое переменное интегрирования φ вместо y и новый параметр λ вместо r и h.

◊ $$\sin^2 \lambda = 1 - \frac{\cos^2 \rho}{\cos^2 r} = 1 - (\operatorname{tg}^2 r + 1)\left(1 - \frac{\sin^2 r}{\sin^2 h}\right) =$$

$$= 1 - (\operatorname{tg}^2 r + 1)\left(1 - \frac{1 + \operatorname{ctg}^2 h}{1 + \operatorname{ctg}^2 r}\right) = \operatorname{tg}^2 r \operatorname{ctg}^2 h.$$

Этот интеграл верен для всех произвольных углов, ρ, λ, хотя до сих пор предполагались $\rho > \lambda$ острые углы*. Для доказательства довольно уже заметить, что значение интеграла может быть представлено строкой, которая во всех случаях исчезает ◊. Располагая ее по степеням $\cos\rho$, находим множитель при степени $\cos\rho$, с целым положительным показателем $2n+1$ △,

$$\frac{2}{(2n+1)}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi\sin^{2n+2}\varphi}{1-\cos^2\lambda\sin^2\varphi} <$$

$$< \frac{2}{2n+1}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi\sin\varphi}{1-\cos^2\lambda\sin^2\varphi} = \frac{\pi-2\lambda}{(2n+1)\sin\lambda\cos\lambda}.$$

---

* Напоминаем, что Лобачевский изменил обозначения, отбросив штрих, и стал писать ρ вместо ρ'. Но $\rho' = \Pi(\rho)$ — острый угол параллельности для положительного отрезка, и поскольку в треугольнике OAB (чер. 7а) ρ — катет, а λ — острый угол, то ясно, что $\rho' > \lambda$: иначе прямые BO и AO не пересеклись бы.

◊ Термин «исчезновение строки» употребляется в смысле современного «сходимость ряда». Доводы, приводимые здесь Лобачевским, неубедительны. Впрочем, заранее ясно, что формула (92) не может быть справедлива при всех значениях ρ и λ, так как левая часть является четной функцией от ρ (и от λ), а правая — нет. Доказательство же, изложенное на предыдущих страницах, показывает справедливость формулы (92) лишь при $0 < \lambda < \rho < \frac{\pi}{2}$. Однако, как показывает другой вывод соотношения (92), приводимый Лобачевским ниже (стр. 382—386), эта формула справедлива при любых острых углах ρ, λ.

△ Применяя разложение по степеням $\cos\rho\sin\varphi$, находим:

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\cos\rho\sin\varphi}{1-\cos\rho\sin\varphi}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin^{2k+1}\varphi\cos^{2k+1}\rho}{2k+1},$$

и получим для интеграла (92)

Итак, в интеграле (91) вместо $\cos h$, $\cos r$ можем ставить $\frac{1}{\cos h}$, $\frac{1}{\cos r}$, которая перемена отвечает предположению $\rho < \lambda$ и дает интегралу (91) такой вид*:

$$I = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_{2k+2}\cos^{2k+1}\rho}{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1},$$

где через C_n обозначен интеграл

$$C_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi \sin^n\varphi}{1 - \cos^2\lambda \sin^2\varphi},$$

который является убывающей функцией целого положительного n, так как $\sin^{n+1}\varphi < \sin^n\varphi$ в промежутке φ от 0 до $\frac{\pi}{2}$. Наибольший из этих интегралов (при $n = 1$) может быть вычислен подстановкой $z = \cos\varphi$, так что

$$C_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi \sin\varphi}{1 - \cos^2\lambda \sin^2\varphi} = \int_0^1 \frac{dz}{z^2\cos^2\lambda + \sin^2\lambda} = \frac{\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{ctg}\lambda)}{\sin\lambda\cos\lambda} = \frac{\pi - 2\lambda}{\sin 2\lambda},$$

откуда и следует неравенство, приведенное в тексте.

Сходимость ряда вытекает из неравенств

$$\frac{a_{2k+3}}{a_{2k+1}} = \frac{2k+1}{2k+3}\frac{C_{2k+4}}{C_{2k+2}}\cos^2\rho < |\cos\rho| < 1.$$

* Если $\rho < \lambda$ — острые углы, то $\cos\rho > \cos\lambda$ и потому

$$\cos\lambda = \cos\rho\cos r, \qquad (*)$$

где r — некоторый острый угол. Примем, далее,

$$\cos y = \cos\rho\sin\varphi, \qquad \sin h\sin\lambda = \sin r \qquad (**)$$

(соотношения (*), (**) формально получаются из [91b], [91c] заменой $\cos r$ и $\cos h$ на $\frac{1}{\cos r}$ и $\frac{1}{\cos h}$). Из (*), (**) получаем

$$\cos h = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 r}{\sin^2\lambda}} = \sqrt{\frac{\cos^2 r - \cos^2\lambda}{\sin^2\lambda}} =$$

$$= \frac{1}{\sin\lambda}\sqrt{\frac{\cos^2\lambda}{\cos^2\rho} - \cos^2\lambda} = \operatorname{tg}\rho \cdot \operatorname{ctg}\lambda,$$

$$\int\limits_{\rho}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin y \cos y \log \cot \frac{1}{2} y \, dy}{(1-\cos^2 r \cos^2 y)\sqrt{\sin^2 y - \sin^2 \rho}} = \frac{\pi \cos h}{\sin 2r} \log\left(\operatorname{tang}\frac{1}{2}h \cot\frac{1}{2}r\right), \quad (93)$$

где

$$\sin\rho \operatorname{tang} h = \operatorname{tang} r. \qquad [93a]$$

К интегралу (92) приходим еще другим путем, рассматривая двойной интеграл

$$u = \iint \frac{dx\, d\varphi \sin^2\varphi}{(1-a\sin^2\varphi)(1-x^2\sin^2\varphi)}$$

от $x = 0$, $\varphi = 0$* и где a — постоянное. Для $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ пусть $u = U$. Интегрирование в отношении к x дает ◇

$$U = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi \sin\varphi}{1-a\sin^2\varphi} \log\left(\frac{1+x\sin\varphi}{1-x\sin\varphi}\right). \qquad [93b]$$

Дифференцируя u в отношении к x, получим

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = \frac{1}{x^2-a}\left\{\int\frac{d\varphi}{1-x^2\sin^2\varphi} - \int\frac{d\varphi}{1-a\sin^2\varphi}\right\},$$

$$\sin\rho \operatorname{tg} h = \frac{\sin\rho\sin h}{\operatorname{tg}\rho\operatorname{ctg}\lambda} = \cos\rho\sin h \cdot \frac{\frac{\sin r}{\sin h}}{\cos\rho\cos r} = \operatorname{tg} r,$$

$$\left\{\frac{\cos\frac{\rho-\lambda}{2}}{\sin\frac{\rho+\lambda}{2}}\right\}^2 = \frac{\sin(\rho-\lambda)}{\sin(\rho+\lambda)}\cdot\frac{\operatorname{ctg}\frac{\rho-\lambda}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\rho+\lambda}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}\lambda\operatorname{ctg}\rho}{1+\operatorname{tg}\lambda\operatorname{ctg}\rho}\cdot\frac{\cos\lambda+\cos\rho}{\cos\lambda-\cos\rho} =$$

$$= \frac{1-\frac{1}{\cos h}}{1+\frac{1}{\cos h}}\cdot\frac{1+\frac{1}{\cos r}}{1-\frac{1}{\cos r}} = \frac{1-\cos h}{1+\cos h}\cdot\frac{1-\cos r}{1+\cos r} = \left(\operatorname{tg}\frac{h}{2}\operatorname{ctg}\frac{r}{2}\right)^2,$$

после чего интеграл (92) переходит в (93).

* Иначе говоря, вместо написанного неопределенного интеграла рассматривается определенный интеграл в пределах от 0 до x по x, а по φ — в пределах от 0 до φ.

◇ В силу формулы

$$\int\frac{dx}{a^2-b^2x^2} = \frac{1}{2ab}\ln\frac{a+bx}{a-bx}.$$

а после интегрирования в отношении к φ от $\varphi = 0$*,

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = \frac{1}{x^2 - a}\left\{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{arc\,tang}\left(\operatorname{tang}\varphi\sqrt{1-x^2}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sqrt{1-a}} \operatorname{arc\,tang}\left(\operatorname{tang}\varphi\sqrt{1-a}\right)\right\}. \qquad [93c]$$

Если $\sqrt{1-x^2}$ — действительное число, то для $\varphi = \frac{1}{2}\pi$

$$\operatorname{arc\,tang}\left(\operatorname{tang}\varphi\sqrt{1-x^2}\right) = \frac{1}{2}\pi.$$

Если $\sqrt{1-x^2}$ — воображаемое число, то пусть

$$\sqrt{1-x^2} = \lambda + \mu\sqrt{-1}$$

с действительными числами λ, μ. Находим

$$\operatorname{arc\,tang}\left(\operatorname{tang}\varphi\sqrt{1-x^2}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{2\lambda\operatorname{tang}\varphi}{1-(\lambda^2+\mu^2)\operatorname{tang}^2\varphi}\right) +$$

$$+ \frac{\sqrt{-1}}{4}\log\left\{\frac{1+2\mu\operatorname{tang}\varphi+(\lambda^2+\mu^2)\operatorname{tang}^2\varphi}{1-2\mu\operatorname{tang}\varphi+(\lambda^2+\mu^2)\operatorname{tang}^2\varphi}\right\}.$$

Здесь

$$\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{2\lambda\operatorname{tang}\varphi}{1-(\lambda^2+\mu^2)\operatorname{tang}^2\varphi}\right) =$$

$$= 2\lambda\int_0 \frac{d\varphi\,\{\cos^2\varphi + (\lambda^2+\mu^2)\sin^2\varphi\}}{\{\cos^2\varphi - (\lambda^2+\mu^2)\sin^2\varphi\}^2 + 4\lambda^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}.$$

---

* Согласно интегральной формуле (**), приведенной в сноске * на стр. 377, имеем $\left(\text{с помощью замены } \sin\varphi = \cos\psi,\ \text{т. е. } \varphi = \frac{\pi}{2} - \psi\right)$

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{1-p^2\sin^2\varphi} = -\frac{1}{\sqrt{1-p^2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{ctg}\varphi}{\sqrt{1-p^2}}\right)\Bigg|_0^\varphi =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-p^2}}\left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{ctg}\varphi}{\sqrt{1-p^2}}\right] = \frac{1}{\sqrt{1-p^2}}\operatorname{arcctg}\frac{\operatorname{ctg}\varphi}{\sqrt{1-p^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-p^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{1-p^2}\operatorname{tg}\varphi\right).$$

В этом уравнении интеграл с положительными элементами требует, чтобы его значение возрастало непрестанно с φ, и, следовательно, для $\varphi = \frac{1}{2}\pi$

$$\operatorname{arc\,tang}\left\{\frac{2\lambda \operatorname{tang}\varphi}{1-(\lambda^2+\mu^2)\operatorname{tang}^2\varphi}\right\} = \pi.$$

Далее, заметим, что уравнение

$$1 \pm 2\mu \operatorname{tang}\varphi + (\lambda^2+\mu^2)\operatorname{tang}^2\varphi = 0$$

для $\operatorname{tang}\varphi$ дает одни воображаемые значения. После этого в праве заключить, что для $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ и для всех, как действительных, так и воображаемых чисел x,

$$\operatorname{arc\,tang}(\operatorname{tang}\varphi\sqrt{1-x^2}) = \frac{1}{2}\pi \text{ [88]}.$$

$$\left(\frac{dU}{dx}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{x^2-a}\left\{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-a}}\right\}^{*}$$

или в другом виде

$$dU = \frac{\pi}{2\sqrt{1-a}} \cdot \frac{dx}{(\sqrt{1-a}+\sqrt{1-x^2})\sqrt{1-x^2}}.$$

Пусть

$$x = \frac{2r}{1+r^2}, \qquad k^2 = \frac{1-\sqrt{1-a}}{1+\sqrt{1-a}}.$$

Находим ◊

$$dU = \frac{\pi}{\sqrt{1-a}(1+\sqrt{1-a})} \cdot \frac{dr}{1-k^2r^2}.$$

---

* Эта формула получается из [93с] при $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Согласно [88], в этой формуле следует брать те значения корней $\sqrt{1-x^2}$, $\sqrt{1-a}$, которые имеют положительные вещественные части (см. сноску ◊ на стр. 388—389).

◊ Решая предыдущее соотношение относительно r, находим

$$r = \frac{1 \pm \sqrt{1-x^2}}{x}; \qquad (*)$$

далее

$$\sqrt{1-x^2} = \pm\frac{1-r^2}{1+r^2}. \qquad (**)$$

Интегрируя от $r = 0$ *,

$$U = \frac{\pi}{2\sqrt{a}\sqrt{1+a}} \log\left(\frac{1+kr}{1-kr}\right).$$

Сравнивая это значение U с прежним и вводя снова x ◇, получим

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi \sin\varphi}{1 - a\sin^2\varphi} \log\left(\frac{1 + x\sin\varphi}{1 - x\sin\varphi}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{a}\sqrt{1-a}} \log\left\{\frac{x\sqrt{a} + (1-\sqrt{1-a})(1-\sqrt{1-x^2})}{x\sqrt{a} - (1-\sqrt{1-a})(1-\sqrt{1-x^2})}\right\} \quad [93d]$$

или, ставя x вместо $\sin\varphi$, b вместо x,

$$\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{(1-ax^2)\sqrt{1-x^2}} \log\left(\frac{1+bx}{1-bx}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{a}\sqrt{1-a}} \log\left\{\frac{b\sqrt{a} + (1-\sqrt{1-a})(1-\sqrt{1-b^2})}{b\sqrt{a} - (1-\sqrt{1-a})(1-\sqrt{1-b^2})}\right\}, \quad (94)$$

Лобачевский предполагает, что в соотношении (*) выбран знак «минус»; тогда легкий подсчет показывает, что в соотношении (**) следует взять знак «плюс».

* См. сноску * на стр. 382. Кроме того, имеем

$$(1+\sqrt{1-a})\,k = (1+\sqrt{1-a})\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-a}}{1+\sqrt{1-a}}} = \sqrt{a}.$$

Далее, интегрирование по r происходит в пределах от 0 до r, так как в формуле (*) предыдущей сноски был выбран знак «минус».

◇ По формуле

$$kr = \frac{\sqrt{a}}{1+\sqrt{1-a}} \cdot r = \frac{1-\sqrt{1-a}}{\sqrt{a}} \cdot \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

где a, b — произвольные действительные или воображаемые числа, кроме тех, которые делают елемент интеграла бесконечно великим *.

Интеграл (94) дает прежний (92), когда полагаем ◇

$$a = \sin^2\beta, \qquad b = \sin\alpha, \qquad x = \sin\varphi.$$

Если в уравнении (94) ставим △

$$b = \sqrt{\frac{B+1}{B-1}}, \qquad a = \frac{B+1}{B-1}\cdot\frac{A-1}{A+1}. \qquad e^{2u} = \frac{\sqrt{B-1}+x\sqrt{B+1}}{\sqrt{B-1}-x\sqrt{B+1}}$$

и распространяем интегрирование от $u = 0$ для всех значений, которые отвечают значениям x, от $x = 0$ до $x = 1$, то получим:

$$\int\frac{u\,du\,(e^u - e^{-u})}{(e^{2u}+e^{-2u}+2A)\sqrt{e^{2u}+e^{-2u}+2B}} = \frac{\pi}{4\sqrt{(A-1)(B-A)}}\times$$

$$\times\log\left\{\frac{\dfrac{(B+1)\sqrt{A-1}}{\sqrt{B-1}-\sqrt{-2}}+\sqrt{(B-1)(A+1)}-\sqrt{2B-2A}}{\dfrac{(B+1)\sqrt{A-1}}{\sqrt{B-1}-\sqrt{-2}}-\sqrt{(B-1)(A+1)}+\sqrt{2B-2A}}\right. . \quad (95)$$

---

* Действительные части чисел $\sqrt{1-a}$ и $\sqrt{1-b^2}$ положительны

◇ Следует сделать несколько иную замену:

$$a = \cos^2\lambda, \quad b = \cos\rho, \quad x = \sin\varphi.$$

При этом, считая углы λ и ρ острыми и беря для корней значения с положительными действительными частями, найдем

$$\sqrt{1-a} = \sin\lambda, \quad \sqrt{a} = \cos\lambda, \quad \sqrt{1-b^2} = \sin\rho, \quad \sqrt{1-x^2} = \cos\varphi.$$

Правая часть равенства (94) приводится с помощью довольно простых преобразований к правой части равенства (92). Таким образом, формула (92) справедлива для любых острых углов ρ, λ. Сохраняет свой вид эта формула и для углов во второй четверти (т. е. вообще при $0<\lambda<\pi$, $0<\rho<\pi$). Однако, если угол λ расположен в третьей или четвертой четверти, то мы должны принять $\sqrt{1-a} = -\sin\lambda$, а если угол ρ расположен в третьей или четвертой четверти, то $\sqrt{1-b^2} = -\sin\rho$. Таким образом, из формулы (94) легко выяснить, какие изменения происходят в правой части формулы (92), если один (или оба) из углов ρ, λ расположен в третьей или четвертой четверти (ср. сноску ◇ на стр. 380).

△ Вычисления проведены в примечании [89].

Умножая на $\sqrt{2B}$ и полагая после $B = \infty$, находим:

$$\int_0^\infty \frac{u\,du\,(e^u - e^{-u})}{e^{2u} + e^{-2u} + 2A} =$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{2}\sqrt{A-1}} \log\left(\frac{\sqrt{A-1} + \sqrt{A+1} - \sqrt{2}}{\sqrt{A-1} - \sqrt{A+1} + \sqrt{2}}\right). \qquad [95a]$$

Если делаем

$$2A = e^{2a} + e^{-2a},$$

то *

$$\int_0^\infty \frac{u\,du\,(e^u - e^{-u})}{e^{2u} + e^{-2u} + e^{2a} + e^{-2a}} = \frac{\pi a}{2(e^a - e^{-a})}. \qquad (96)$$

Если ж $A = \cos 2\alpha$, то [90]

$$\int_0^\infty \frac{u\,du\,(e^u - e^{-u})}{e^{2u} + e^{-2u} + 2\cos 2\alpha} = \frac{\pi\alpha}{4\sin\alpha}. \qquad (97)$$

Два последние интеграла в моем сочинении *о началах Геометрии* были выведены по другому способу ◊.

---

* Легко видеть, что при таком значении A имеем

$$\sqrt{A-1} = \sqrt{2}\,\mathrm{sh}\,a, \qquad \sqrt{A+1} = \sqrt{2}\,\mathrm{ch}\,a$$

и потому

$$\frac{\sqrt{A-1} + \sqrt{A+1} - \sqrt{2}}{\sqrt{A-1} - \sqrt{A+1} + \sqrt{2}} = \frac{\mathrm{sh}\,a + (\mathrm{ch}\,a - 1)}{\mathrm{sh}\,a - (\mathrm{ch}\,a - 1)} =$$

$$= \frac{2\mathrm{sh}\,\frac{a}{2}\,\mathrm{ch}\,\frac{a}{2} + 2\mathrm{sh}^2\,\frac{a}{2}}{2\mathrm{sh}\,\frac{a}{2}\,\mathrm{ch}\,\frac{a}{2} - 2\mathrm{sh}^2\,\frac{a}{2}} = \frac{\mathrm{ch}\,\frac{a}{2} + \mathrm{sh}\,\frac{a}{2}}{\mathrm{ch}\,\frac{a}{2} - \mathrm{sh}\,\frac{a}{2}} = e^a.$$

◊ Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. I, Гостехиздат, 1946, стр. 253.

Интеграл (94) можем сделать более общим. Означаем $f(x)$ какую-нибудь функцию от x* и предположим, что в уравнении

$$f(x) = 0$$

с неизвестным x действительные корни не заключаются в границах $x = +a$, $x = -a$; затем все корни, как действительные, так и воображаемые, будут

$$\alpha_1, \ \alpha_2, \ \alpha_3, \ \ldots$$

и, следовательно,

$$f(x) = (-\alpha_1 + x)(-\alpha_2 + x)(-\alpha_3 + x) \ldots$$

Если теперь $x = ay$, то по примеру интеграла (94) пишем ◇

$$\int_{-1}^{+1} \frac{y\,dy}{(1 - ky^2)\sqrt{1 - y^2}} \log(-\alpha_1 + ay) =$$

---

* Разлагающуюся в произведение $\prod_i (x - \alpha_i)$, где $\{\alpha_i\}$ — совокупность всех корней этой функции. Обычно под $f(x)$ понимается многочлен со старшим коэффициентом 1.

◇ Полагая в интеграле (94) $b = -\frac{a}{\alpha_1}$; $a = k$; мы получим:

$$I = \int_0^1 \frac{x dx}{(1 - kx^2)\sqrt{1 - x^2}} \ln\left(\frac{-\alpha_1 + ax}{-\alpha_1 - ax}\right) = \int_0^1 F(x^2)\, d(x^2) \ln\left(\frac{-\alpha_1 + ax}{-\alpha_1 - ax}\right) =$$

$$= \int_0^1 F(x^2)\, d(x^2) \ln(-\alpha_1 + ax) - \int_0^1 F(x^2)\, d(x^2) \ln(-\alpha_1 - ax).$$

Заменяя в первом из этих интегралов x через y, а во втором — через $-y$, мы и получим приведенный Лобачевским интеграл:

$$I = \int_0^1 F(y^2)\, d(y^2) \ln(-\alpha_1 + ay) - \int_0^{-1} F(y^2)\, d(y^2) \ln(-\alpha_1 + ay) =$$

$$= \int_{-1}^{+1} F(y^2)\, d(y^2) \ln(-\alpha_1 + ay) = \int_{-1}^{+1} \frac{y\,dy}{(1 - ky^2)\sqrt{1 - y^2}} \ln(-\alpha_1 + ay).$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{k}\sqrt{1-k}} \log \frac{a\sqrt{k}-(1-\sqrt{1-k})(\alpha_1+\sqrt{\alpha_1^2-a^2})}{a\sqrt{k}+(1-\sqrt{1-k})(\alpha_1+\sqrt{\alpha_1^2-a^2})}.$$

Вводя снова x^*, получим

$$\int\limits_{-a}^{+a} \frac{xdx}{(a^2-kx^2)\sqrt{a^2-x^2}} \log(x-\alpha_1) =$$

$$= \frac{\pi}{a\sqrt{k}\sqrt{1-k}} \log\left\{\frac{a\sqrt{k}-(1-\sqrt{1-k})(\alpha_1+\sqrt{\alpha_1^2-a^2})}{a\sqrt{k}+(1-\sqrt{1-k})(\alpha_1+\sqrt{\alpha_1^2-a^2})}\right\}.$$

Складывая подобные интегралы для всех корней уравнения

$$f(x) = 0$$

и означая для краткости

$$\lambda = \frac{1-\sqrt{1-k}}{\sqrt{k}},$$

$$A_1 = \frac{\alpha_1+\sqrt{\alpha_1^2-a^2}}{a},$$

Далее, числитель дроби, стоящей в (94) под знаком логарифма, после умножения на $-\alpha_1$ примет вид

$$a\sqrt{k}-(1-\sqrt{1-k})\left(\alpha_1-\alpha_1\sqrt{1-\frac{a^2}{\alpha_1^2}}\right),$$

где из двух возможных значений корня $\sqrt{1-\frac{a^2}{\alpha_1^2}}$ берется то, которое имеет положительную действительную часть, так же как и у корня $\sqrt{1-k}$ (см. сноску* на стр. 386). При вещественном α_1 скобка $\alpha_1-\alpha_1\sqrt{1-\frac{a^2}{\alpha_1^2}}$ принимает вид $\alpha_1 - \operatorname{sign}\alpha_1 \sqrt{\alpha_1^2-a^2}$, и в случае отрицательного α_1 получаем соотношение, указанное Лобачевским. Аналогичные правила вычисления корней следует иметь в виду и в дальнейших формулах (98), (99), (100). Лобачевский говорит о знаках корней ниже (стр. 394).

* По формуле $x = ay$.

$$A_2 = \frac{\alpha_2 + \sqrt{\alpha_2^2 - a^2}}{a}$$

и т. д.

заключаем, что для всякой функции $f(x)$

$$\int_{-a}^{+a} \frac{xdx}{(a^2 - kx^2)\sqrt{a^2 - x^2}} \log f(x) =$$

$$= \frac{\pi}{a\sqrt{k}\sqrt{1-k}} \log\left(\frac{1 - \lambda A_1}{1 + \lambda A_1} \cdot \frac{1 - \lambda A_2}{1 + \lambda A_2} \cdots\right), \qquad (98)$$

не забывая, однако ж, что значения x во всем пространстве интегрирования не должны делать $a^2 - kx^2 = 0$, $f(x) = 0$.

Впрочем, можно полагать $k = 0$ и $k = \infty$, чтобы найти границы, к которым приближаются значения интеграла с уменьшением всякого k и с возрастанием действительного отрицательного числа k. Так, интеграл (98) переходит в два новые *:

---

* При $k \to 0$ имеем

$$\lambda = \frac{1 - \sqrt{1-k}}{\sqrt{k}} = \frac{1 - \left(1 - \frac{k}{2} - \ldots\right)}{\sqrt{k}} = \sqrt{k}\left(\frac{1}{2} + \ldots\right),$$

и потому

$$\lim_{k\to 0} \frac{1}{\sqrt{k}} \ln \frac{1 - \lambda A_i}{1 + \lambda A_i} = \lim_{k\to 0} \frac{\ln(1 - \lambda A_i) - \ln(1 + \lambda A_i)}{\sqrt{k}} =$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{(-\lambda A_i + \ldots) - (\lambda A_i + \ldots)}{\sqrt{k}} = \lim_{k\to 0} \frac{-2\lambda A_i + \ldots}{\sqrt{k}} =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\left[-2A_i\left(\frac{1}{2} + \ldots\right)\right] = -A_i,$$

откуда легко вытекает соотношение (99). Далее, при $k \to -\infty$ имеем (беря для $\sqrt{1-k}$ положительное действительное значение, а для $\sqrt{k}$ значение с положительной мнимой частью):

$$\lim \lambda = i, \quad \lim \frac{k}{\sqrt{k} \cdot \sqrt{1-k}} = i,$$

$$\int_{-a}^{+a} \frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}} \log f(x) =$$

$$= -\pi\{\alpha_1 + \sqrt{\alpha_1^2 - a^2} + \alpha_2 + \sqrt{\alpha_2^2 - a^2} + \ldots\}, \qquad (99)$$

$$\int_{-a}^{+a} \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} \log f(x) = \frac{2\pi}{a}\left\{\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{-\alpha_1 - \sqrt{\alpha_1^2 - a^2}}{a}\right) + \right.$$

$$\left. + \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{-\alpha_2 - \sqrt{\alpha_2^2 - a^2}}{a}\right) + \ldots\right\}. \qquad (100)$$

Например, в последнем интеграле полагая $a = 1$, $f(x) = 1 + x\sin\omega$, где ω — постоянное, находим*

откуда и следует соотношение (100):

$$+\int_{-a}^{a} \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} \ln f(x) = -\frac{\pi i}{a} \sum_{m=1}^{n} \ln \frac{1 - iA_m}{1 + iA_m} =$$

$$= \frac{2\pi i}{a} \sum_{m=1}^{n} \operatorname{Arth}(iA_m) = \frac{2\pi}{a} \sum_{m=1}^{n} \operatorname{arctg}(-A_m).$$

* Интеграл (100) может быть преобразован следующим образом:

$$I = \int_{-a}^{a} \frac{\ln f(x)\,dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} = \int_{-a}^{0} \frac{\ln f(x)\,dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} + \int_{0}^{a} \frac{\ln f(x)\,dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Заменяя в первом интеграле правой части x через $-x$, получим

$$I = -\int_{0}^{a} \frac{\ln f(-x)\,dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} + \int_{0}^{a} \frac{\ln f(x)\,dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} = \int_{0}^{a} \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} \ln \frac{f(x)}{f(-x)}.$$

Полагая $a = 1$, $f(x) = 1 + x\sin\omega$, $\alpha_1 = -\dfrac{1}{\sin\omega}$, найдем из (100):

$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} \ln \frac{1 + x\sin\omega}{1 - x\sin\omega} = -2\pi \operatorname{arctg}(\alpha_1 - \operatorname{sign}\alpha_1 \sqrt{\alpha_1^2 - 1}) =$$

$$= -2\pi \operatorname{arctg}\left[-\frac{1}{\sin\omega} + \operatorname{sign}(\sin\omega) \cdot |\operatorname{ctg}\omega|\right].$$

При $-\dfrac{\pi}{2} < \omega < \dfrac{\pi}{2}$ имеем $\operatorname{sign}(\sin\omega) \cdot |\operatorname{ctg}\omega| = \operatorname{ctg}\omega$, и потому интеграл (101) принимает значение

$$-2\pi \operatorname{arctg} \frac{-1 + \cos\omega}{\sin\omega} = 2\pi \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\right) = \pi\omega.$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} \log \frac{1+x\sin\omega}{1-x\sin\omega} = \pi\omega. \qquad (101)$$

Если α — постоянный угол, n — целое число нечетное и m — числа от единицы до $\frac{1}{2}(n-1)$, то, означая *

$$M = \cos\frac{2m\pi}{n} + \cos\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{m}{n}\pi\right)\sqrt{2\sin\frac{2m\pi}{n}},$$

$$N = 1 + 2\sin\frac{2m\pi}{n} +$$

$$+ 2\sin\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{m}{n}\pi\right)\sqrt{2\sin\frac{2m\pi}{n}},$$

помощию интеграла (98) находим ◇

$$\int_{-1}^{+1} \frac{x\,dx}{(1-x^2\sin^2\alpha)\sqrt{1-x^2}} \log\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{\sin\alpha\cos\alpha}\sum\log\left(\frac{1-2\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\alpha M + \mathrm{tang}^2\frac{1}{2}\alpha N}{1+2\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\alpha M + \mathrm{tang}^2\frac{1}{2}\alpha N}\right), \qquad (102)$$

где знак суммы относится к числам m от $m=1$ до $m=\frac{1}{2}(n-1)$.

Полагая здесь $\alpha = 0$, получим △

---

* В оригинале вместо $\frac{2m\pi}{n}$ и $\frac{m\pi}{n}$ стоит соответственно $\frac{(2m+1)\pi}{n}$ и $\frac{(2m+1)\pi}{2n}$; то же в формуле (103).

◇ Вычисления проведены в примечании [91].

△ При $\alpha \to 0$ правая часть (102) имеет в силу формулы

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

предел

$$I = \lim \pi \cdot \frac{-4\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}\cdot\sum M_m}{\sin\alpha} = -2\pi\Sigma M_m.$$

Но по свойству корней двучленного уравнения

$$2\sum_{m=1}^{\frac{1}{2}(n-1)} \cos\varphi_m + 1 = 0,$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} \log\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right) =$$

$$= \pi - 2\pi \sum \cos\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{m}{n}\pi\right) \sqrt{2\sin\frac{2m\pi}{n}}. \qquad (103)$$

Из общего выражения (98) можно найти интеграл

$$\int_0^1 \frac{xdx}{(1-kx^2)\sqrt{1-x^2}} \log\left(\frac{\sin a + \sin bx}{\sin a - \sin bx}\right) =$$

$$= \int_0^1 \frac{xdx}{(1-kx^2)\sqrt{1-x^2}} \log\left\{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(a+bx)\cot\frac{1}{2}(a-bx)\right\}$$

для действительных чисел $a^2 > b^2$ *.

Вообще заметим, что если α_1 — корень уравнения

$$f(x) = 0$$

для какой-нибудь функции $f(x)$, то

$$\frac{\alpha_1 + \sqrt{\alpha_1^2 - a^2}}{a}, \qquad \frac{\alpha_1 - \sqrt{\alpha_1^2 - a^2}}{a}$$

будут корнями уравнения

$$f\left\{\frac{1}{2}a\left(x + \frac{1}{x}\right)\right\} = 0.$$

откуда

$$I = \pi - 2\pi \sum \sqrt{2\sin\varphi_m} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \varphi_m\right).$$

* Этот интеграл можно представить в виде

$$\int_{-1}^{1} \frac{xdx}{(1-kx^2)\sqrt{1-x^2}} \ln(\sin a + \sin bx)$$

(ср. сноску ◊ на стр. 388—389), после чего можно (найдя корни уравнения $\sin a + \sin bx = 0$) представить его по формуле (98) в виде бесконечного ряда.

Итак, если $\phi(x)$ такая функция от x, что

$$f\left\{\frac{1}{2}a\left(x+\frac{1}{x}\right)\right\}=\phi(x)\phi\left(\frac{1}{x}\right),$$

то интегралу (98) можно дать вид [92]

$$\int\limits_{-a}^{+a}\frac{xdx}{(a^2-kx^2)\sqrt{a^2-x^2}}\log f(x)=$$

$$=\frac{\pi}{a\sqrt{k}\sqrt{1-k}}\log\left\{\frac{(-1)^n\phi\left(\sqrt{\frac{1}{k}}+\sqrt{\frac{1}{k}-1}\right)}{\phi\left(-\sqrt{\frac{1}{k}}-\sqrt{\frac{1}{k}-1}\right)}\right\}^{*}. \qquad (104)$$

Здесь, однако ж, $f(x)$ подразумевается алгебраическая функция от x или бесконечная строка, которая может разлагаться на производители.

Об интеграле (98) еще заметим, что хотя в $\sqrt{k}$ знак произвольный, но $\sqrt{1-k}$, $\sqrt{\alpha_1^2-a^2}$ должны быть или положительные числа, если действительные, или с тем знаком, который принят в действительной части, когда бы корень был воображаемый ◇.

Интеграл (91), если ставим сюда

$$\left.\begin{aligned}\cos r\sin\gamma&=\cos\rho,\\ \operatorname{tang}\varphi&=\frac{\sqrt{\sin^2\gamma-\sin^2\rho}}{\sin\rho\cos h}\end{aligned}\right\} \qquad [104a]$$

и интегрируем по частям, делается [93]

$$\int\limits_0^{\gamma}\frac{\varphi d\varphi\sin\varphi}{(1-\sin^2 h\sin^2\varphi)\sqrt{\sin^2\gamma-\sin^2\varphi}}=$$

$$=\frac{\pi\log\left(\dfrac{\cos h+\sqrt{1-\sin^2\gamma\sin^2 h}}{2\cos\gamma\cos^2\frac{1}{2}h}\right)}{2\cos h\sqrt{1-\sin^2\gamma\sin^2 h}}. \qquad (105)$$

* В оригинале вместо множителя $(-1)^n$ под знаком логарифма помещен в знаменателе множитель $\phi(-1)$.

◇ Вопрос о знаках этих корней обсуждался в сноске ◇ на стр. 388—389.

Значение этого интеграла может быть представлено строкой, где множитель при $\sin^{2n} h$ с целым показателем n будет *

$$\int_0^\gamma \frac{\varphi d\varphi \sin^{2n+1}\varphi}{\sqrt{\sin^2\gamma - \sin^2\varphi}} < \sin^{2n+2}\gamma \int_0^\gamma \frac{d\varphi}{\cos\varphi \sqrt{\cos^2\varphi - \cos^2\gamma}} <$$

$$< \frac{1}{2}\pi \sin^{2n+1}\gamma \operatorname{tang}\gamma.$$

Итак, строка для интеграла (105) и в том случае исчезает ◇, когда здесь вместо $\sin h$ ставим $\frac{1}{\sin h}$, лишь бы к тому $\sin h > \sin\gamma$. В таком случае интеграл (105) делается △

* Разлагая в ряд подинтегральную дробь в (105)

$$\frac{1}{1 - \sin^2 h \sin^2\varphi},$$

получим следующее выражение для этого интеграла:

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} \sin^{2n} h \int_0^\gamma \frac{\varphi \sin^{2n+1}\varphi d\varphi}{\sqrt{\sin^2\gamma - \sin^2\varphi}} = \sum a_n \sin^{2n} h.$$

Неравенства, приведенные в тексте, получаются в силу соотношений $\varphi < \operatorname{tg}\varphi$, $\sin\varphi < \sin\gamma$, $\cos\varphi > \cos\gamma$.

◇ Сходится, ибо члены ряда не превосходят членов геометрической прогрессии со знаменателем, меньшим единицы.

△ В предыдущем примечании [93] мы имели формулу

$$\int_0^\gamma \frac{\varphi \sin\varphi \, d\varphi}{\sqrt{\sin^2\gamma - \sin^2\varphi}\,(1 - \sin^2 h' \sin^2\varphi)} = \frac{\pi(r - h)}{2\cos h' \sqrt{1 - \sin^2 h' \cdot \sin^2\gamma}}.$$

Полагая $\sin h' = \frac{1}{\sin h_1}$, получим: $\operatorname{ch} h = \cos\left(\frac{\pi}{2} - h_1\right)$, откуда

$$h = i\left(\frac{\pi}{2} - h_1\right);$$

$$\cos h' = \operatorname{th} h = \operatorname{th}\left[i\left(\frac{\pi}{2} - h_1\right)\right] = i \operatorname{ctg} h_1; \ \operatorname{ctg} h' = i \cos h_1.$$

Но (см. [93])

$$r = \operatorname{Arsh}\left(\frac{\operatorname{ctg} h'}{\cos\gamma}\right) = \operatorname{Arsh}\left(\frac{i\cos h_1}{\cos\gamma}\right) = i \arcsin\left(\frac{\cos h_1}{\cos\gamma}\right),$$

так что

$$r - h = i\left[\arcsin\left(\frac{\cos h_1}{\cos\gamma}\right) - \frac{\pi}{2} + h_1\right] = i\left[h_1 - \arccos\left(\frac{\cos h_1}{\cos\gamma}\right)\right].$$

$$\int_0^{\gamma} \frac{\varphi\, d\varphi \sin\varphi}{(\sin^2 h - \sin^2\varphi)\sqrt{\sin^2\gamma - \sin^2\varphi}} = \frac{\pi\left(h - \arccos\dfrac{\cos h}{\cos\gamma}\right)}{2\sin h \cosh h\sqrt{\sin^2 h - \sin^2\gamma}}. \quad (106)$$

Для $h = \frac{1}{2}\pi$ оба интеграла дают одинаково*

$$\int_0^{\gamma} \frac{\varphi\, d\varphi \sin\varphi}{\cos^2\varphi \sqrt{\sin^2\gamma - \sin^2\varphi}} = \frac{\pi \sin^2 \frac{1}{2}\gamma}{\cos^2\gamma}. \quad (107)$$

Берем снова выражение (89) для прямого конуса с кругом в основании

$$P = \frac{1}{4}\pi(r\cos\varphi - h).$$

Если вводим сюда ρ полупоперечник круга, α угол ρ с ребром r◇, то согласно с уравнениями (4), (5) должны принимать

$$\cos r' \cos\alpha = \cos\rho', \quad \operatorname{tang}\alpha = \cos h' \operatorname{tang}\rho'.$$

После чего объем всего конуса делается△

---

* Удобно применить правило Лопиталя $\left(\text{при } h \to \frac{1}{2}\pi\right)$.

Интеграл (107) находится у Пуассона (Exercises du Calcul intégrale, t. I. Supplément. Cas VIII, стр. 42). Там же (cas IX, стр. 43) находится интеграл

$$\int_0^{\beta} \frac{\omega\, d\omega \sin\omega}{\sqrt{\sin^2\beta - \sin^2\omega}} = -\frac{\pi}{2}\ln\cos\beta,$$

который получается из (105) при $h = 0$, $\gamma = \beta$.

◇ Черт. 7а (обозначение λ нужно заменить на α).

△ Мы имеем

$$\ln\frac{\cos\alpha + \cos\rho'}{\cos\alpha - \cos\rho'} = \ln\frac{1 + \cos r'}{1 - \cos r'} = 2r,$$

$$\ln\frac{\operatorname{tg}\rho' + \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\rho' - \operatorname{tg}\alpha} = \ln\frac{1 + \cos h'}{1 - \cos h'} = 2h,$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\rho'} = \cos\varphi$$

[см. сноску ○ на стр. 371 и формулу (6)]. Заметим, что формула (89) дает объем *четверти* конуса.

$$P=\frac{1}{2}\pi\left\{\frac{\sin\alpha}{\sin\rho'}\log\frac{\cos\alpha+\cos\rho'}{\cos\alpha-\cos\rho'}-\log\frac{\operatorname{tang}\rho'+\operatorname{tang}\alpha}{\operatorname{tang}\rho'-\operatorname{tang}\alpha}\right\},$$

или

$$\frac{2}{\pi}P=\frac{\sin\alpha}{\sin\rho'}\log\left\{\cot\frac{1}{2}(\rho'+\alpha)\cot\frac{1}{2}(\rho'-\alpha)\right\}-$$
$$-\log\frac{\sin(\rho'+\alpha)}{\sin(\rho'-\alpha)}.$$

Угол α увеличивается с h и приближается к ρ' до того, что, наконец, без чувствительной погрешности можно принимать *

$$P=\frac{1}{2}\pi\frac{\rho'-\alpha}{\sin\alpha}\log\frac{1}{2}(\rho'-\alpha)-\pi\log\sin\alpha,$$

следовательно, с $h=\infty$ объем конуса с параллельными ребрами к высоте будет

$$P=-\pi\log\sin\alpha$$

или, все равно,

$$P=-\pi\log\sin\rho'. \qquad [107a]$$

Для всякого другого конуса с произвольным основанием и которого ребра параллельны высоте

$$P=-\frac{1}{2}\int d\omega\log\sin\rho', \qquad (108)$$

где ω — угол, который описывает плоскость, проходя через ось конуса, ρ — расстояние от конца высоты внизу до окружности основания.

---

* Предыдущую формулу легко представить в виде

$$\frac{2P}{\pi}=\left(1-\frac{\sin\alpha}{\sin\rho'}\right)\ln\sin\frac{\rho'-\alpha}{2}+$$
$$+\frac{\sin\alpha}{\sin\rho'}\ln\left\{\operatorname{ctg}\frac{\alpha+\rho'}{2}\cos\frac{\rho'-\alpha}{2}\right\}-\ln\frac{\sin(\rho'+\alpha)}{2\cos\frac{\rho'-\alpha}{2}},$$

после чего получаем формулу [107a]:

$$\lim\frac{2P}{\pi}=\ln\operatorname{ctg}\rho'-\ln\frac{\sin 2\rho'}{2}=-2\ln\sin\rho'.$$

Между тем уравнение (90) для $h = \infty$ и, следовательно, для $h' = 0$ делается *

$$P = \frac{1}{2}\int dx' \log \cot \frac{1}{2} y'.$$

После чего

$$-\int d\omega \log \sin \rho' = \int dx' \log \cot \frac{1}{2} y', \tag{109}$$

где x берется от конца оси на линии, от которой считается угол ω; если же первый интеграл начинается с $\omega = 0$ и оканчивается с $\omega = \frac{1}{2}\pi$, то второй берется от $x' = \frac{1}{2}\pi$ до $y' = \frac{1}{2}\pi$ ◇. Здесь зависимость переменных определяется уравнениями △

$$\sin \rho' = \sin x' \sin y', \quad \operatorname{tang} \omega = \cos y' \operatorname{tang} x'.$$

Так что произвольная функция y' от x' ограничивается только тем условием, чтобы x' был действительный угол для $y' = \frac{1}{2}\pi$.

Для примера берем

$$\sin^2 \alpha = \sin^2 x' \sin^2 y' + \sin^2 \beta \cos^2 x' \;○$$

с постоянными α, β. Находим ⊗

---

* Множитель $r \sin^2 h'$ во втором интеграле в (90) (см. сноску ◇ на стр. 376) имеет предел нуль. Действительно, согласно (1) имеем

$$\lim r \sin^2 h' = \lim \frac{r \sin^2 r'}{\sin^2 \rho'} = \frac{1}{\sin^2 \rho'} \lim \frac{r}{\operatorname{ch}^2 r} = 0.$$

◇ Наоборот, интегрировать следует от $y' = \frac{1}{2}\pi$ до $x' = \frac{1}{2}\pi$.

△ См. формулы (1) и (5).

○ Частный случай кривой $y = f(x)$, ограничивающей основание конуса.

⊗ Согласно (1) и (4) имеем

$$\sin \rho' = \sin x' \sin y', \quad \cos x' = \cos \rho' \cos \omega.$$

Подставляя эти значения в уравнение кривой, находим

$$\sin^2 \alpha = \sin^2 \rho' + \sin^2 \beta \cos^2 \rho' \cos^2 \omega,$$

откуда и получаем [109a].

$$\sin^2 \rho' = \frac{\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta \cos^2 \omega}{1 - \sin^2 \beta \cos^2 \omega}. \qquad [109a]$$

Уравнение (109) теперь делается *

$$-\frac{1}{2\sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta}} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\omega \log \left(\frac{\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta \cos^2 \omega}{1 - \sin^2 \beta \cos^2 \omega} \right) =$$

$$= \int_\alpha^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dy \cos y \sin y \log \cot \frac{1}{2} y}{(\sin^2 y - \sin^2 \beta)\sqrt{\sin^2 y - \sin^2 \alpha}}.$$

Ставя сюда значение второго интеграла [см. ур. (91)], получим

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\omega \log \left(\frac{\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta \cos^2 \omega}{1 - \sin^2 \beta \cos^2 \omega} \right) = -\pi \log \left(\cot \frac{1}{2} \beta \tang \frac{1}{2} \gamma \right), \qquad [109b]$$

где $\sin \beta = \sin \alpha \sin \gamma$.

Отсюда нетрудно заключить, что для произвольных углов α, β ◊

---

* Из уравнения кривой легко получаем

$$\sin^2 x' = \frac{\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta}{\sin^2 y' - \sin^2 \beta}, \quad \cos^2 x' = \frac{\sin^2 y' - \sin^2 \alpha}{\sin^2 y' - \sin^2 \beta}.$$

Дифференцируя первое из этих соотношений и заменяя $\sin x'$ и $\cos x'$ по этим формулам, легко находим

$$dx' = -\frac{\sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta} \cos y' \sin y' \, dy'}{\sqrt{\sin^2 y' - \sin^2 \alpha}\,(\sin^2 y' - \sin^2 \beta)}.$$

После подстановки этого значения dx' в (109) мы и получаем требуемое соотношение.

◊ Интеграл I, стоящий в левой части равенства [109b], легко преобразуется к виду

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega \ln \frac{1 - \sin^2 \gamma \cos^2 \omega}{1 - \sin^2 \beta \cos^2 \omega} + \ln \sin^2 \alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega = I_1 + \pi \ln \sin \alpha,$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\omega \log\left(\frac{1-\sin^2\alpha\cos^2\omega}{1-\sin^2\beta\cos^2\omega}\right) = 2\pi\log\left(\frac{\cos\frac{1}{2}\alpha}{\cos\frac{1}{2}\beta}\right), \tag{110}$$

или, полагая $\beta = 0$,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\omega \log(1-\sin^2\alpha\cos^2\omega) = 2\pi\log\left(\cos\frac{1}{2}\alpha\right). \tag{111}$$

Когда сюда ставим

$$\cos\alpha = \frac{1-a}{1+a}$$

и $\frac{1}{2}\omega$ вместо ω, то получим для $a<1$ *

откуда

$$I_1 = \pi\ln\left(\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta\cdot\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\gamma\cdot\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\right) =$$

$$= \pi\ln\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}\right) = 2\pi\ln\frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}.$$

* Из этого значения косинуса находим

$$\sin^2\alpha = \frac{4a}{(1+a)^2};\ \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(1+\cos\alpha) = \frac{1}{1+a},$$

и интеграл (111) принимает вид

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega\ \ln\left[(1+a)^2 - 4a\cos^2\omega\right] -$$

$$-2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1+a)\,d\omega = -\pi\ln(1+a).$$

Но

$$1+2a+a^2-2a(1+\cos 2\omega) = 1+a^2-2a\cos 2\omega$$

и, заменяя 2ω на ω, придем к [111a], где $a<1$.

Соотношение [111b] получается аналогично.

$$\int\limits_0^{\pi} d\omega \log(1 + a^2 - 2a\cos\omega) = 0. \qquad [111a]$$

Для $a > 1$ и, полагая

$$\cos\alpha = \frac{a-1}{a+1},$$

напротив,

$$\int\limits_0^{\pi} d\omega \log(1 + a^2 - 2a\cos\omega) = 2\pi \log a, \qquad [111b]$$

как нашел и Г. Пуассон [Journal de l' école polyt. Cah. 17 *].

Интегрирование по частям в уравнении (110) дает для всяких углов $\alpha < \frac{1}{2}\pi$, $\beta < \frac{1}{2}\pi$◇:

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\omega\, d\omega \sin\omega \cos\omega}{(1-\sin^2\alpha\cos^2\omega)(1-\sin^2\beta\cos^2\omega)} =$$

* Другие примеры, каким образом одному интегралу могут принадлежать различные значения, находим тоже у Г. Пуассона (Mémoires sur le calcul num. des intégr. définies. Mémoires de l'Acad. scien. de l'Inst. de France, 1823, p. 601). Тут можно видеть интеграл, который бывает вместе 0 и 2. Если что-нибудь подобное из моих интегралов вывел и тот, кто написал в № 41 Сына Отечества 1834 года критику на мое сочинение *о началах Геометрии*, то или должен быть он несведущ, или по крайней мере слишком поспешен в своем суждении, не различая тех случаев, когда интегралу принадлежат различные значения, и называя их *нелепыми*. [*Примечание Лобачевского.*] (По поводу этого примечания Лобачевского см. примечание [[90]]).

◇ $$\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} d\omega \ln\frac{1-\sin^2\alpha\cos^2\omega}{1-\sin^2\beta\cos^2\omega} = \left[\omega \ln \frac{1-\sin^2\alpha\cos^2\omega}{1-\sin^2\beta\cos^2\omega}\right]_0^{\frac{1}{2}\pi} -$$

$$-2\int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\omega d\omega\cdot\sin\omega\cos\omega\,(\sin^2\alpha - \sin^2\beta)}{(1-\sin^2\alpha\cos^2\omega)(1-\sin^2\beta\cos^2\omega)};$$

проинтегрированная часть обращается в нуль.

$$= \frac{\pi}{\cos^2\alpha - \cos^2\beta} \log \left(\frac{\cos \frac{1}{2} \alpha}{\cos \frac{1}{2} \beta} \right). \qquad (112)$$

Отсюда нетрудно видеть, что *

$$\int_0^\pi \frac{\omega\, d\omega \sin \omega}{(1 - \cos\alpha \cos\omega)(1 - \cos\beta\cos\omega)} =$$

$$= \frac{\pi}{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)} \log \left(\frac{1 + \operatorname{tang} \frac{1}{2} \alpha}{1 + \operatorname{tang} \frac{1}{2} \beta} \right). \qquad (113)$$

Для $\alpha = \beta$ это уравнение делается ◊

$$\int_0^\pi \frac{\omega\, d\omega \sin\omega}{(1 - \cos\alpha\cos\omega)^2} = \frac{\pi}{\sqrt{2} \sin\alpha \cos \frac{1}{2}\alpha \sin\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\alpha\right)}. \qquad (114)$$

Интеграл (111) находим помощию двойного интегрирования, полагая

$$u = \iint \frac{d\omega\, da \cos^2\omega}{1 + a\cos^2\omega}$$

от $\omega = 0$, $a = 0$ до $\omega = \frac{1}{2}\pi$ и до a неопределенного. Интегрирование в отношении к a дает

$$u = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\omega \log(1 + a\cos^2\omega).$$

---

* Вычисления проведены в примечании [94].

◊ Следует положить

$$\frac{1 + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}} = 1 + \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{1 + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}} = 1 + \frac{z}{\left(\cos\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\beta}{2}\right)\cos\frac{\alpha}{}},$$

где $z = \sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$, и воспользоваться соотношением

$$\lim_{z \to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{z}{a}\right)}{z} = \frac{1}{a}.$$

Интегрирование сперва в отношении к ω, потом в отношении к a будет такое *:

$$u = \frac{1}{2}\pi\log a - \iint \frac{da\, d\omega}{a(1+a\cos^2\omega)} =$$

$$= \frac{1}{2}\pi\log a - \frac{1}{2}\pi\int\frac{da}{a\sqrt{1+a}} = \pi\log\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+a}).$$

Итак,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\omega\log(1+a\cos^2\omega) = \pi\log\left(\frac{1+\sqrt{1+a}}{2}\right). \qquad (115)$$

Само по себе разумеется, что сюда не принадлежат те случаи, когда елемент под знаком интеграла делается нулем для какого-нибудь значения ω. Можно, следовательно, полагать $a = -\sin^2\alpha$ и тогда получим интеграл (111). Можем еще принимать $a = \operatorname{tang}^2\alpha$ для всякого угла α и, таким образом, находим

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\omega\log(1+\operatorname{tang}^2\alpha\cos^2\omega) = \pi\log\left(\frac{\cos^2\frac{1}{2}\alpha}{\cos\alpha}\right). \qquad (116)$$

Для конуса, которого P объем, h высота, c ребро, φ угол между h и c, ω угол плоскостей, проведенных через h, найдено было [урав. (88)]

$$dP = \frac{1}{2}d\omega(c\cos\varphi - h).$$

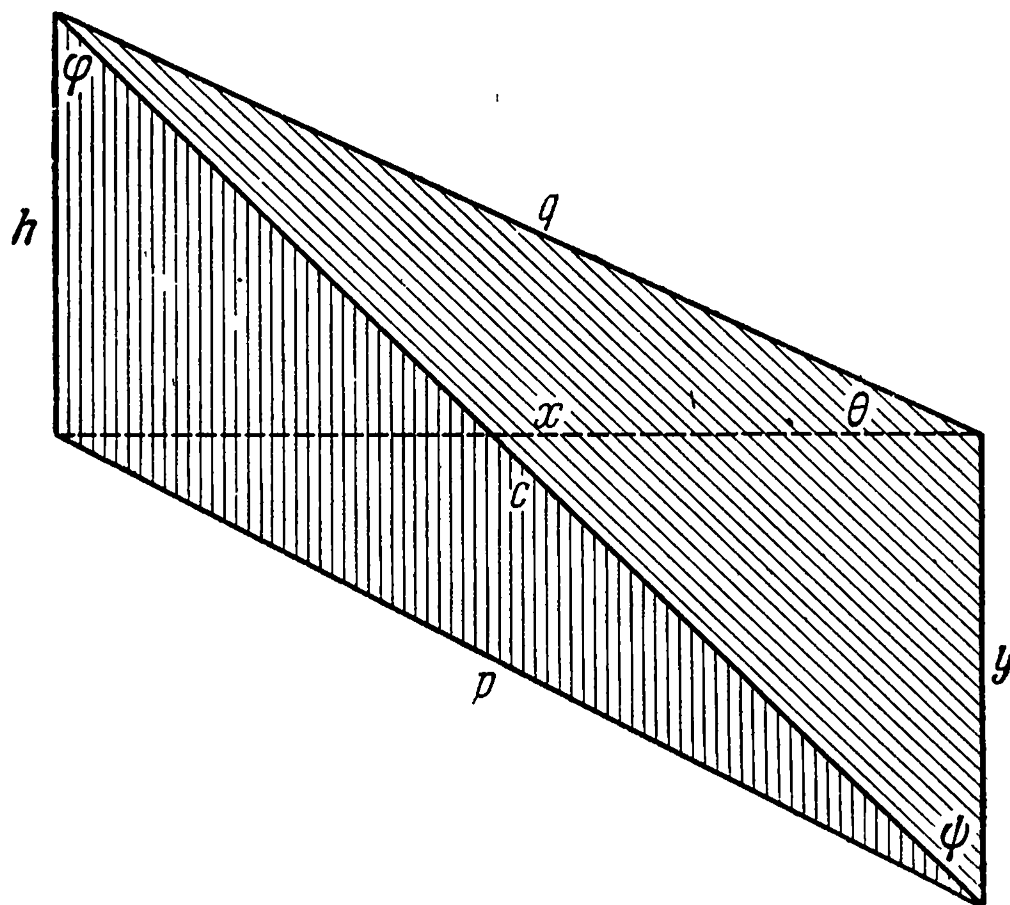
*** Эту выкладку следует понимать так (см. интегральную формулу(**) в сноске * на стр. 377):**

$$u = \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^a d\omega\, da\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a(1+a\cos^2\omega)}\right) =$$

$$= \int_0^a \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a\sqrt{1+a}}\right)da = \pi\ln\frac{1+\sqrt{1+a}}{2}.$$

Подставить нижний предел $a = 0$ в выражение $\frac{1}{2}\pi\ln a$ невозможно.

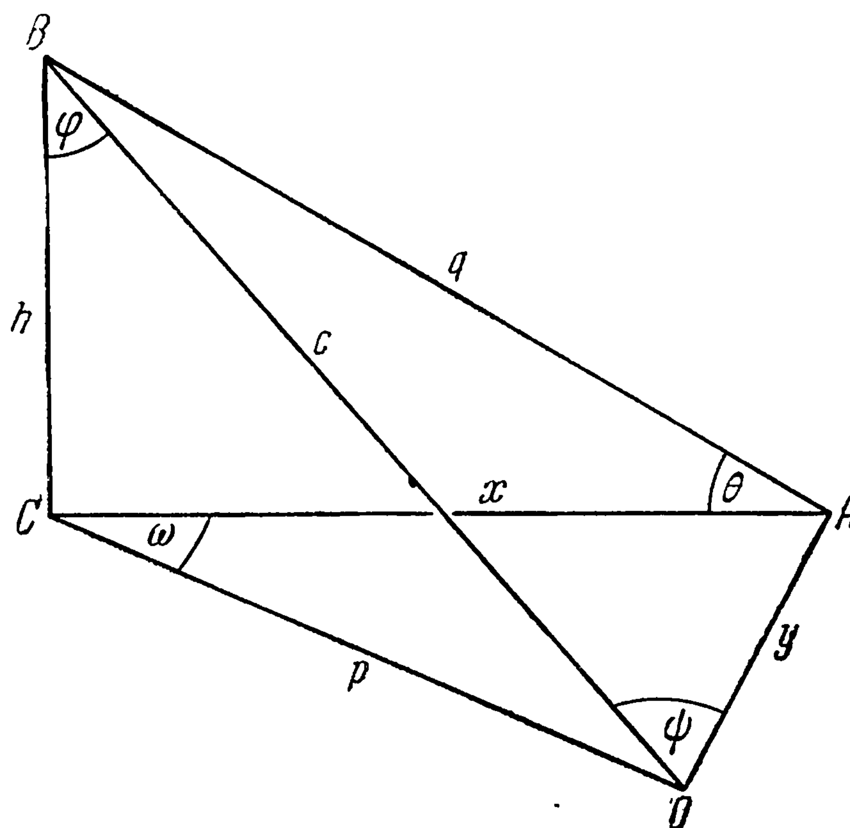
Такой конус делается пирамидой, когда основание треугольник, где пусть x, y — катеты, из которых y лежит против ω



Чер. 8

(чер. 8)* и может быть принят за высоту той же пирамиды с треугольным основанием из перпендикулярных друг к другу линий x, h. Называем здесь q гипотенузу, θ угол против h,

* Речь идет о прямоугольной пирамиде, ограниченной четырьмя прямоугольными треугольниками (см. черт. 8а). На черт. 8 Лобачевского изображена развертка двух граней этой пирамиды (x, h. q) и (x, y, p) и в искаженной форме треугольники (p, h, c) и (q, y, c). По образцу черт. 7 следовало бы заштриховать треугольники, изображенные в натуральную величину; Лобачевский же поступает на черт. 8 наоборот.



Черт. 8а

ψ угол между c и y. Объем пирамиды может, следовательно, быть выражен еще так:

$$P = \frac{1}{2}\int d\theta\,(c\cos\psi - y).$$

Сравнение двух значений P дает

$$\int d\omega\,(c\cos\varphi - h) = \int d\theta\,(c\cos\psi - y). \tag{117}$$

Первый интеграл начинается с $\omega = 0$ и предполагает h постоянным, второй начинается с $\theta = 0$ и предполагает y постоянным. Если означаем p гипотенузу в треугольнике из катетов x,y, то зависимость всех чисел в обоих интегралах будет выражена уравнениями*:

$$\left.\begin{array}{ll} \cos c'\cos\varphi = \cos h', & \cos c'\cos\psi = \cos y', \\ \sin c' = \sin h'\sin p', & \sin c' = \sin y'\sin q', \\ \operatorname{tang} p' = \operatorname{tang} y'\sin\omega, & \operatorname{tang} c' = \operatorname{tang} q'\sin\psi, \\ \cos p'\cos\omega = \cos x', & \cos q'\cos\theta = \cos x', \\ \operatorname{tang}\omega = \cos y'\operatorname{tang} x', & \operatorname{tang}\theta = \cos h'\operatorname{tang} x'. \end{array}\right\} \quad [117a]$$

Если $y = \infty$, то, как видели выше [урав. (108)],

$$P = -\frac{1}{2}\int d\theta \log\sin q', \tag{118}$$

или

$$P = \frac{1}{4}\int d\theta \log\frac{\cos^2\theta}{\sin(x'-\theta)\sin(x'+\theta)}{}^{\diamond}, \tag{119}$$

---

* См. соответственно соотношения (4), (1), [6a], (4), (5) для соотношений в первом столбце и те же соотношения — для второго столбца.

◇ Согласно [117a] имеем

$$\sin^2 q' = 1 - \frac{\cos^2 x'}{\cos^2\theta} = \frac{\cos^2\theta - \cos^2 x'}{\cos^2\theta} =$$

$$= \frac{\cos 2\theta - \cos 2x'}{2\cos^2\theta} = \frac{\sin(x'-\theta)\sin(x'+\theta)}{\cos^2\theta}.$$

где x' — постоянное. Дифференцируя уравнение (118) сперва в отношении к θ, потом в отношении к q, получим

$$d^2P = -\frac{1}{2}\, d\theta\, dq' \cot q'.$$

Если ж с таким изменением q переменяем в зависимости с ним x', то находим *

$$dq' \cot q' = \frac{dx' \sin x' \cos x'}{\cos^2\theta - \cos^2 x'}.$$

После чего

$$d^2P = -\frac{1}{2}\frac{d\theta\, dx' \sin x' \cos x'}{\cos^2\theta - \cos^2 x'}.$$

Интегрирование в отношении к θ дает ◇

$$dP = -\frac{1}{4}\, dx' \log\left(\frac{1 + \cot x' \operatorname{tang}\theta}{1 - \cot x' \operatorname{tang}\theta}\right), \tag{120}$$

или △

$$dP = -\frac{1}{2} h\, dx'. \tag{121}$$

Вставляя сюда значение x', получим ○

$$P = \sin 2\theta \int \frac{h\, dh}{e^{2h} + e^{-2h} - 2\cos 2\theta}, \tag{122}$$

---

* Дифференцируя функцию $\ln \sin^2 q'$ с помощью соотношения предыдущей сноски, получим (считая θ постоянным)

$$d(\sin^2 q') : \sin^2 q' = d\left(\frac{\cos^2\theta - \cos^2 x'}{\cos^2\theta'}\right) : \frac{\cos^2\theta - \cos^2 x'}{\cos^2\theta},$$

или

$$\operatorname{ctg} q'\, dq' = \frac{\sin x' \cos x' dx'}{\cos^2\theta - \cos^2 x'}.$$

◇ Интегральная формула в сноске ° на стр. 371—372.

△ См. последнюю формулу [117а] и формулу в сноске ○ на стр. 371—372.

○ Дифференцируя соотношение

$$\operatorname{ctg} x' = \operatorname{ctg}\theta \cos h' = \operatorname{ctg}\theta \operatorname{th} h,$$

получаем

$$dx' = -\frac{\operatorname{ctg}\theta\, dh}{\operatorname{ch}^2 h(1 + \operatorname{ctg}^2\theta \operatorname{th}^2 h)} = -\frac{\cos\theta \sin\theta\, dh}{\cos^2\theta \operatorname{sh}^2 h + \sin^2\theta \operatorname{ch}^2 h} =$$

$$= -\frac{2\sin 2\theta\, dh}{(1 + \cos 2\theta)(\operatorname{ch} 2h - 1) + (1 - \cos 2\theta)(1 + \operatorname{ch} 2h)} = -\frac{\sin 2\theta\, dh}{\operatorname{ch} 2h - \cos 2\theta},$$

откуда и следует (122).

где θ рассматривается постоянным. Сравнение интегралов (119), (120) и (122) приводит к уравнениям*

$$\int_0^\theta d\theta \log\left\{\frac{\cos^2\theta}{\cos(x-\theta)\cos(x+\theta)}\right\} = -\int_0^x dx \log\left\{\frac{\cos(x+\theta)}{\cos(x-\theta)}\right\}, \quad (123)$$

$$\frac{1}{4}\int_{x'}^{\frac{1}{2}\pi} dx' \log\left\{\frac{\sin(x'+\theta)}{\sin(x'-\theta)}\right\} = \sin 2\theta \int_0^h \frac{h\,dh}{e^{2h}+e^{-2h}-2\cos 2\theta}. \quad (124)$$

Первое из этих уравнений поверяется дифференцированием в отношении к x и θ; второе значением

$$h = \frac{1}{2}\log\left\{\frac{\sin(x'+\theta)}{\sin(x'-\theta)}\right\}.$$

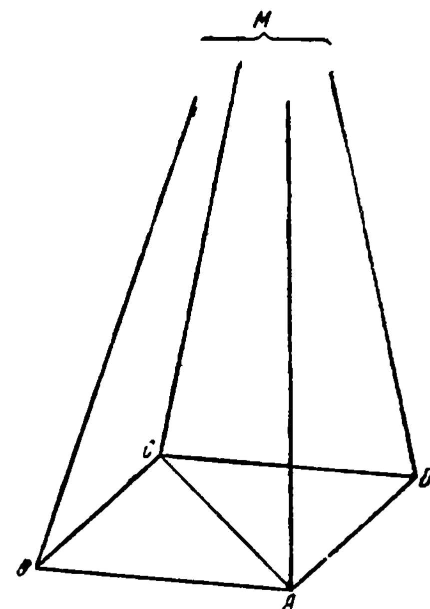
Пусть основание конуса будет четыреугольник, которого бока y, x, ξ, η (чер. 3) ◇ перпендикулярны друг к другу, а высота конуса, поставленная в точке соединения x с ξ, пусть простирается бесконечно. Объем такого конуса будет [урав. (121)]

$$P = -\frac{1}{2}\int y\,dx'$$

---

* Соотношение (124) получается из (120) и (122). Для получения соотношения (123) нужно сравнить соотношения (119) и (120), заменив в них x' через $\frac{\pi}{2} - x$.

◇ Речь идет о четырехугольной пирамиде с основанием — трипрямоугольником, изображенным на черт. 3 на стр. 330; высота пирамиды, восстановленная из вершины прямого угла (x, ξ), простирается в бесконечность (см. черт. 8б).



Черт. 8б

и составляется из двух пирамид, которым основаниями служат прямоугольные треугольники с катетами x, y и ξ, η, где углы при высоте $\beta, \frac{1}{2}\pi - \beta$ против y, η. Итак,*

$$\int^{\frac{1}{2}\pi} y\,dx' = 2\sin 2\beta \int \frac{y\,dy}{e^{2y} + e^{-2y} - 2\cos 2\beta} +$$
$$+ 2\sin 2\beta \int \frac{\eta\,d\eta}{e^{2\eta} + e^{-2\eta} + 2\cos 2\beta}. \qquad [124a]$$

Здесь переменные β, y, x, η определяются взаимно уравнениями ◊

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang}\beta &= \cos y' \operatorname{tang} x', \\ \cos\xi' &= \cos y' \sin x', \\ \operatorname{tang}\eta' &= \sin y' \operatorname{tang} x'. \end{aligned}\right\} \qquad (125)$$

Рассматривая ξ' постоянным, находим △

$$\int y\,dx' = \frac{1}{2}\int dx' \log\left(\frac{\sin x' + \cos\xi'}{\sin x' - \cos\xi'}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\int dx' \log \frac{\operatorname{tang}\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}x' - \frac{1}{2}\xi'\right)}{\operatorname{tang}\left(\frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}\xi' - \frac{1}{4}\pi\right)}. \qquad [125a]$$

Последний интеграл представляет значение

$$\int du \log\operatorname{tang} u - \int dv \log\operatorname{tang} v,$$

когда интегрирование распространяется

---

* В формуле [124a] первый интеграл имеет пределы от x' до $\frac{1}{2}\pi$, второй — от 0 до y, третий — от 0 до η.

◊ См. (18), (26), (27).

△

$$\ln\frac{\sin x' + \cos\xi'}{\sin x' - \cos\xi'} = \ln\frac{1 + \frac{\cos\xi'}{\sin x'}}{1 - \frac{\cos\xi'}{\sin x'}} = \ln\frac{1 + \cos y'}{1 - \cos y'} = 2y.$$

$$\text{от } u = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}x' - \frac{1}{2}\xi' \quad \text{до} \quad u = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\xi',$$
$$v = \frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}\xi' - \frac{1}{4}\pi \qquad v = \frac{1}{2}\xi'.$$

Но к таким интегралам можно приложить

$$\int du \log \operatorname{tang} u = 0 \qquad \begin{cases} u = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\xi', \\ u = \frac{1}{2}\xi'. \end{cases}$$

После чего все три интеграла соединятся в один:

$$\int du \log \operatorname{tang} u \qquad \begin{cases} u = \frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}\xi' - \frac{1}{4}\pi, \\ u = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}x' - \frac{1}{2}\xi' \end{cases}$$

или, все равно, в такой

$$\int \frac{z\,dz}{e^z + e^{-z}} \qquad \begin{cases} z = \log \operatorname{tang}\left(\frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}\xi' - \frac{1}{4}\pi\right), \\ z = \log \operatorname{tang}\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}x' - \frac{1}{2}\xi'\right). \end{cases}$$

Так находим [95]

$$\int \frac{z\,dz}{e^z + e^{-z}} = 2\sin 2\beta \int_0 \frac{y\,dy}{e^{2y} + e^{-2y} - 2\cos 2\beta} +$$
$$+ 2\sin 2\beta \int_0 \frac{\eta\,d\eta}{e^{2\eta} + e^{-2\eta} + 2\cos 2\beta}. \qquad [125b]$$

Для $y = \infty$ также $\eta = \infty$; следовательно *,

---

* Верхние пределы в двух интегралах правой части [125b] обращаются в бесконечность, что позволяет объединить оба эти интеграла, вводя одинаковые обозначения для переменных интегрирования. При этом мы будем иметь

$$\frac{1}{e^{2y} + e^{-2y} + 2\cos 2\beta} + \frac{1}{e^{2y} + e^{-2y} - 2\cos 2\beta} = \frac{2(e^{2y} + e^{-2y})}{(e^{2y} + e^{-2y})^2 - 4\cos^2 2\beta}$$

и приходим к (126).

$$\int \frac{z\,dz}{e^z + e^{-z}} = 4\sin 2\beta \int\limits_0^\infty \frac{y\,dy\,(e^{2y} + e^{-2y})}{(e^{2y} + e^{-2y})^2 - 4\cos^2 2\beta}\,. \tag{126}$$

Между тем первые два из уравнений (125) для $y' = 0$ показывают, что $x' = \beta$, $\xi' = \frac{1}{2}\pi - \beta$. После чего уравнение (126), когда поставим сюда $\frac{1}{2}y$ вместо y и $\frac{1}{4}\beta$ вместо β, делается для всякого произвольного угла β*:

$$\int^\infty \frac{z\,dz}{e^z + e^{-z}} = \sin\frac{1}{2}\beta \int\limits_0^\infty \frac{y\,dy\,(e^{y} + e^{-y})}{e^{2y} + e^{-2y} - 2\cos\beta}\,, \tag{127}$$

где первый интеграл начинается с $z = \log\cot\frac{1}{4}\beta$ ◊.

Вот несколько примеров, которые придумал я на этот раз для применения Воображаемой Геометрии к Аналитике. Особенно заслуживает примечания, и с трудом могло бы иначе быть сделано, приведение неопределенных интегралов

$$\int \frac{dx \sin x \log\cot\frac{1}{2}x}{(a - \sin^2 x)\sqrt{b - \sin^2 x}}\,, \qquad \int \frac{x\,dx \sin x}{(a - \sin^2 x)\sqrt{b - \sin^2 x}}$$

к одному интегралу $\int dx \log\cos x$. Такое приведение показано в моем сочинении *о началах Геометрии*, когда составлял я всякую трехстороннюю пирамиду из других, которых ребра параллельны с бесконечною высотой.

Покуда в воображаемой Геометрии дело идет о линиях одной кривизны и площадях, такими линиями ограниченных,

---

* Преобразование интеграла в правой части (126) основано на соотношении

$$(e^{2y} + e^{-2y})^2 - 4\cos^2 2\beta = 4\,(\mathrm{ch}^2\, 2y - \cos^2 2\beta) =$$
$$= 2\,(\mathrm{ch}\, 4y + 1 - 2\cos^2 2\beta) = 2\,(\mathrm{ch}\, 4y - \cos 4\beta).$$

◊ Интеграл (127) вычислен здесь верно, как и в моем сочинении *о началах Геометрии*; но в статье под названием Géometrie imaginaire, которую послал я в Берлин к Г. Крелль для помещения в Журнале, прибавлен лишний множитель 2; другую ошибку там я сделал, опустивши из внимания, что угол β в одной только части уравнения надобно было принимать постоянным. [*Примечание Лобачевского.*]

еще вычисление может быть понимаемо, как повторение того же, какое должно выходить для линий на сфере с прибавлением к величине дуг множителя $\sqrt{-1}$*. Эту перемену дозволяет Аналитика во всяком роде уравнений и приводит всегда к новым и несомнительно верным заключениям. В измерении же линий двойной кривизны, поверхностей и объема тел нельзя более довольствоваться одним аналитическим изменением вида; напротив, еще требуется, чтобы представление в пространстве было возможным для нашего воображения. Кажется мне, что изложенное здесь новое Геометрическое учение ни в каком отношении не противно понятию о телах, и, переходя в аналитику, может обещать подобную пользу той, какую в применении оказывает употребительная Геометрия.

---

* Лобачевский имеет здесь в виду интерпретацию своей плоскости на сфере мнимого радиуса, отмечая, что аналогичная интерпретация невозможна для гиперболического пространства трех измерений.

ПРИЛОЖЕНИЯ



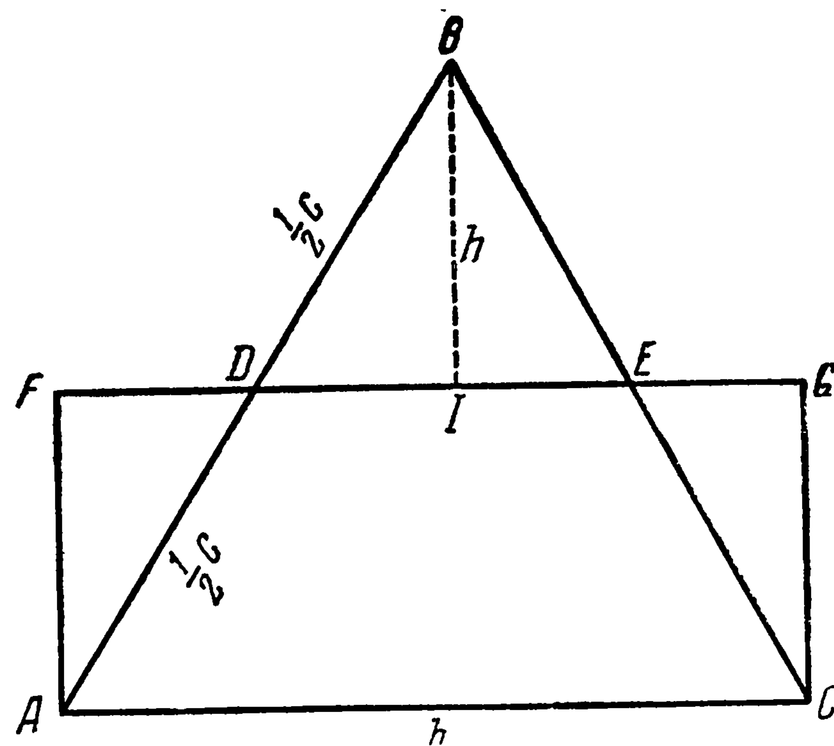
ПРИЛОЖЕНИЕ 1

ИЗМЕРЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ МНОГОУГОЛЬНИКОВ В ВООБРАЖАЕМОЙ ГЕОМЕТРИИ

ОТРЫВОК ИЗ СОЧИНЕНИЯ Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО «О НАЧАЛАХ ГЕОМЕТРИИ» *

. . . .

Измерение площадей основано в Геометрии на положениях [96]: 1-е. *Площади равны, когда они составляются из одинаковых частей, хотя бы и в другом порядке.* 2-е. *Площадь менее другой, если она в этой второй помещается, оставляя часть незакрытой.* 3-е. *Площадь уменьшается до бесконечности, когда хоть один бок ее так уменьшается, а другие не выходят за известную границу* ◊.



Чер. 1

Без сих положений нельзя дать общего способа для измерения площадей. Легко видеть, что действительное измерение основано на том же.

Начнем с треугольников, как таких фигур, из которых составляются все прочие прямолинейные.

В треугольнике ABC (чер. 1) делим два бока AB, BC

---

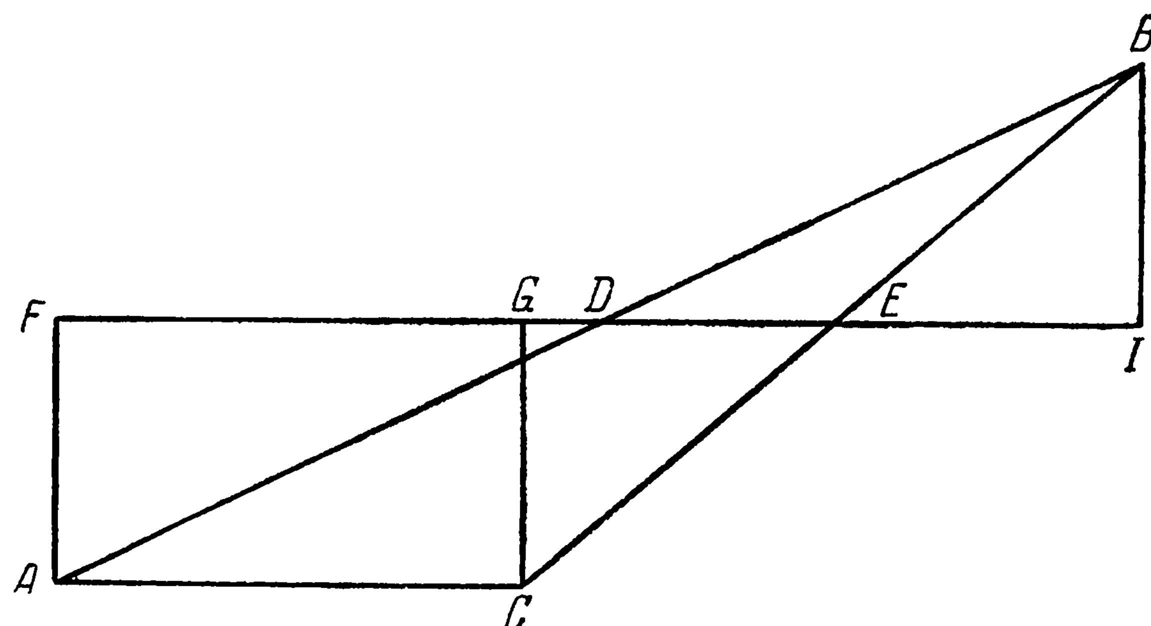
* См. Н. И. Лобачевский. Полн. собр. соч., т. I, Гостехиздат, 1946, стр. 219—222.

◊ Иначе говоря, если две стороны треугольника ограничены, а третья стремится к нулю, то площадь этого треугольника также стремится к нулю.

пополам. Через середины ведем линию DE и опускаем на нее перпендикулы AF, CG, BI из остреев треугольника ABC. Произойдут одинаковые треугольники AFD с DBI, CGE с BIE. Отсюда следует, что площадь треугольника ABC равна площади четыреугольника $AFGC$* и что площади всех треугольников на AC равны между собою, когда их вершины отстоят равно от DE — линии, проведенной чрез середину двух боков, соединяющих вершину B с основанием AC ◊. Полагаем $BI = h$,

---

* На черт. 1 изображен случай, когда точка I расположена между D и E; в этом случае площади треугольников DBI и BIE входят со знаком «плюс» в площадь треугольника ABC. При другом положении точки I



Черт. 1а

в площадь треугольника ABC входит уже не сумма, а разность площадей треугольников DBI и BIE. Однако равенство площадей фигур ABC и $AFGC$ сохраняется: в случае, изображенном на черт. 2, имеем

$$S_{ABC} = S_{ADEC} + S_{DBI} - S_{BIE} = S_{ADEC} + S_{AFD} - S_{CGE} = S_{AFGC}.$$

◊ Иначе говоря, если A и C — две точки, расположенные по одну сторону прямой DE на равных расстояниях $AF = CG = h$ от нее, а B — точка, расположенная по другую сторону этой прямой на том же расстоянии $BI = h$, то площадь треугольника ABC не зависит от произвола в положении точки B. Действительно, каждый такой треугольник равновелик четырехугольнику $AFGC$. Заметим еще, что сумма углов треугольника ABC равна сумме углов FAC и GCA (см. черт. 1 и 1а). Таким образом, не только площадь, но и сумма углов треугольника ABC не зависит от положения точки B (при условии $BI = h$, т. е. если точка B будет перемещаться по эквидистанте).

$\angle BAC = A$, $AB = c$. В $\triangle AFD$ находим

$$\sin A = \frac{\cos \mathrm{F}(h)}{\cos \mathrm{F}\left(\frac{c}{2}\right)} *,$$

уравнение, возможное, как скоро c не менее $2h$, и которое определяет угол A, когда даны h и c. Обратно, находим c, когда даны A и h. Так всякий треугольник ABC превращается в прямоугольный, которого катеты будут AC и линия c', определяемая уравнением

$$\cos \mathrm{F}\left(\frac{c'}{2}\right) = \sin A \cos \mathrm{F}\left(\frac{c'}{2}\right).$$

Пусть теперь в двух треугольниках бока не равны, например $c < c'$, в одном из них A' угол при c': то из предыдущего легко видеть, что без перемены площади этого последнего треугольника вместо бока c' можно поставить c, когда вместо A' поставится угол A'' из уравнения

$$\sin A'' = \sin A' \frac{\cos \mathrm{F}\left(\frac{c'}{2}\right)}{\cos \mathrm{F}\left(\frac{c}{2}\right)}.$$

Итак, при сравнении площадей двух треугольников всегда можно полагать, что у них по одному боку равному, который и будем называть основанием. Далее, каждый из сих треугольников, оставаясь на том же основании, может быть превращен в прямоугольный ◇. В этом виде два треугольника необходимо

* Эта формула [через F (a) Лобачевский обозначает угол параллельности для отрезка a; в примечаниях применяется обозначение $\Pi(a)$] — *неверная*. Однако заключение, к которому Лобачевский ниже приходит на основе этой формулы: «... Итак, при сравнении площадей двух треугольников всегда можно полагать, что у них по одному боку равному...» оказывается все же верным (см. примечание [[97]]).

◇ Лобачевский хочет сказать, что для всякого треугольника ABC существует равновеликий ему треугольник $AB'C$ с тем же основанием AC и прямым углом $B'AC$, прилежащим к основанию. Это утверждение, вообще говоря, *неверно*. Однако для доказательства теоремы о том, что сумма углов треугольника является мерой его площади, нет необходимости превращать данные треугольники в равновеликие с ними *прямоуголь-*

одинаковы, как скоро суммы их углов равны, иначе разности их площадей произвели бы треугольник, где сумма углов π. Вообще, следовательно, площади двух треугольников равны, если в них суммы углов равны [97, 98].

Когда же площадь A треугольника более площади A' другого, то сумма углов первого, которую означим $\pi - s$, менее суммы углов $\pi - s'$ второго, следовательно, $s > s'$. В этом можно также увериться, полагая один треугольник на другой равными основаниями и прямыми углами* [99]. Разность обоих треугольников будет тоже треугольник, где сумма углов $\pi - (s - s') < \pi$.

Пусть $s' = \frac{n}{m} s$, где $n < m$ целые числа. Называем в треугольнике A катеты a, b; означаем к тому α, β такие линии, чтобы

$$F(a) + F(\alpha) = \frac{\pi}{2},$$

$$F(b) + F(\beta) = \frac{\pi}{2}.$$

Применяя сюда уравнения (8), находим ◊

$$s = F(\alpha + \beta).$$

Если означаем c, γ такие линии, что

$$F(c) + F(\gamma) = \frac{\pi}{2},$$

$$F(\alpha + \gamma) = \frac{n}{m} s,$$

то площадь прямоугольного треугольника из катетов a, c будет A'. Далее, если бы в последнем уравнении вместо n ставили все числа от 1 до m по порядку, то различные отсюда значения c

---

ные треугольники, а достаточно показать, что два треугольника с общим основанием могут быть превращены в два равновеликих с ними треугольника *с общим углом при основании*, причем этот угол может и не быть прямым.

* Вместо «прямыми углами» следует сказать «равными углами» (см. примечание [98]).

◊ Это рассуждение пояснено в примечании [100].

разделили б треугольник A на m равных частей*, из которых n должны составить A'; следовательно, $A' = \frac{s'}{s}A$.

Должно заметить, что при делении треугольника A на m частей катет b разделится тоже на m частей; следовательно, когда содержание $\frac{s}{s'}$ не выражается точно содержанием целых чисел, то по крайней мере с увеличением чисел n и m потребуется пренебречь треугольником, которого один бок может быть сделан как угодно малым [100].

Итак, площади двух треугольников содержатся как недостатки в суммах углов их до двух прямых◊. Мы будем принимать этот недостаток в сумме углов до π за самую площадь треугольника, оставляя до времени неопределенным тот треугольник, которого площадь единица.

Означая a, b катеты прямоугольного треугольника, Δ — его площадь, находим △

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\Delta = \cos F\left(\frac{a}{2}\right)\cos F\left(\frac{b}{2}\right).$$

---

* Здесь Лобачевский неявно пользуется *аддитивностью* площади.

◊ Предыдущими рассуждениями это положение доказано Лобачевским только для треугольников, которые можно превратить в равновеликие прямоугольные треугольники. Но оно справедливо и для любых треугольников, ибо всякий треугольник можно высотой разложить на два прямоугольных треугольника.

△ Пользуясь выражением $s = \Pi(\alpha + \beta)$ для дефекта (см. примечание [100]), находим

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Delta = \operatorname{tg}\frac{1}{2}s = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(\alpha+\beta) = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(\alpha)\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(\beta) =$$

$$= \operatorname{tg}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \Pi(a)\right)\operatorname{tg}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \Pi(b)\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\Pi(a)\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\Pi(b)\right) =$$

$$= \frac{1 - \operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(a)}{1 + \operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(a)}\cdot\frac{1 - \operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(b)}{1 + \operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(b)} = \frac{1 - e^{-a}}{1 + e^{-a}}\cdot\frac{1 - e^{-b}}{1 + e^{-b}} =$$

$$= \operatorname{th}\frac{a}{2}\operatorname{th}\frac{b}{2} = \cos\Pi\left(\frac{a}{2}\right)\cos\Pi\left(\frac{b}{2}\right).$$

Если a и b настолько малы, что кубами (и высшими степенями) их можно пренебречь, то имеем $\operatorname{th}\frac{a}{2} \approx \frac{a}{2}$, $\operatorname{th}\frac{b}{2} \approx \frac{b}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Delta \approx \frac{1}{2}\Delta$ и потому $\Delta \approx \frac{ab}{2}$.

Когда a, b чрезвычайно малы, так что можно пренебрегать кубы и вы[с]ш[и]е степени, то

$$\Delta = \frac{ab}{2},$$

как в обыкновенной Геометрии принимается.

Площадь многоугольника с n боками будет недостаток в сумме его углов до $(n-2)\pi$ *.

---

* Действительно, для треугольников дефект и площадь совпадают, а так как и дефект, и площадь аддитивны, то это совпадение имеет место для любого многоугольника (ибо всякий многоугольник можно разбить на треугольники, см. примечание [7]). Таким образом, здесь Лобачевский снова (ср. сноску * на стр. 419) пользуется *аддитивностью* площади, хотя эта аддитивность не была включена им в число основных положений (стр. 415).

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

РЕЧЬ О ВАЖНЕЙШИХ ПРЕДМЕТАХ ВОСПИТАНИЯ *

Вот уже год прошел, любезные мои товарищи, как по избранию вашему, несу я на себе должность, которой почасти, важность и трудности служат доказательством лестной вашей ко мне доверенности. Не смею жаловаться на то, что Вы захотели отозвать меня от любимых мною занятий, которым долгое время предавался я по склонности. Вы наложили на меня новые труды и чуждые до того мне заботы; но я не смею роптать, потому что вы предоставили мне и новые средства быть полезным. Я принял ваш вызов, потому что уважал вашим мнением; потому что не хотел противиться общему желанию; потому что сам первый не мог оправдать того, кто на моем месте вздумал бы отказаться. ⟨. . . . .⟩

Пусть справедливо могу жаловаться на слабость сил моих и способность; но могут ли недостатки извинить меня, когда ревность к службе должна вознаграждать их ⟨. . . . .⟩

Итак, все, чего бы желать надобно, наконец, дано. Спрашивается, мы все ли исполняли, что от нас требовалось? Вот как трудно мне успокоить мою совесть, когда я обращаюсь мыслями на первый год моего управления делами университета. Вот как трудно мне в этот первой срок давать отчет за себя, за весь университет; надеяться на одобрение моих товарищей; родителей, которых дети воспитываются в сем заведении; всех

* Речь Н. И. Лобачевского на торжественном собрании Казанского университета 5 июля 1828 г.

посетителей, которые пришли быть судьями в общем деле и могли бы справедливо быть строгими судьями.

Испрашиваю снисхождения Вашего, пп. пп., если принужден умолчать о том, что не почитаю достойным Вашего внимания. Пусть этот протекший год дозволено мне будет называть годом испытания, желал бы следующий иметь право назвать годом исполнения, и последний в трехлетии — годом торжества моего.

Я сравниваю теперь себя с кормчим, который, не доверяя опытности, держался берегов; наконец, решается плыть в открытое море, и не робкое путешествие свое рассказывать, но советов просить должен. В воспитании юношества, в сем важном деле, где я по званию своему участвую более других членов Университета, в исполнении сей важной обязанности прошу ваших советов. Осмеливаюсь подвергнуть вашему суждению мои мысли, полагая, что они заключают в себе первые основания нравственности и могут указывать на те правила, которым следовать обязаны наставники. Ими намерен и я руководствоваться, как путешественник, чтобы не сбиться с пути, смотрит на приметы, расставленные по дороге.

В каком состоянии, воображаю, должен бы находиться человек, отчужденный от общества людей, отданный на волю одной дикой природе. Обращаю потом мысли к человеку, который среди устроенного, образованного гражданства последних веков просвещения высокими познаниями своими составляет честь и славу своего отечества. Какая разность; какое безмерное расстояние разделяет того и другого. Эту разность произвело воспитание. Оно начинается от колыбели, приобретается сперва одним подражанием, постепенно развертывается ум, память, воображение, вкус к изящному, пробуждается любовь к себе, к ближнему, любовь славы, чувство чести, желание наслаждаться жизнию. Все способности ума, все дарования, все страсти, все это обделывает воспитание, соглашает в одно стройное целое, и человек, как бы снова родившись, является творение в совершенстве.

Наружный вид его, возвышенное чело, взор, который всюду устремляется, все созерцает вверху, вокруг себя; черты лица, в которых изображается чувственность, покоренная уму,— все показывает, что он родился быть господином, повелителем, царем природы. Но мудрость, с которой он должен править с наследственного своего трона, не дана ему от рождения: она приобретается учением.

В чем же должна заключаться эта мудрость? Чему должно нам учиться, чтобы постигнуть своего назначения? Какие способности должны быть раскрыты и усовершенствованы, какие должны потерпеть перемены; что надобно придать, что отсечь, как излишнее, вредное?

Мое мнение: ничего не уничтожать и все усовершенствовать. Неужели дары природы напрасны? Как осмелимся охуждать их? — Кого обвиним в них? Одного признаем виновника всему, что ни существует; исповедуем его и благоговеем пред его бесконечною премудростию.

Всего обыкновеннее слышать жалобы на страсти, но как справедливо сказал Мабли: чем страсти сильнее, тем они полезнее в обществе; направление их может быть только вредно.

Что же надобно сказать о дарованиях умственных, врожденных побуждениях, свойственных человеку желаниях? Все должно остаться при нем; иначе исказим его природу, будем ее насиловать и повредим его благополучию.

Обратимся, во-первых, к главнейшей способности, уму, которым хотят отличить человека от прочих животных, противуполагая в последних инстинкт. Я не того мнения, чтобы человек лишен был инстинкта, который является во многих действиях ума, который в соединении с умом составляет Гений. Замечу только мимоходом, что инстинкт не приобретается; Гением быть нельзя, кто не родился. В этом-то искусство воспитателей: открыть Гений, обогатить его познаниями и дать свободу следовать его внушениям. Ум, если хотят составить его из воображения и памяти, едва ли отличает нас от животных? Но разум, без сомнения, принадлежит исключительно человеку;

разум, это значит, известные начала суждения, в которых как бы отпечатались первые действующие причины вселенной и которые соглашают, таким образом, все наши заключения с явлениями в природе, где противоречия существовать не могут.

Как бы то ни было, но в том надобно признаться, что не столько уму нашему, сколько дару слова, одолжены мы всем нашим превосходством пред прочими животными. Из них самые близкие по сложению своего тела, как уверяют анатомики, лишены органов, помощию которых могли бы произносить сложные звуки. Им запрещено предавать друг другу понятия. Одному человеку предоставлено это право; он один на земле пользуется сим даром; ему одному велено учиться, изощрять свой ум, искать истин соединенными силами. Слова, как бы лучи ума его, передают и распространяют свет учения. Язык народа — свидетельство его образованности, верное доказательство степени его просвещения. Чему, спрашиваю я, одолжены своими блистательными успехами в последнее время математические и физические науки, слава нынешних веков, торжество ума человеческого? Без сомнения, искусственному языку своему, ибо как назвать все сии знаки различных исчислений, как не особенным, весьма сжатым языком, который, не утомляя напрасно нашего внимания, одной чертой выражает обширные понятия. Такие успехи математических наук, затмивши всякое другое учение, справедливо удивляют нас; заставляют признаться, что уму человеческому предоставлено исключительно познавать сего рода истины, что он, может быть, напрасно гоняется за другими; надобно согласиться и с тем, что математики открыли прямые средства к приобретению познаний. Еще не с давнего времени пользуемся мы сими средствами. Их указал нам знаменитый Бакон. Оставьте, говорил он, трудиться напрасно, стараясь извлечь из одного разума всю мудрость; спрашивайте природу, она хранит все истины и на вопросы ваши будет отвечать вам непременно и удовлетворительно. Наконец, Гений Декарта привел эту счастливую перемену и, благодаря его дарованиям, мы живем уже в такие вре-

мена, когда едва тень древней схоластики бродит по Университетам. Здесь, в это заведение вступивши, юношество не услышит пустых слов без всякой мысли, одних звуков без всякого значения. Здесь учат тому, что на самом деле существует; а не тому, что изобретено одним праздным умом. Здесь преподаются точные и естественные науки с пособием языков и познаний исторических. Здесь преподаватели разделяют между собою предметы, которыми всю жизнь свою занимаются, еще с молодых лет почувствовав в себе охоту и некоторые дарования. Как жалко, что истинному просвещению предпочитаются суетные выгоды домашнего воспитания. Кто хочет образовать своих детей для Государства, тот должен прибегнуть к средствам, которые одно только Государство в состоянии доставить, тот должен учить своих детей в общественных заведениях.

Одно образование умственное не довершает еще воспитание. Человек, обогащая свой ум познаниями, еще должен учиться уметь наслаждаться жизнию. Я хочу говорить об образовании вкуса.

Жить — значит чувствовать, наслаждаться жизнию, чувствовать непрестанно новое, которое бы напоминало, что мы живем. Так стихотворец наш Державин говорит о людях:

Непостоянство — доля смертных,
В пременах вкуса — счастье их.
Среди утех своих несметных
Желаем мы утех иных.

Единообразное движение мертво. Покой приятен после трудов и скоро обращается в скуку. Наслаждение заключается в волнении чувств, под тем условием, чтобы оно держалось в известных пределах. Впрочем все равно, на веселое или печальное обращается наше внимание. И возвраты к унынию приятны; и трогательные картины бедствий человеческих нас привлекают. С удовольствием слушаем мы Эдипа на сцене театра, когда он рассказывает о беспримерных своих несчастиях. Веселое и печальное, как две противные силы, волнуют жизнь нашу внутри той волны, где заключаются все удовольствия,

свойственные человеческой природе. Или подобно реке она течет в излучистых берегах: то разливается в лугах радости, то обмывает крутые утесы горестных размышлений. Ничто так не стесняет сего потока, как невежество: мертвою, прямою дорогою провождает оно жизнь от колыбели к могиле. Еще в низкой доле изнурительные труды необходимости, мешаясь с отдохновением, услаждают жизнь земледельца и ремесленника; но вы, которых существование несправедливый случай обратил в тяжелый налог другим; вы, которых ум отупел и чувство заглохло; вы не наслаждаетесь жизнию! Для вас мертва природа, чужды красоты поэзии, лишена прелести и великолепия архитектура, незанимательна история веков. Я утешаюсь мыслию, что из нашего Университета не выйдут подобные произведения растительной природы; даже не войдут сюда, если к несчастию уже родились с таким назначением. Не выйдут, повторяю, потому что здесь продолжается любовь славы, чувство чести и внутреннего достоинства.

Кажется природа, одарив столь щедро человека при его рождении, еще не удовольствовалась. Вдохнула в каждого желание превосходить других, быть известным, быть предметом удивления, прославиться; и таким образом возложило на самого человека попечение о своем усовершенствовании. Ум в непрестанной деятельности силится стяжать почести, возвыситься,— и все человеческое племя идет от совершенства к совершенству и где остановится?

Другие обязанности отзывают и охлаждают стремление к славе. Срочное время поручено человеку хранить огонь жизни; хранить с тем, чтобы он предал его другим. Он живет, чтобы оставить по себе потомство. Любовь к жизни, сильное побуждение во всех тварях, ты исполняешь высокую цель природы. Я переступил чрез вершину моей жизни, при первом шаге чувствую уже тяжесть, которая увлекает меня по отлогости второй половины моего пути. Всегда был я внимателен к явлениям организма; теперь не могу наблюдать, не могу говорить о них равнодушно. Покоится жизнь в зерне растения под охранитель-

ной пленою против враждебных стихий; но деятельность их, наконец, улучшает время и до того беззаботная вдруг пробуждается от сна. Тогда, с превосходством еще сил, строит она орудное жилище против непрестанного нападения. Скоро, почувствовав не равной бой, помышляет о побеге и скрывается в новом зерне. Вот краткое описание явления жизни в растении, животном и человеке. Чем удержать это стремление к побегу изменяющей жизни? Как рано пробуждается оно, и как верно рассчитано бывает время. Посмотрите на этот прививок: он уже цветет в первую весну. Органическая сила в нем предчувствует, что отчужденной черен от родного дерева, не долговечен, и что ей надобно спешить с плодами. Посмотрите на огородные овощи, когда холодные ночи грозят им скорым морозом: вдруг останавливают они рост свой, и зерна в них спеют. Яблоко, тронутое червем, зреет ранее других и валится на землю. Так порок сокращает жизнь; так юноша созревает преждевременно, удовлетворяя ранним своим желаниям, и ложится в могилу, когда бы ему надобно было цвести. Мы все живем втрое, вчетверо менее, нежели сколько назначено природой. Примерами это доказано: некто Екклестон жил 143 года, Генрих Женкинс 169 лет. Натуралисты, сравнивая время возрастания человека и животных, приходят к тому же заключению: мы должны бы, говорят они, жить около 200 лет. Но увы, напрасно жизненная сила собирает питательные соки; их сожигает огонь страстей, снедают заботы и губит невежество. Пылкость нашего воображения, наше знание, всегда готовые воспоминания будят страсти и призывают желания не должные. Наставник юношества пусть обратит сюда внимание и постарается предупредить безрассудность молодости, еще не знающей цены своему здоровью.

О, как бы расточительны мы были с нашей жизнью, если бы мысль о смерти еще не стояла на страже. Где более света, там гуще тень: так все премудро соглашено в мире. Животное следует слепо своему побуждению. Человек знает наслаждения, ищет их с выбором, утончает их; но он не большим пользуется превосходством — он знает, чего бы лучше не знать, знает, что он

должен умереть. Мысль мучительная, которая отравляет все наши удовольствия, подобно мечу Дионисия, на волосе повешенному над головою. Смерть, как бездна, которая все поглощает, которую ничем наполнить нельзя; как зло, которое ни в какой договор включить не можно, потому что оно ни с чем нейдет в сравнение.

Но почему же смерть должна быть злом? Мы живем одно настоящее мгновение; прошедшее все равно, как бы ни существовало; с будущим — последует тоже. Когда смерть придет, тогда все равно — сколько мы ни прожили. Мы повинуемся гласу природы, не в силах будучи ему противиться; но собственно для нас какая выгода, жить более или менее?

Будем же дорожить жизнию, покуда она не теряет своего достоинства. Пусть примеры в Истории, истинное понятие о чести, любовь к отечеству, пробужденная в юных летах, дадут заранее то благородное направление страстям и ту силу, которые дозволят нам торжествовать над ужасом смерти. С повязкою на глазах, как говорит Рошефуко, мы его не увидим.

Быть готову всякой час принести эту великую жертву требует от нас премудрость творца, вложившего в человеческое сердце с любовию к себе и любовь к ближнему. Отсюда проистекают все начала нравственности, предмет воспитания, к которому, как важнейшему, прихожу я к последнему, и не хочу говорить о нем, как о науке. Дюкло*, Рошефуко, Книгге◊ объясняли, каким образом самолюбие бывает скрытою пружиной всех поступков человека в обществе. Кто, спрашиваю, умел в полноте изложить, какие обязанности проистекают из любви к ближнему. Были люди, каковы Гоббес и Гельвеций, которые не хотели верить, чтобы человек рожден был для общества. По счастию, заблуждение их не опасно: подобные будут являться может быть по временам; но последователей себе не найдут. Как можно усумниться, чтобы творец вселенной, которого признаем за существо

* В тексте опечатка: Дюало.

◊ То же: Книеге.

благое, только с последним усилием ума дозволил достигать познания, самого необходимого для благополучия человека. Еще можем обойтись без писанных законов, когда они начертаны в сердцах наших. Мы родимся с добродетелями и совесть дана им в охранение. Примеры научают лучше, нежели толкования и книги.

Вы, воспитанники сего заведения, вы пользовались сими примерами. Уверен, что вы отсюда понесете любовь и добродетели и сохраните ее вместе с благодарностию к вашим наставникам. Вы узнаете, и опыт света еще более уверит вас, что одно чувство любви к ближнему, любви бескорыстной, беспристрастной, истинное желание добра вам налагало на нас попечение просветить ваш ум познаниями, утвердить вас в правилах веры, приучить вас к трудолюбию, к порядку, к исполнению ваших обязанностей, сохранить невинность ваших нравов, сберечь и укрепить ваше здоровье, наставить вас в добродетелях, вдохнуть в вас желание славы, чувство благородства, справедливости и чести, этой строгой, неприкосновенной честности, которая бы устояла против соблазнительных примеров злоупотребления, не досягаемых наказанием.

Еще вы не в состоянии дать истинной цены словам моим, и не вдруг опытность может вразумить вас. Теперь вступаете вы в свет, новизна и многоразличность впечатлений не дает места размышлениям. Но придет время, когда на блеске настоящего вдруг явится прошедшее с обворожительною прелестию своего туска, подобно нежной затуманенной резьбе на ярком золоте, подобно отраженным предметам в слабом зеркале вод, тогда лета воспитания, лета беззаботной юности со всеми невинными удовольствиями предстанут в вашем воспоминании, как образ совершенного счастия, невозвратимо потерянного. Тогда вашего товарища учения встретите вы как родного; тогда в разговоре о вашей юности с благодарностию будете произносить имена ваших наставников, признаетесь, сколь много они желали вам добра, и с торжеством друг другу дадите обещание следовать примерам, от нас слышанным.

Расставаясь с вами, что скажу вам самого поучительного? Вы счастливее меня, родившись позже. Из истории народов видели вы, что всякое государство переходит возрасты младенчества, возмужалости и старости. Тоже будет и с нашим любезным отечеством. Хранимое судьбою медленно возвышается оно в своем величии и достигает высоты, на которую еще не восходило ни одно племя человеческое на земли. Век Петра, Екатерины, Александра были знамениты; но счастливейшие дни России еще впереди. Мы видели зарю, предвестницу их, на востоке; за нею показалось солнце... Я все сказал этим.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Б. Н. ДЕЛОНЕ

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТИ ПЛАНИМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО

I. АКСИОМАТИКА ЭВКЛИДОВОЙ ПЛОСКОСТИ И АКСИОМАТИКА ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО

§ 1. Аксиоматическое построение геометрии

Еще в древности постепенно пришли к мысли, что основная задача геометрии, а именно изучение формы, величины и взаимного расположения предметов сводится к рассмотрению простейших, связанных с ними абстрактных (отвлеченных) геометрических понятий: точка, прямая, плоскость, движение. Казалось бы, что, отвлекаясь от всей сложности реальных предметов и изучая лишь эти абстрактные понятия, мы много теряем. Но это не так.

Как образуются понятия вообще? Понятие есть форма человеческого мышления, в которой выражаются общие, существенные признаки вещей или явлений объективной действительности. Понятие есть результат обобщения массы единичных явлений. Геометрические понятия образовывались в течение долгих тысячелетий рядом поколений людей. Процесс познания человеком природы начинается с чувственных восприятий, с непосредственного созерцания тех или иных вещей и явлений природы. Но познание не останавливается на этой первой ступени, оно поднимается на высшую ступень — образования понятий. Понятия, как указывает Ленин, — «высший продукт мозга, высшего продукта материи»*. Научные понятия, проверенные

* В. И. Ленин. Философские тетради. Госполитиздат, 1947, стр. 173.

практикой, являются объективной истиной и дают глубокое отражение действительности. Ленин говорит: «Мышление, восходя от конкретного к абстрактному, не отходит — если оно *правильное... от* истины, а подходит к ней. Абстракция *материи, закона* природы, абстракция *стоимости* и т. д., одним словом *все* научные (правильные, серьезные, не вздорные) абстракции отражают природу глубже, вернее, *полнее.* От живого созерцания к абстрактному мышлению *и от него к практике* — таков диалектический путь познания *истины*, познания объективной реальности»*.

Таким путем получаются основные геометрические понятия — точка, прямая, плоскость, геометрическое движение и т. д. На них строится геометрия и затем применяется к практике.

Кроме того, относительно геометрических свойств предметов еще древнегреческие математики заметили следующее замечательное обстоятельство: оказывается, что все геометрические истины могут быть выведены из небольшого числа исходных утверждений относительно конечного числа исходных основных геометрических понятий, утверждений, называемых аксиомами, которые уже принимаются без доказательства.

В знаменитой книге «Начала» древнегреческого математика Эвклида, жившего 2300 лет тому назад, геометрия как раз и излагается таким образом. Сначала указывается, каковы основные понятия геометрии, затем приводятся основные постулаты или аксиомы и из них при помощи логических рассуждений постепенно выводятся все теоремы геометрии.

Двухтысячелетние размышления над геометрией Эвклида показали, что хотя в принципе его построение геометрии и правильное, но набор его аксиом не полный. Надо прибавить еще несколько аксиом. С другой стороны, некоторые аксиомы Эвклида никак не могут считаться аксиомами, а являются скорее описаниями, которые надо вовсе выпустить. Кроме

---

* В. И. Ленин. Философские тетради. Госполитиздат, 1947, стр. 146.

того, обнаружилось, что доказательства многих первых простейших теорем у Эвклида упущены, а содержащиеся в них утверждения, где они нужны, принимаются молча, без доказательства, хотя они и не внесены в список аксиом.

В конце прошлого и начале нашего столетия было разработано несколько аксиоматик* эвклидовой геометрии, которые уже не страдают указанными недостатками и, кроме того, удовлетворяют условию независимости аксиом, так что ни одна из аксиом не лишняя, т. е. не является следствием остальных.

Наиболее употребительны у нас сейчас две системы аксиом эвклидовой геометрии, одна из них предложена Д. Гильбертом, а другая Ф. Шуром. Мы будем в этой книге пользоваться аксиоматикой Шура.

Ввиду того что мы, ради простоты, ограничиваемся изложением лишь планиметрии Лобачевского, изложим аксиоматику эвклидовой геометрии также лишь для планиметрии.

§ 2. Аксиоматика эвклидовой планиметрии

Прежде всего утверждается, что при изучении эвклидовой планиметрии будут рассматриваться три, и только три, вида элементов: точки, прямые◊ и движения. Элементы эти никак не определяются, а только называются, т. е., например, не оп-

---

* Аксиоматика — система аксиом, лежащая в основе некоторой отрасли математики.

◊ Собственно этим самым утверждается, что все фигуры, которые мы будем рассматривать в планиметрии, мы будем считать состоящими из точек и прямых (например, окружность мы будем рассматривать как совокупность таких-то точек и т. д.), а также то, что прямые мы будем, так же как и точки, считать элементарными образованиями, т. е., другими словами, мы отказываемся объяснить, что означает прямолинейное расположение точек, а только предполагаем верным, что точки и прямые удовлетворяют тем утверждениям, которые о них делаются в указываемых ниже 20 аксиомах.

ределяется, что такое точка или что такое прямая, или что такое движение, а только говорится, что мы будем рассматривать некоторые элементарные объекты, которые будем называть точками, прямыми и движениями. Затем утверждается, что между этими элементами, т. е. точками, прямыми и движениями, мы будем рассматривать четыре, и только четыре, сорта соотношений: связи, порядка, соответствия точек при движениях и соответствия прямых при движениях. Причем опять эти соотношения никак не определяются, а только называются.

Это —семь основных понятий: три вида элементов и четыре вида соотношений между ними*.

Далее уславливаются, что соотношение связи будет формулироваться так: «точка лежит на прямой» или, что одно и то же, «прямая проходит через точку», «точка и прямая инцидентны друг другу»; соотношение порядка — «точка B лежит между точками A и C»; соотношение соответствия точек при движении— «при данном движении ∂ точка A переходит в точку A'» или, что все равно, «при данном движении ∂ точка A' есть образ точки A», «при данном движении ∂ точка A есть прообраз точки A'».

Далее утверждается, что *названные соотношения между названными элементами удовлетворяют некоторым 20 требованиям.*

Требования эти называются аксиомами эвклидовой планиметрии. Под эвклидовой планиметрией уславливаемся понимать совокупность всех возможных лемм, теорем, следствий,

---

* Конечно, все эти семь основных понятий постепенно сформировались, исходя из огромного многовекового опыта последовательного ряда поколений человечества. Например, представление о прямой мы получаем, когда имеем дело с туго натянутой нитью, с лучом света и т. д. Сама нить не есть прямая, луч света не есть прямая в точном геометрическом смысле; но то абстрактное понятие, которое выкристаллизовывается из подобных многочисленных примеров, взятых из окружающего нас реального мира, есть геометрическое понятие прямой. То же можно сказать и об остальных шести основных понятиях геометрии.

построений и т. д., которые можно логически вывести из этих 20 аксиом*.

Аксиомы эти следующие, причем везде слова «две точки» всегда будут значить две разные точки, «три точки» — три разные точки.

I. Аксиомы связи:

1) Через любые две точки проходит прямая.

2) Через две точки проходит только одна прямая.

3) На любой прямой лежат по крайней мере две точки.

4) Какую бы прямую ни взять, существует точка, на ней не лежащая.

Ничего больше о соотношениях связи не утверждается.

II. Аксиомы порядка:

1) Если точка B лежит между точками A и C, то точка B лежит на прямой AC.

2) Если точка B лежит между точками A и C, то она лежит и между точками C и A.

3) Если A и B — две точки прямой, то на этой прямой всегда есть хотя бы одна точка C такая, что точка B лежит между точками A и C.

4) Из трех точек A, B, C прямой не более одной лежит между двумя другими.

5) (Аксиома Паша). Если точки A, B, C не лежат на одной прямой и прямая a не проходит ни через одну из этих точек и пересекает отрезок◊ AB, то она пересекает один из отрезков AC или BC.

Ничего больше о соотношениях порядка не утверждается.

---

* Какими именно правилами вывода при этом уславливаются пользоваться, нужно, строго говоря, также точно указать. Для этого надо ввести так называемую алгебру логики. Но мы, для простоты, этого делать не будем, а будем просто предполагать, что мы везде будем проводить логически «безупречные» рассуждения.

◊ Мы говорим, что прямая пересекает отрезок AB, если на ней есть точка, лежащая между A и B.

III. Аксиомы движения*:

1) Если задано движение ∂, то при нем любая данная точка плоскости A переходит в одну определенную ее точку A'.

2) При заданном движении ∂ в любую точку плоскости A' переходит некоторая ее точка A.

3) При заданном движении ∂ различные точки A и B переходят в различные точки A' и B'.

Эти три аксиомы говорят, что движение есть так называемое взаимно однозначное преобразование совокупности всех точек плоскости в себя. Если при движении ∂_1 точки A переходят в точки A', а при движении ∂_2 точки A' переходят в точки A'', то переход от точек A к точкам A'' будет, очевидно, также взаимно однозначным преобразованием совокупности всех точек плоскости в себя. Это преобразование называют произведением преобразований ∂_1 и ∂_2 и обозначают через $\partial_1 \cdot \partial_2$.

4) Произведение любых двух движений есть опять некоторое движение:

$$\partial_1 \cdot \partial_2 = \partial_3.$$

5) Всякое движение ∂ имеет себе обратное движение ∂^{-1}, т. е. такое движение, что произведение $\partial \cdot \partial^{-1}$ есть движение, оставляющее все точки плоскости на месте (так называемое тождественное преобразование).

В силу 4) и 5) тождественное преобразование тоже причисляется к числу движений.

Аксиомы 1)—5) говорят, что совокупность всех движений плоскости образует группу взаимно однозначных преобразований совокупности всех точек плоскости в себя.

6) При движении сохраняется порядок точек, т. е. если до движения точка B лежала между точками A и C, то точка B' лежит между точками A' и C', т. е., в частности, точки A', B', C' расположены на одной прямой.

* В аксиомах движения дается аксиоматическое описание движений всей бесконечной плоскости в себе как жесткого целого, а также таких движений плюс отражения плоскости относительно прямой. Когда мы говорим, например, «наложим один треугольник на другой», то мы и применяем как раз такие движения.

З а м е ч а н и е. Для высказывания следующих аксиом движения надо ввести некоторое новое понятие, называемое «репером». Репером мы будем называть следующее: некоторую точку, некоторую исходящую из этой точки полупрямую и одну из двух полуплоскостей, отсекаемых прямой, частью которой является эта полупрямая. Полупрямая и полуплоскость не являются элементарными понятиями. Для объяснения сущности этих понятий придется из предыдущих аксиом связи и порядка вывести ряд теорем. Чтобы не прерывать изложения системы аксиом, мы выведем эти теоремы в следующем параграфе.

7) Если даны два репера, то существует движение, совмещающее первый репер со вторым.

8) Такое движение только одно*.

9) Если дано движение ∂, то при нем любая прямая a плоскости переходит в одну вполне определенную прямую a', а именно в ту, на которой лежат образы точек прямой a.

IV. А к с и о м а н е п р е р ы в н о с т и (аксиома Дедекинда):

1) Если все точки прямой как угодно разбить на два такие класса I и II, что любая точка класса II лежит правее◊ любой

* Можно было бы понятие о репере ввести иначе, а именно, репером называть совокупность трех точек O, A, B, не лежащих на одной прямой, и считать два репера OAB и $O'A'B'$ э к в и в а л е н т н ы м и, если начала O и O' их совпадают, точки O, A, A' лежат на одной прямой, причем точка O не лежит между A и A'; B и B' не лежат на прямой OA и прямая OA не пересекает отрезка BB'. Если ввести такое понятие репера и такое понятие эквивалентности реперов, то аксиома 7) должна быть высказана так:

7) Если даны два репера, то существует движение, совмещающее первый репер со вторым репером или с ему эквивалентным репером.

При таком подходе к вопросу нет надобности вводить при изложении аксиоматики понятий «полупрямая» и «полуплоскость», которые имеют тот недостаток, что являются теоретико-множественными понятиями.

◊ Одно из направлений на прямой условно мы называем «правым». Что значит, с точки зрения наших аксиом, что точка B лежит на прямой правее точки A, можно объяснить, доказав ряд теорем, следующих из аксиом связи и порядка (см. § 3).

точки класса I, то либо в классе I есть самая правая точка, и тогда в классе II нет самой левой, либо, наоборот, в классе II есть самая левая точка, и тогда в классе I нет самой правой.

V. Аксиома о параллельной:

1) Если a — некоторая прямая и B — некоторая точка, на ней не лежащая, то есть не больше одной прямой b, проходящей через точку B и не пересекающей прямую a.

Это и есть так называемый пятый постулат, или 11-я аксиома Эвклида.

Всех аксиом в нашем списке $4+5+9+1+1=20$.

§ 3. Последовательность теорем, вытекающих из аксиом связи и порядка и поясняющих смысл понятий полупрямая и полуплоскость

Начнем с рассмотрения полупрямой. Для выяснения того, что такое полупрямая, надо последовательно доказать следующие теоремы:

а) если A и C — две точки прямой, то существует точка B, лежащая между ними;

б) из трех точек прямой A, B, C одна и только одна лежит между двумя другими;

в) n любых различных точек прямой можно всегда так занумеровать числами 1, 2, 3,..., n, что если $i<j<k$ (или $i>j>k$), то j-я точка лежит между i-й и k-й.

Из этих теорем можно вывести следующую теорему:

г) каждая точка O прямой a разделяет все ее точки, кроме точки O, на два множества I и II такие, что любые две точки A_1 и A_2 прямой a, отличные от точки O, принадлежат одному и тому же из этих множеств, если точка O не лежит между ними, и разным, если точка O лежит между ними;

д) (дополнение к аксиоме Паша). Не может быть, чтобы прямая пересекала все три стороны треугольника.

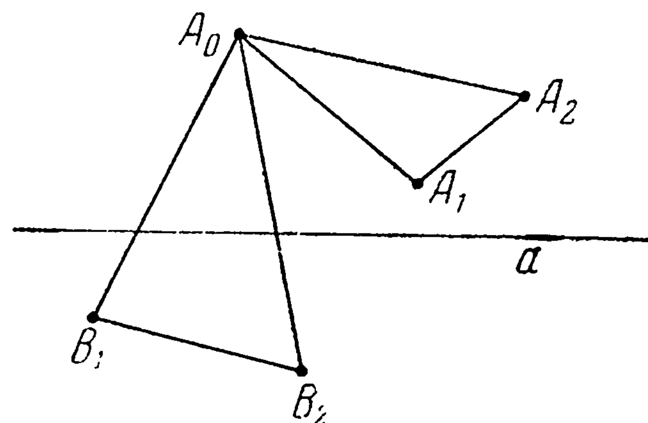
Мы не будем утруждать читателя доказательством этих теорем, хотя они и не сложны.

Определение. Если точка A прямой a принадлежит, например, множеству I, то само это множество плюс еще точка O называется полупрямой OA с началом O.

Переходим к рассмотрению полуплоскости.

Можно доказать теорему: каждая прямая a разделяет все точки плоскости, не лежащие на прямой a, на два множества I и II такие, что любые две точки A_1 и A_2 плоскости, не лежащие на прямой a, принадлежат одному и тому же из этих множеств, если прямая a не пересекает отрезка A_1A_2, и разным, если она его пересекает. Для того чтобы дать пример доказательства какой-нибудь начальной теоремы, которая опущена у Эвклида, докажем эту теорему.

В силу третьей аксиомы связи, имеется точка A_0, не лежащая на прямой a. Отнесем к множеству I все те точки A, не лежащие на прямой a, для которых отрезок A_0A не пересекается прямой a, а к множеству II все те точки B, не лежащие на прямой a, для которых отрезок A_0B пересекается прямой a. Всякая точка плоскости, не лежащая на прямой a, будет принадлежать либо к I, либо ко II множеству, так как прямая будет непременно либо не пересекать отрезок, соединяющий эту точку с точкой A_0, либо его пересекать.



Черт. 1

Покажем, что множества I и II удовлетворяют условиям теоремы. Действительно:

1°. Любой отрезок A_1A_2 не пересекается прямой a, так как если бы он ею пересекался, то по аксиоме II_5 (аксиома Паша) прямая пересекала бы либо отрезок A_0A_1, либо отрезок A_0A_2, что противоречит предположенному о точках A.

2°. Любой отрезок B_1B_2 тоже не пересекается прямой a, так как, по определению точек B, прямая пересекает отрезки A_0B_1 и A_0B_2, а тогда она не может уже пересекать отрезок B_1B_2 в силу указанной теоремы, дополняющей аксиому Паша.

3°. Любой отрезок A_1B_1 пересекается прямой a. Действительно, в силу самого определения точек A и B, прямая a пересекает сторону A_0B_1 треугольника $A_0A_1B_1$ и не пересекает стороны его A_0A_1, следовательно, по аксиоме Паша, она пересекает его сторону A_1B_1.

Отдельно надо доказывать теорему для тех случаев, когда точки A_0, A_1, A_2, или точки A_0,B_1, B_2 или точки A_0,A_1, B_1 не образуют треугольника, а расположены прямолинейно. В этих случаях в доказательстве используется теорема в).

Учитывая, что по 6-й аксиоме движения при движении сохраняется порядок точек, и учитывая только что сказанное о полупрямой и полуплоскости, мы получаем т е о р е м у: при движении всякая полупрямая переходит в полупрямую, а полуплоскость — в полуплоскость.

Во всем дальнейшем ничего, кроме того, что здесь сказано о понятии полуплоскость и полупрямая, не будет использовано.

§ 4. Аксиоматика плоскости Лобачевского

Если из выписанной системы 20 аксиом вовсе исключить аксиому о параллельной, то оставшиеся 19 аксиом образуют аксиоматику так называемой «абсолютной» планиметрии, для которой планиметрии Эвклида и Лобачевского являются двумя подслучаями.

Если же аксиому о параллельной Эвклида заменить следующей аксиомой о параллельных Лобачевского:

V*. Если a — некоторая прямая и B — некоторая точка, на ней не лежащая, то через эту точку можно провести по крайней мере две разные прямые b и b', не пересекающие прямой a, то получается аксиоматика планиметрии Лобачевского.

Таким образом, аксиоматика планиметрии Лобачевского состоит из тех же первых 19 аксиом, что и аксиоматика плоскости Эвклида, и одной видоизмененной (20-й) аксиомы о параллельных — аксиомы о параллельных Лобачевского.

II. НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТЬ ПЛАНИМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО

Мы докажем в этой главе следующую условную теорему:

Теорема. *Аксиоматика планиметрии Лобачевского непротиворечива, если непротиворечива аксиоматика геометрии Эвклида**. Заметим, что аксиоматика называется непротиворечивой, если, сколько бы ни выводить из нее теорем, мы никогда не придем к теореме, противоречащей какой-нибудь из ее аксиом, или к двум противоречащим друг другу теоремам.

Доказательство этой теоремы после ряда подготовительных рассуждений (§ 5, 6) будет дано в § 8. Однако уже сейчас можно показать, что из этой теоремы следует такое утверждение:

Теорема. *Если аксиоматика Эвклида непротиворечива, то в планиметрии Эвклида нельзя доказать пятый постулат Эвклида.*

Действительно, если бы из первых 19 аксиом нашего списка планиметрии Эвклида можно было бы вывести пятый постулат Эвклида, т.е. 20-ю аксиому этого списка, как теорему, то оказалось бы, что эта же теорема имеет место и в планиметрии Лобачевского, так как первые 19 аксиом планиметрии Лобачевского те же, что и в планиметрии Эвклида. И получилась бы в планиметрии Лобачевского теорема, противоречащая аксиоме Лобачевского о параллельных, т. е. аксиоматика Лобачевского оказалась бы противоречивой. Мы видим, что «доказательство» пятого постулата Эвклида привело бы к доказательству противоречивости самой геометрии Эвклида.

В § 5 и 6 мы рассмотрим две предварительные теории — краткую теорию аффинных преобразований пространства (в § 5) и теорию преобразований Лоренца (в § 6). Параграфы эти — не трудные по содержанию, но довольно длинные, однако для понимания доказательства непротиворечивости надо будет сначала подробно их изучить.

* В предлагаемом далее выводе предполагается непротиворечивость как планиметрии, так и стереометрии Эвклида, но можно было бы ограничиться только планиметрией Эвклида.

В § 7 мы рассматриваем одну проекцию всей эвклидовой плоскости внутрь круга, являющуюся для случая эвклидо вой плоскости прямой аналогией той модели плоскости Лобачевского в круге, которую мы рассматриваем в § 8. Читатель может вовсе опустить § 7.

Замечание. При изложении материала § 5 и 6 мы на время совсем оставляем в стороне всякие вопросы об аксиоматике и будем в этих параграфах рассматривать просто некоторые теоремы обычной стереометрии, причем будем предполагать известным только курс геометрии средней школы. Стереометрические теоремы, доказываемые в этих параграфах, нам необходимы для построения модели плоскости Лобачевского (в § 8).

§ 5. Некоторые теоремы теории аффинных преобразований пространства

1. Точечные взаимно однозначные преобразования пространства

Определение. Точечным взаимно однозначным преобразованием пространства мы будем называть такое преобразование пространства, при котором: 1° всякая точка A пространства (прообраз) переходит в одну и только одну его точку A' (ее образ); 2° во всякую точку A' пространства переходит некоторая его точка; 3° две различные точки A и B переходят в различные точки A' и B'.

Например, параллельный перенос всего пространства как жесткого целого на данное расстояние и в данном направлении есть точечное взаимно однозначное преобразование пространства. Поворот всего пространства как жесткого целого вокруг данной оси на данный угол есть тоже точечное взаимно однозначное преобразование пространства. При обоих этих преобразованиях ни форма, ни величина фигур не изменяются, так как оба они суть движения пространства как жесткого целого.

Но бывают такие точечные взаимно однозначные преобразования пространства, при которых и форма фигур, и их величина изменяются. Таковым является, например, равномерное сжатие

пространства к некоторой его плоскости, которое состоит в том, что: 1° все точки этой плоскости остаются на месте; 2° всякая же точка пространства, не лежащая в этой плоскости, остается с той же стороны от плоскости, с которой она лежала, остается на том же перпендикуляре к этой плоскости, на котором она лежала, но перемещается по нему так, что ее новое расстояние h' от плоскости в t раз меньше старого расстояния h и коэффициент $t>1$, называемый коэффициентом сжатия, один и тот же для всех точек пространства.

При равномерном сжатии пространства к плоскости, очевидно, форма и величина фигур изменяются. Например, шар превращается в «сжатый шар» (так называемый сжатый эллипсоид вращения или сфероид). Мы, однако, дальше покажем, что при равномерном сжатии прямые остаются прямыми.

Могут быть и еще более сложные точечные взаимно однозначные преобразования пространства, при которых не только форма и величина фигур изменяются, но и прямые перестают быть прямыми, а изгибаются.

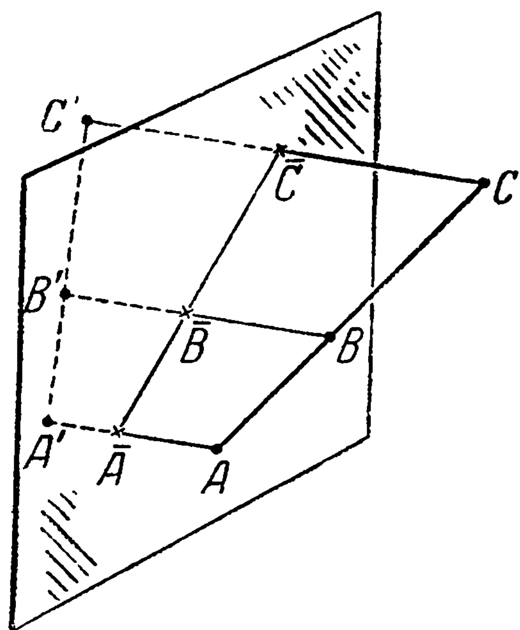
Представим себе, например, что все бесконечное пространство заполнено какой-либо упругой массой вроде резины, и подвергнем ее каким-нибудь способом какой угодно упругой деформации (искажению). В одних местах растянем, в других сожмем, повернем и т. д., но не будем ее разрывать. Произойдет некоторое, вообще говоря, очень неправильное, точечное взаимно однозначное преобразование пространства, при котором не только форма и величина фигур изменятся, но и прямые, вообще говоря, очень причудливым образом изогнутся.

2. Определение аффинных преобразований

Определение. Аффинным преобразованием пространства называется такое его преобразование, которое: 1° точечное взаимно однозначное, 2° при котором всякая прямая пространства переходит в прямую, и обратно (т. е. всякая прямая пространства получается из прямой), 3° отношение, в котором точка делит отрезок, сохраняется.

3. Движение пространства как жесткого целого, отражение его относительно плоскости и равномерное сжатие его (или растяжение) к плоскости

а) Движение всего пространства как жесткого целого есть аффинное преобразование, так как оно, во-первых, как мы это уже отмечали, очевидно точечное взаимно однозначное преобразование пространства. С другой стороны, при нем любая прямая, очевидно, переходит в прямую и, наоборот, получается из прямой и отношение, в котором точка B' делит отрезок $A'C'$, такое же, как то, в котором точка B делит отрезок AC.



Черт. 2

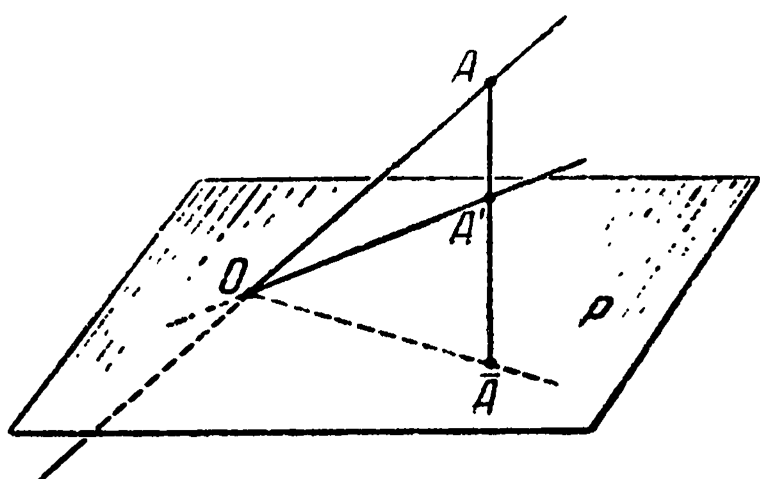
б) Отражение пространства в плоскости, т. е. такое преобразование пространства, при котором все точки некоторой плоскости P остаются на месте, а любая точка M, на ней не лежащая, переходит в точку M', лежащую на том же перпендикуляре к плоскости P, на котором лежит точка M, на таком же расстоянии от плоскости P, на каком от нее лежит точка M, но по другую сторону от плоскости P, чем точка M,— тоже аффинное (черт. 2).

Действительно, во-первых, оно очевидно взаимно однозначное. Во-вторых, точки A, B, C отрезка AC при таком отражении переходят в точки A', B', C' плоскости, проходящей через отрезок AC и перпендикулярной к плоскости P, симметричные с точками A, B, C по отношению к прямой $\bar{A}\bar{C}$ пересечения этих плоскостей. Но в таком случае точки A', B', C' тоже лежат на одной прямой и точка B' делит отрезок $A'C'$ в таком же отношении, в каком точка B делит отрезок AC, так как, поворачивая фигуру $\bar{A}AC\bar{C}$ вокруг прямой $\bar{A}\bar{C}$ на 180°, мы совместим точки A, B, C с соответственными точками A', B', C'.

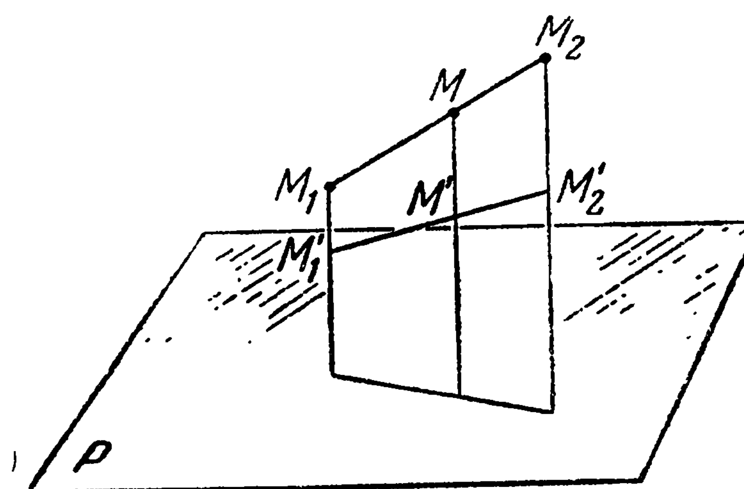
в) Покажем, наконец, что равномерное сжатие (или растяжение) пространства к некоторой плоскости P есть аффинное

преобразование. Такое преобразование очевидно точечное взаимно однозначное. Кроме того, любая прямая при нем переходит в прямую. Действительно, пусть a — какая-нибудь прямая, O — точка, в которой она пересекает плоскость P.

Пусть A — любая точка прямой a и $A\bar{A}$ — перпендикуляр, опущенный из точки A на плоскость P (черт. 3). После сжатия



Черт. 3



Черт. 4

очка A перейдет в такую точку A' на этом перпендикуляре, что $A'\bar{A}=\frac{1}{k}\, A\bar{A}$, где k — коэффициент сжатия. Поэтому тангенс $A'O\bar{A}$ будет равен $\frac{A'\bar{A}}{O\bar{A}}=\frac{1}{k}\frac{A\bar{A}}{O\bar{A}}$, т. е. будет равен $\frac{1}{k}$ «раз» взятому тангенсу угла, делаемого прямой a с плоскостью P, т. е. для всех точек A', в которые перейдут разные точки прямой a, один и тот же. Все эти точки A' лежат, следовательно, тоже на одной и той же прямой, проходящей через точку O, расположенной в плоскости $OA\bar{A}$, перпендикулярной к плоскости P и образующей с прямой $\bar{a}$, тангенс $\frac{1}{k}\operatorname{tg}\angle AO\bar{A}$. Наконец, всякий прямолинейный отрезок M_1M_2 при сжатии сокращается (а при растяжении удлиняется) равномерно. Действительно, в каком отношении точка M делит отрезок M_1M_2, в таком же ее образ M' делит образ $M_1'M_2'$ этого отрезка, так как параллельные прямые (тут перпендикуляры к поскости P) разрезают секущие (прямые M_1M_2 и $M'_1M'_2$) на части пропорциональные (черт. 4).

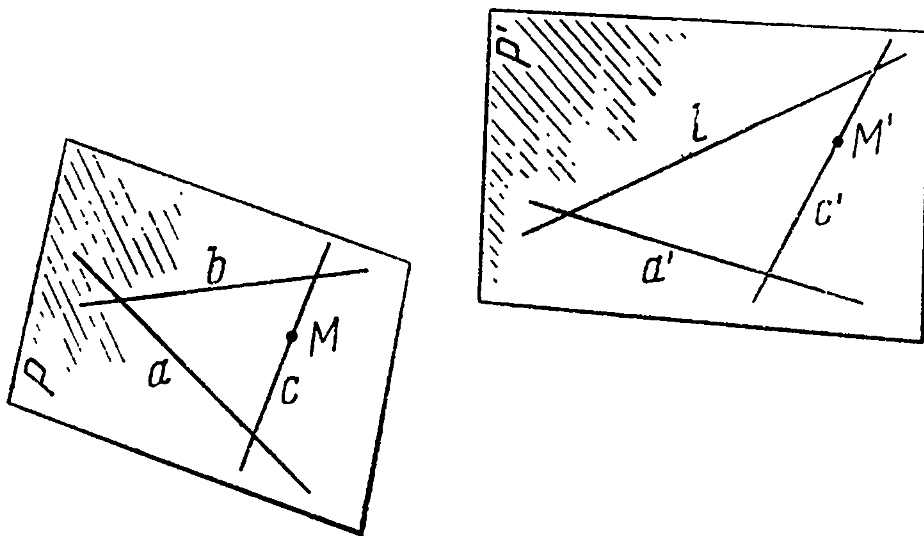
Итак, сжатие (и растяжение) суть точечные взаимно однозначные преобразования, при которых любая прямолинейная

тройка точек M_1, M, M_2 переходит в прямолинейную же M'_1, M', M'_2 и притом точка M' делит отрезок $M'_1M'_2$ в таком же отношении, в каком точка M делит отрезок M_1M_2; это суть, следовательно, аффинные преобразования.

4. *Три леммы об аффинных преобразованиях*

Лемма I. *При аффинном преобразовании пространства всякая плоскость переходит в некоторую плоскость.*

Возьмем на преобразуемой плоскости P две пересекающиеся прямые a и b (черт. 5). Через любую точку M плоскости P, не лежащую на этих прямых, можно провести прямую c, пересекающую обе эти прямые. На образе плоскости P, о котором мы еще не знаем, что это будет плоскость, будут лежать образы a', b', c' прямых a, b и c. В силу определения аффинных преобразований это будут тоже прямые. Прямые a', b', c' будут тоже попарно пересекаться. Действительно, если, например, прямые a и b пересекаются, то образом точки O их пересечения является точка O', принадлежащая как прямой a', так и прямой b', т. е. прямые a' и b' имеют общую точку. Но они не совпадают, так как если A и B — точки прямых a и b, отличные от точки O их пересечения, то точки O, A и B не лежат на одной прямой, а, следовательно, и их образы O', A' и B', лежащие либо на прямой a', либо на прямой b', также не лежат на одной прямой.



Черт. 5

Образ M' точки M будет лежать на прямой c'. Таким образом, образ любой точки M плоскости P лежит в плоскости P', проходящей через прямые a' и b'. Если, наоборот, взять любую

точку M' плоскости P', то обратным рассуждением мы убедимся, что она получается из некоторой точки M плоскости P.

Итак, при аффинном преобразовании пространства любая его плоскость P переходит в некоторую его плоскость P'.

Лемма II. *При аффинном преобразовании пространства параллельные плоскости переходят в параллельные плоскости.*

Действительно, образы их, которые, в силу леммы I, суть плоскости, не могут иметь общей точки, так как иначе прообраз этой точки был бы общей точкой преобразуемых параллельных плоскостей, а они общей точки не имеют.

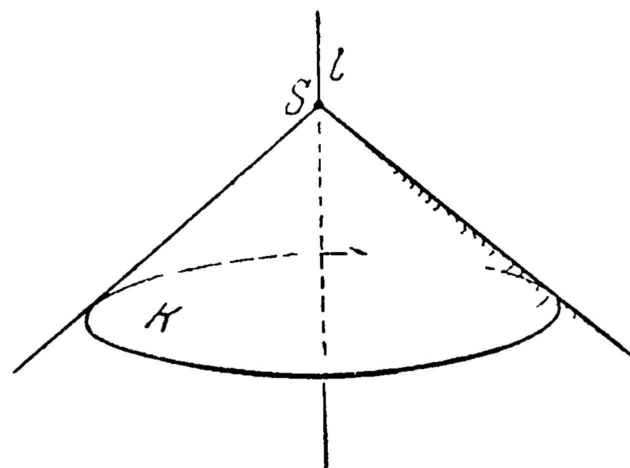
Лемма III. *При аффинном преобразовании пространства параллельные его прямые переходят в параллельные прямые.*

В самом деле, параллельные прямые лежат в одной плоскости и не пересекаются. Но по лемме I плоскость переходит в плоскость и поэтому образы таких прямых также лежат в одной плоскости. Но они и не пересекаются, так как если бы они имели общую точку, то ее прообраз был бы общей точкой преобразуемых параллельных прямых, а они общей точки не имеют.

§ 6. Аффинные преобразования ($\wedge$) пространства и индуцированные ими преобразования $\wedge$ круга α в себя

1. *Определение преобразований* ($\wedge$)

Бесконечную коническую поверхность, которая получается, если вращать вокруг некоторой оси l полупрямую, исходящую из некоторой точки S этой оси и делающую с этой осью l угол в 45°, мы будем называть конусом K (черт. 6). Преобразованиями ($\wedge$) мы будем называть все те аффинные преобразования пространства, при которых вершина S конуса K остается на месте и конус K переходит в себя, т. е. любая точка поверхности K снова переходит в точку поверхности K.

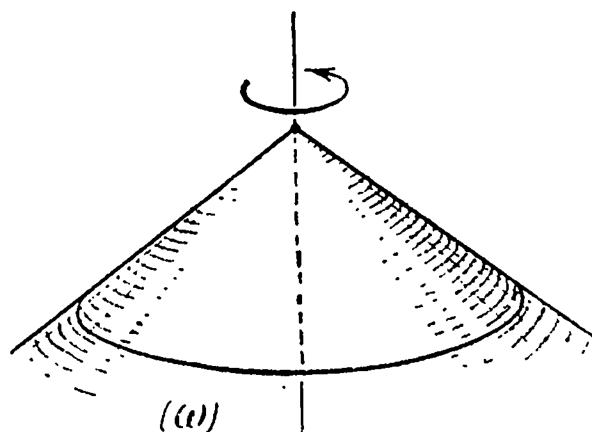


Черт. 6

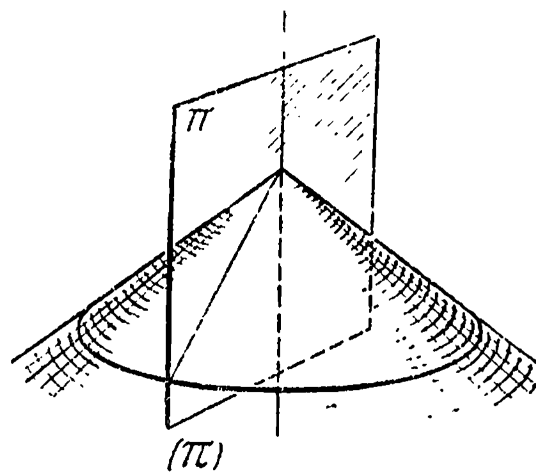
2. Три простейших преобразования (/\)

Рассмотрим три специальных преобразования, два из которых совсем простые, а третье довольно неожиданное, и его придется подробно разобрать.

Очевидно, что любой поворот пространства как жесткого целого на некоторый угол ω вокруг оси l конуса K есть аффинное преобразование, преобразующее конус K в себя; мы будем обозначать это специальное преобразование (/\) через (ω) (черт. 7).



Черт. 7

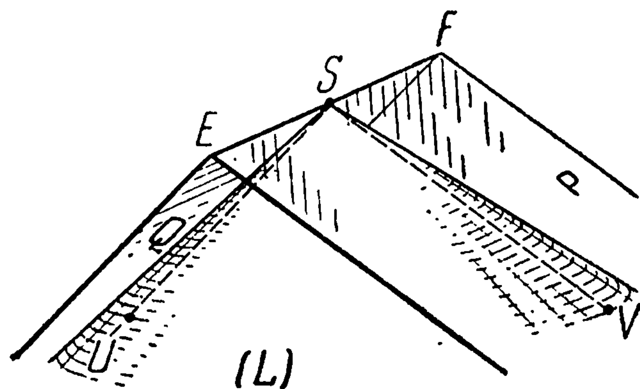


Черт. 8

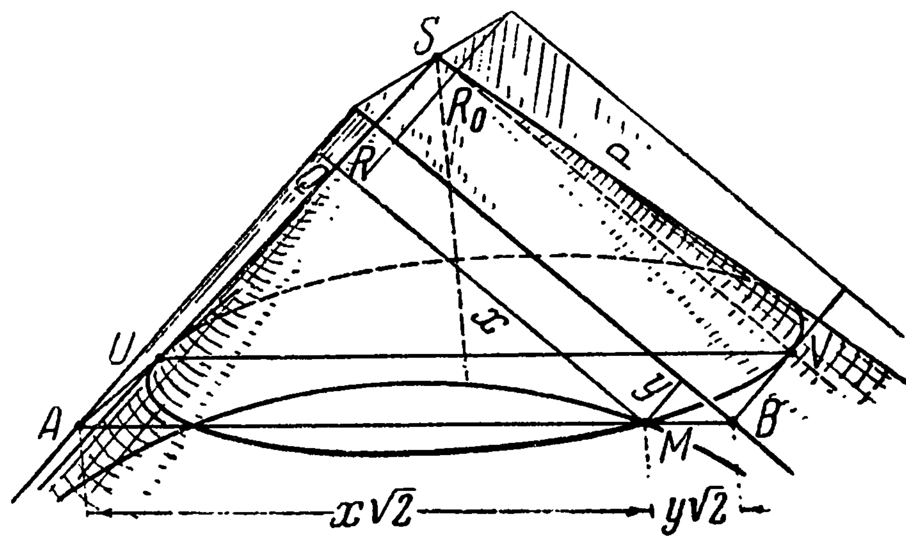
Отражение пространства в некоторой плоскости π, проходящей через ось l конуса K, есть, очевидно, также преобразование (/\). Мы его будем обозначать через (π) (черт. 8).

Перейдем теперь к рассмотрению третьего специального преобразования (/\), которое мы будем обозначать через (|_). Рассмотрим (черт. 9) две противоположные образующие SU и SV нашего конуса и проведем к конусу касательные плоскости P и Q, касающиеся его по этим образующим. Ввиду того, что угол при вершине конуса, т. е. угол между этими образующими, равен 90°, плоскости P и Q будут взаимно перпендикулярными. Сделаем теперь сжатие всего пространства с некоторым коэффициентом t к плоскости P и затем растяжение с тем же коэффициентом t от плоскости Q. Например, сожмем в три раза пространство к плоскости P и растянем его в три раза от плоскости Q. Или, наоборот, сделаем сжатие к плоскости Q и такое же растяжение от плоскости P.

Как мы видели, сжатия и растяжения суть аффинные преобразования. Но если сделать аффинное преобразование, а затем над преобразованным пространством снова аффинное преобразование, то переход от исходного к окончательному пространству будет, очевидно, тоже аффинным преобразованием, так как каждое из сделанных преобразований точечное взаимно однозначное, а следовательнэ, и их результат — точечное



Черт. 9



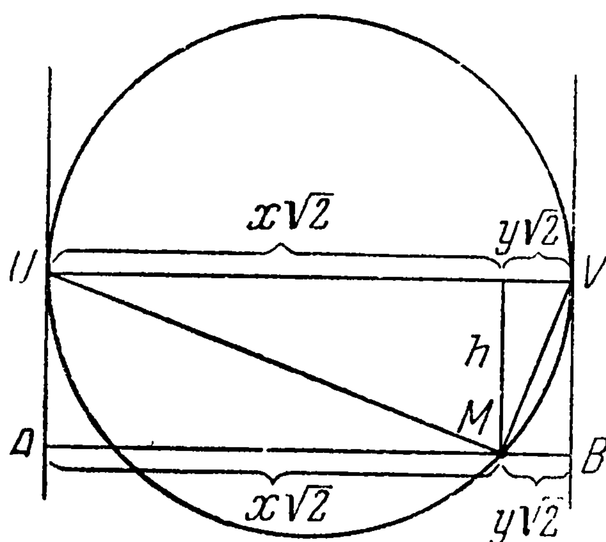
Черт. 10

взаимно однозначное, и при каждом сохраняется отношение, в котором точка делит отрезок, а следовательно, и в результате сохраняется отношение, в котором точка делит отрезок. Рассмотренное преобразование (⌊), состоящее из сжатия к плоскости P и такого же растяжения от плоскости Q (или наоборот), есть, следовательно, аффинное преобразование.

Покажем, что при этом составном аффинном преобразовании, которое мы условились обозначать через (⌊), конус K переходит в себя, т. е. что преобразование (⌊) — тоже некоторое специальное преобразование (Λ).

Пусть M — некоторая точка конуса K (черт. 10). Рассмотрим плоскость R, перпендикулярную к «коньку» EF (черт. 9) «крыши», образованной плоскостями P и Q и проходящую через точку M. Плоскость эта пересекает конус K по некоторой линии γ (которая называется гиперболой). Покажем, что для всех точек этой линии произведение xy длин перпендикуляров, опущенных из ее точек на плоскости P и Q, постоянно. Для

доказательства этого обстоятельства проведем через точку M линии γ плоскость Σ, перпендикулярную к оси конуса. Она пересечет конус по некоторой окружности, проходящей через точку M, плоскости P и Q пересекут ее по прямым, касающимся этой окружности в концах ее диаметра UV, а плоскость R — по некоторой прямой AB, параллельной диаметру UV и проходящей через точку M. Отрезки AM и MB, очевидно, равны $x\sqrt{2}$ и $y\sqrt{2}$. Треугольник UMV прямоугольный, так как угол его UMV — вписанный, опирающийся на диаметр (черт. 11). В силу известной теоремы о произведении отрезков,



Черт. 11

на которые делится гипотенуза основанием высоты h, опущенной на нее из вершины прямого угла, мы получаем: $x\sqrt{2}\cdot y\sqrt{2}=h^2$, или $xy=\frac{h^2}{2}$. Но h есть расстояние между плоскостью R и параллельной ей плоскостью R_0, проходящей через ось l конуса, т. е. оно одно и то же для всех точек линии γ, и, следовательно, произведение xy для всех точек линии γ постоянно. При преобразовании (⌊) во сколько раз y уменьшается, во столько раз x увеличивается (или обратно), поэтому при преобразовании (⌊) точка, лежащая на гиперболе γ, переходит в точку, опять лежащую на гиперболе γ.

*3. Преобразования (⋀) взаимно однозначно преобразуют совокупность полупрямых связки * S, внутренних к конусу K, в себя*

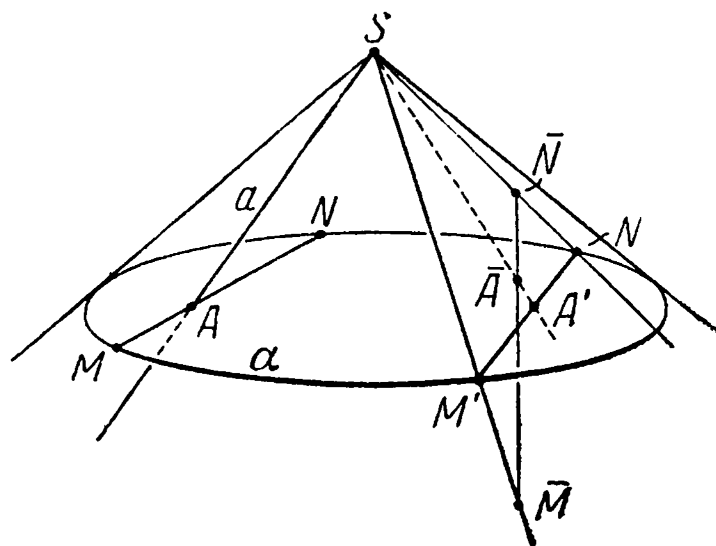
Пересечем конус K какой-нибудь плоскостью, перпендикулярной к его оси l. В сечении получится окружность. Круг, соответствующий этой окружности, мы будем называть кругом α.

* Связкой S полупрямых с центром в точке S называют совокупность всех полупрямых пространства, исходящих из точки S.

Полупрямую a, исходящую из вершины S конуса K, мы будем называть внутренней к конусу K, если она проходит через какую-нибудь внутреннюю точку A круга α.

Лемма I. *При любом преобразовании* $(\wedge)$ *внутренняя полупрямая a переходит снова в некоторую одну внутреннюю полупрямую a'.*

Заметим, во-первых, что, в силу сохранения при аффинном преобразовании порядка точек, любая полупрямая переходит в полупрямую, а так как, по предположению, преобразования $(\wedge)$ оставляют вершину S конуса K на месте, то полупрямая a, исходящая из вершины конуса, переходит в полупрямую, также исходящую из этой вершины (черт. 12). Пусть теперь A — внутренняя точка круга α, в которой его пересекает полупрямая a, и MN — какая-нибудь хорда круга α, проходящая



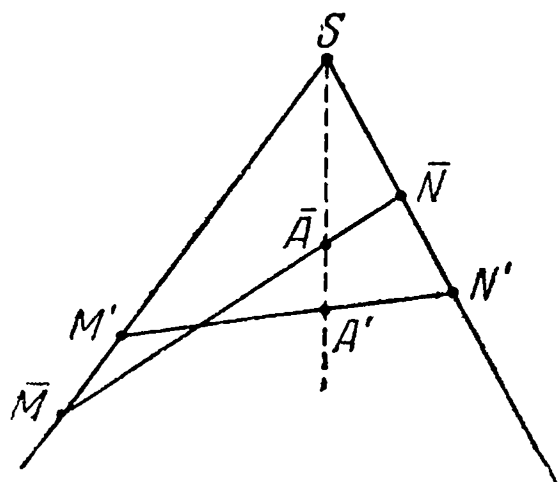
Черт. 12

через эту точку A. Так как при преобразовании $(\wedge)$ конус K переходит в себя, его образующие SM и SN перейдут в некоторые две его образующие $S\bar{M}$ и $S\bar{N}$, причем эти образующие различны, так как точки S, M, N не лежат на одной прямой, а следовательно, в силу определения аффинных преобразований, и образы их $S, \bar{M}, \bar{N}$ тоже не лежат на одной прямой. Хорда MN круга α перейдет в хорду $\bar{M}\bar{N}$ конуса K, а ее внутренняя точка A — в некоторую внутреннюю точку $\bar{A}$ хорды $\bar{M}\bar{N}$, так как при аффинных преобразованиях сохраняется порядок точек. Полупрямая SA перейдет в полупрямую $S\bar{A}$, которая тоже будет внутренней, что легко видеть из чертежа (черт. 13).

Лемма II. *При преобразовании* $(\wedge)$ *в любую внутреннюю полупрямую a' переходит некоторая внутренняя полупрямая a.*

Для доказательства сделаем преобразование $(\wedge)^{-1}$, обратное $(\wedge)$. Оно будет также аффинным, также будет оставлять вершину S конуса K на месте и переводить конус K в себя.

т. е. будет тоже преобразованием $(\wedge)$. При $(\wedge)^{-1}$ внутренняя полупрямая a' переходит, в силу предыдущей леммы, во внутреннюю же полупрямую a. Эта полупрямая a и будет той, которая при преобразовании $(\wedge)$ переходит в a'.



Черт. 13

Лемма III. *Разные внутренние полупрямые a и b переходят при преобразовании $(\wedge)$ в разные внутренние полупрямые a' и b'.*

Действительно, если полупрямые a и b — разные и A и B, например, суть точки их пересечения с кругом α, то точки S, A, B не лежат на одной прямой; но тогда, в силу определения аффинного преобразования, и их образы S, $\overline{A}$, $\overline{B}$ тоже не лежат на одной прямой и, следовательно, полупрямые $S\overline{A}$ и $S\overline{B}$, которые и суть полупрямые a' и b', различны.

Доказанные леммы показывают, что всякое данное преобразование $(\wedge)$ взаимно однозначно преобразует совокупность внутренних к конусу K полупрямых связи S в себя.

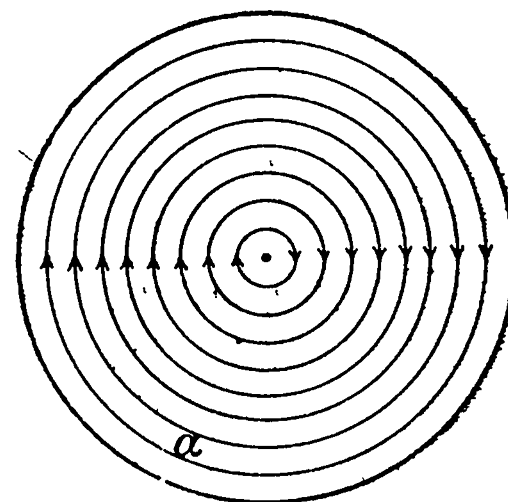
4. Преобразования $\wedge$ круга α в себя, индуцированные преобразованиями $(\wedge)$

Итак, при всяком преобразовании $(\wedge)$ пространства совокупность полупрямых, исходящих из вершины S конуса K и внутренних этому конусу, взаимно однозначно преобразуется в себя.

Через всякую внутреннюю точку A круга α проходит одна и только одна такая внутренняя полупрямая и обратно. Круг α как целое мы будем считать не участвующим во всех рассматриваемых далее преобразованиях. Тогда получается, если следить за точками пересечения этих полупрямых с кругом α, что всякое взаимно однозначное преобразование совокупности внутренних полупрямых конуса K в себя дает, или, как мы будем говорить, «индуцирует», некоторое взаимно однозначное преобразование

совокупности внутренних точек круга α в себя. Если взаимно однозначное преобразование совокупности внутренних полупрямых конуса K было вызвано преобразованием $(\wedge)$ пространства, мы будем называть то взаимно однозначное преобразование совокупности внутренних точек круга α, которое при этом индуцировано, преобразованием $\wedge$ круга α в себя.

Посмотрим, какие преобразования $\wedge$ круга α в себя индуцируются простейшими преобразованиями $(\wedge)$, рассмотренными в пункте 2, т. е. преобразованиями (ω), (π) и $(\llcorner)$.



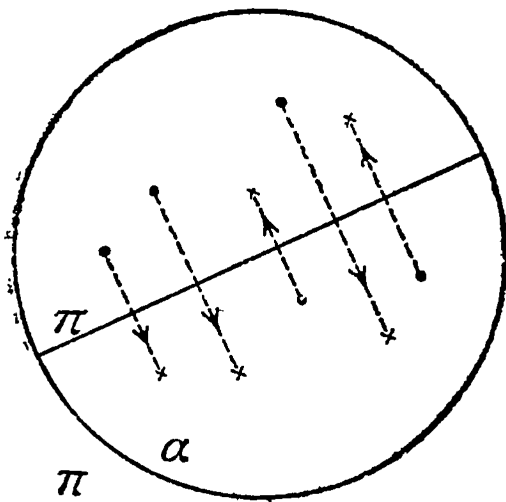
Черт. 14

Очевидно, что преобразование (ω), т. е. поворот пространства как жесткого целого вокруг оси l конуса K на некоторый угол ω, дает просто такой же поворот связки S как жесткого целого, т. е. индуцирует поворот круга α вокруг его центра O на угол ω. Мы будем обозначать это преобразование $\wedge$ через ω (черт. 14).

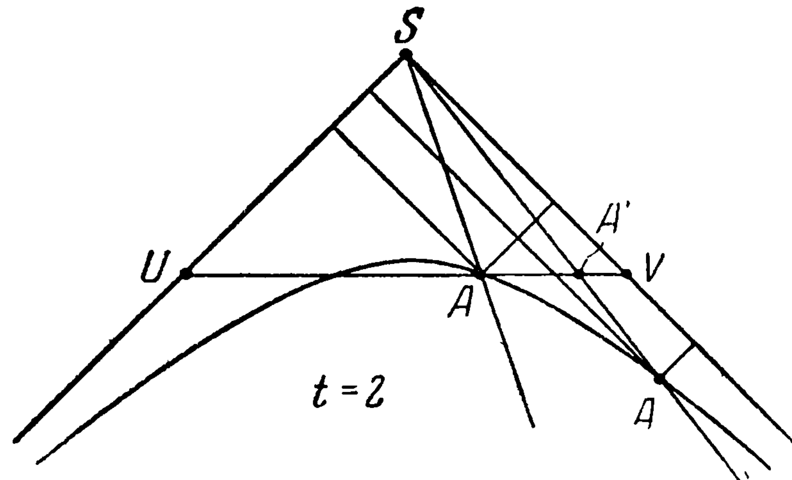
Преобразование (π), т. е. отражение пространства в некоторой плоскости, проходящей через ось l конуса K, очевидно индуцирует отражение круга α в том его диаметре, который является следом этой плоскости на плоскости круга α (черт. 15). Это преобразование $\wedge$ мы будем обозначать буквой π (черт. 15).

Преобразование $(\llcorner)$ индуцирует некоторое более сложное преобразование $\wedge$ круга α в себя, которое мы будем обозначать символом $\llcorner$. Нам важно только то, что при этом преобразовании точки диаметра UV, перпендикулярного к коньку EF той «крыши», по отношению к которой происходило преобразование $(\llcorner)$, переходят при преобразовании $\llcorner$ в точки этого же диаметра, причем какую бы ни взять внутреннюю точку A круга α, лежащую на этом диаметре, можно так подобрать коэффициент t преобразования $\wedge$, чтобы она перешла в любую наперед заданную другую внутреннюю точку A' круга α, лежащую на этом диаметре. Это следует из того

(черт. 16), что, изменяя t, можно любым образом изменять тангенс угла ASV, а следовательно, и сам этот угол ASV.



Черт. 15



Черт 16

5. Девять теорем о преобразованиях $\wedge$ круга α в себя

Теорема 1. *При любом данном преобразовании $\wedge$ любая внутренняя точка A круга α переходит в одну вполне определенную внутреннюю точку A'.* Следует из леммы I, п. 3.

Теорема 2. *При любом данном преобразовании $\wedge$ в любую данную внутреннюю точку A' круга α переходит некоторая его внутренняя точка A.* Следует из леммы II, п. 3.

Теорема 3. *При любом данном преобразовании $\wedge$ разные внутренние точки A и B круга α переходят в разные его внутренние точки A' и B'.* Следует из леммы III, п. 3.

Теорема 4. *Произведение любых двух преобразований $\wedge$ есть снова некоторое преобразование $\wedge$:*

$$\wedge_1 \cdot \wedge_2 = \wedge_3.$$

Действительно, пусть преобразования $\wedge_1$ и $\wedge_2$ индуцируются преобразованиями $(\wedge_1)$ и $(\wedge_2)$; в таком случае преобразование $(\wedge_1)\cdot(\wedge_2)$, которое получается, если над пространством, преобразованным с помощью $(\wedge_1)$, еще совершить преобразование $(\wedge_2)$, очевидно индуцирует преобразование $\wedge_3$. Но, так как преобразования $(\wedge_1)$ и $(\wedge_2)$ аффинны, то и преобразование $(\wedge_1)\cdot(\wedge_2)$ тоже аффинно. Преобразования $(\wedge_1)$ и $(\wedge_2)$ оставляют

вершину S конуса K на месте и переводят конус K в себя, следовательно, и их произведение $(\bigwedge_1)\cdot(\bigwedge_2)$ тоже оставляет вершину S конуса K на месте и преобразует конус K в себя; преобразование $(\bigwedge_1)\cdot(\bigwedge_2)$ поэтому есть также некоторое преобразование $(\bigwedge)$. Обозначим его через $(\bigwedge_3)$. Преобразование $\bigwedge_3$, которое оно индуцирует, есть, следовательно, некоторое преобразование $\bigwedge$.

Теорема 5. *Всякое преобразование $\bigwedge$ имеет себе обратное преобразование $\bigwedge^{-1}$ такое, что преобразование $\bigwedge\cdot\bigwedge^{-1}$ оставляет все внутренние точки круга α на месте.*

Действительно, если преобразование $\bigwedge$ индуцируется преобразованием $(\bigwedge)$, то преобразование $(\bigwedge)^{-1}$, обратное $(\bigwedge)$, которое тоже есть некоторое преобразование $(\bigwedge)$, индуцирует такое преобразование $\bigwedge^{-1}$.

Теоремы 4 и 5 показывают, что совокупность всех преобразований $\bigwedge$ множества внутренних точек круга α в себя образуют группу.

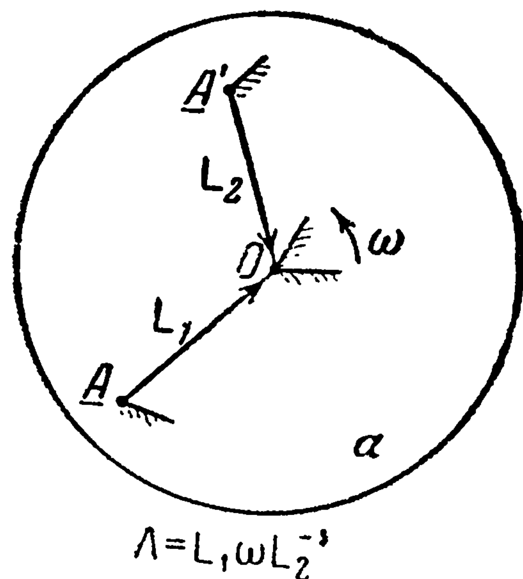
Теорема 6. *При преобразовании $\bigwedge$ сохраняется порядок внутренних точек круга α.*

Это следует из чертежа (черт. 23) ровно так же, как доказывалось выше из чертежа (черт. 13), что внутренняя точка A круга α переходит во внутреннюю его точку A'.

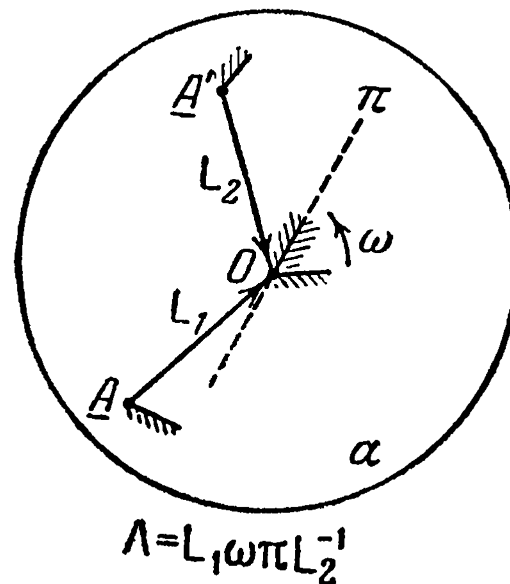
Дополнение к теореме 6. Из того же чертежа (черт. 23) видно, что эта теорема верна, если включить и точки окружности круга α. А именно, при преобразовании $\bigwedge$ любая хорда круга α переходит в некоторую его хорду с сохранением порядка точек на ней, включая и те точки, которые являются ее концами.

Назовем условно «полухордой» круга α кусок хорды круга α от некоторой внутренней точки G этой хорды до одного из ее концов. Будем называть «репером» в круге α совокупность, состоящую из некоторой внутренней точки G этого круга, некоторой «полухорды», из нее исходящей, и одного из тех двух сегментов, на которые соответствующая хорда разрезает круг α.

В силу сохранения при любом преобразовании Λ порядка точек круга α (см. дополнение к теореме 6), при таком преобразовании полухорда (включая и ее конец), исходящая из внутренней точки круга α, перейдет опять в некоторую полухорду, исходящую из некоторой ее внутренней точки, а сегмент круга α, отрезаемый хордой (включая и точки его дуги),—



Черт. 17



Черт. 18

в сегмент круга α, отрезаемый ее образом. Поэтому любой репер круга α при преобразовании Λ переходит в некоторый репер круга α.

Т е о р е м а 7. (Теорема существования теории преобразований Λ.) *Какие бы два репера в круге α ни были заданы, всегда существует преобразвание Λ, при котором первый из них переходит во второй.*

Мы докажем эту теорему, используя рассмотренные выше преобразования ω, π, $\lfloor$.

Пусть преобразования $\lfloor_1$ и $\lfloor_2$ такие, при которых начала первого и второго реперов переходят в центр O круга α. Если сделать $\lfloor_1$, затем нужный поворот ω, затем $\lfloor_2^{-1}$, то первый репер перейдет во второй (черт. 17). Может быть, впрочем, что, сделав $\lfloor_1$ и ω, надо будет еще сделать отражение в прямой π и только потом $\lfloor_2^{-1}$ (черт. 18). Таким образом, какие бы два репера ни были заданы в круге α, существует преобразование Λ, при котором первый из этих реперов переходит

во второй, и оно равно

$$\llcorner_1\cdot\omega\cdot\llcorner_2^{-1} \text{ или } \llcorner_1\cdot\omega\cdot\pi\cdot\llcorner_2^{-1}.$$

В силу теоремы 4 это есть преобразование $\wedge$.

Теорема 8. (Теорема единственности теории преобразований $\wedge$.) *Существует только одно преобразование $\wedge$, при котором один данный репер круга α переходит в другой данный его репер.*

Заметим прежде всего, что для доказательства этой теоремы достаточно показать, что если при преобразовании $\wedge$ круга α в себя некоторый репер его G, имеющий вершину в центре O круга α, переходит в себя, то преобразование $\wedge$ — тождественное (т. е. при нем все точки круга α остаются на месте). Тождественное преобразование мы будем обозначать через E.

Действительно, пусть $\wedge_1$ и $\wedge_2$ — два преобразования $\wedge$, при которых некоторый первый заданный репер круга α переходит в некоторый заданный второй его репер, и $\llcorner$ — то преобразование $\llcorner$, при котором вершина второго репера переходит в центр O круга α. В таком случае при обоих преобразованиях $\wedge_1\llcorner$ и $\wedge_2\llcorner$ первый репер переходит в один и тот же репер G, имеющий вершину в центре O круга α и следовательно, преобразование $(\wedge_1\llcorner)^{-1}\wedge_2\llcorner$ переводит этот репер G в себя. Поэтому, если бы мы имели теорему, что если преобразование $\wedge$ преобразует некоторый репер G, имеющий вершину в центре O круга α, в себя, то оно тождественное, то мы имели бы отсюда, что $(\wedge_1\llcorner)^{-1}\wedge_2\llcorner = E$. Умножая на оба эти друг другу равные преобразования преобразование $\wedge_1\llcorner$, мы получим опять равные друг другу преобразования: $(\wedge_1\llcorner)(\wedge_1\llcorner)^{-1}\wedge_2\llcorner = (\wedge_1\llcorner)E$ или $\wedge_2\llcorner = \wedge_1\llcorner$, откуда $\wedge_2 = \wedge_1$, т. е. не может быть двух различных преобразований $\wedge$, при которых некоторый данный репер переходит в некоторый второй данный репер.

Остается, таким образом, показать, что преобразование $\wedge$, преобразующее в себя некоторый данный репер G, имеющий вершину в центре O круга α, — тождественное.

Пусть $\wedge$ — такое преобразование, а $(\wedge)$ — аффинное преобразование пространства, индуцирующее это преобразование $\wedge$. Преобразование $(\wedge)$, очевидно, преобразует ось конуса K в себя. Домножим его на такую гомотетию относительно вершины S конуса K, чтобы при этом домноженном преобразовании, которое мы опять для простоты будем обозначать через $(\wedge)$, центр O круга α переходил в себя. Это преобразование $(\wedge)$ будет индуцировать то же самое преобразование $\wedge$.

Покажем, что при таком преобразовании $(\wedge)$ плоскость круга α и окружность круга α переходят в себя. Действительно, если бы плоскость круга α при преобразовании $(\wedge)$ поворачивалась вокруг точки O (точка O остается при преобразовании $(\wedge)$ на месте), то, например, линия наибольшего ската этой повернутой плоскости образовала бы с конусом K такую хорду $M'ON'$, что O не являлась бы ее серединой, а между тем в эту хорду преобразовалась бы некоторая хорда MON круга α, у которой O — середина. А это невозможно, так как при аффинном преобразовании отношение, в котором точка делит отрезок, сохраняется.

Итак, при рассматриваемом преобразовании $(\wedge)$ круг α переходит, как целое, в себя, окружность его переходит, как целое, в себя, и центр O его остается на месте. А так как по предположению репер G переходит в себя, то и соответствующий ему диаметр AB круга α как целое переходит в себя, и притом концы его остаются на месте, а не меняются местами, так как полупрямая репера G переходит в себя.

Но в таком случае и все точки этого диаметра AB остаются на месте, так как при аффинном преобразовании отношение, в котором точка делит отрезок, сохраняется. Но в таком случае и всякая хорда CD круга α, параллельная диаметру AB как целое, переходит в себя, так как: 1° хорда CD остается параллельной диаметру AB, ибо в силу леммы III (стр. 447) при аффинном преобразовании параллельные прямые переходят в параллельные, 2° хорда CD остается на том же полукруге, определяемом диаметром AB, так как полуплоскость репера G переходит в

себя, 3° хорда CD не может перейти в другую хорду $C'D'$, ибо перпендикуляры $C\bar{C}$ и $D\bar{D}$, опущенные на диаметр AB, не могут перейти в наклонные $C'C$ и $D'D$ (эти перпендикуляры параллельны между собой, а наклонные — нет). Произвольная точка M круга α, следовательно, переходит в себя, так как она лежит на хорде, концы которой переходят в себя, и отношение, в котором она делит эту хорду, сохраняется.

Преобразование $\wedge$, следовательно, тождественное.

Теорема 9. *При любом преобразовании $\wedge$ любая данная хорда круга α переходит в некоторую его хорду, причем в ту, на которой лежат образы точек данной хорды.*

Доказательство следует из того же рассуждения, как и в теореме 6.

§ 7. Об одной проекции эвклидовой плоскости в круг

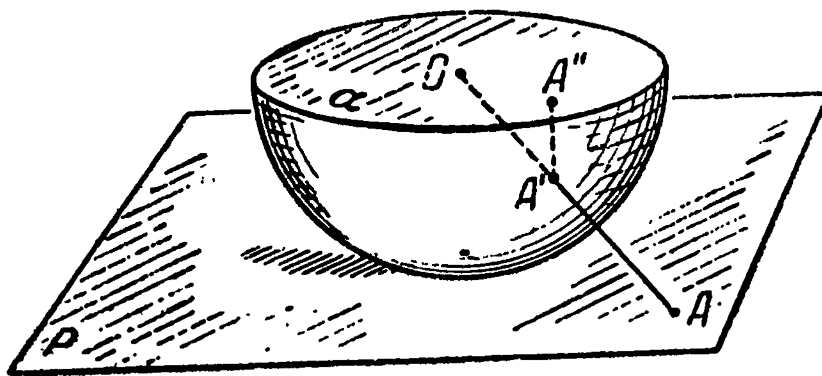
Для доказательства непротиворечивости планиметрии Лобачевского мы будем (в § 8) «моделировать» ее абстрактную схему в обычном эвклидовом круге. При этом вся бесконечная плоскость Лобачевского окажется как бы спроектированной на внутренность круга.

Прежде чем приступить в следующем параграфе к такому моделированию плоскости Лобачевского, мы считаем полезным в настоящем параграфе рассмотреть некоторую специальную проекцию обыкновенной эвклидовой плоскости на внутренность круга, которая является аналогичной моделью эвклидовой плоскости в круге.

Следует подчеркнуть, что существенной разницей между этими двумя моделированиями является то, что в случае моделирования плоскости Лобачевского реализуется в круге нечто, заданное нам лишь абстрактно-аксиоматически, тогда как в настоящем параграфе будет смоделирована в круге обычная эвклидова плоскость.

Рассмотрим некоторую обыкновенную эвклидову плоскость P, положим на эту плоскость полусферу так, чтобы плоскость

круга α, ограничивающего эту полусферу, была параллельна плоскости P (черт. 19). Будем теперь проектировать любую точку A плоскости P сначала прямолинейным отрезком, соединяющим ее с центром O круга α в точку полусферы, а затем эту точку A' полусферы перпендикуляром, опущенным из нее на плоскость круга α в некоторую точку A'' круга α. Очевидно, что так вся плоскость P спроектируется внутрь круга α Чем точка A дальше от точки C касания полусферы с плоскостью P, тем такая ее проекция A'' на круг α ближе к его окружности. Любая прямая a плоскости P проектируется таким путем на полусферу в виде полуокружности a', диа-



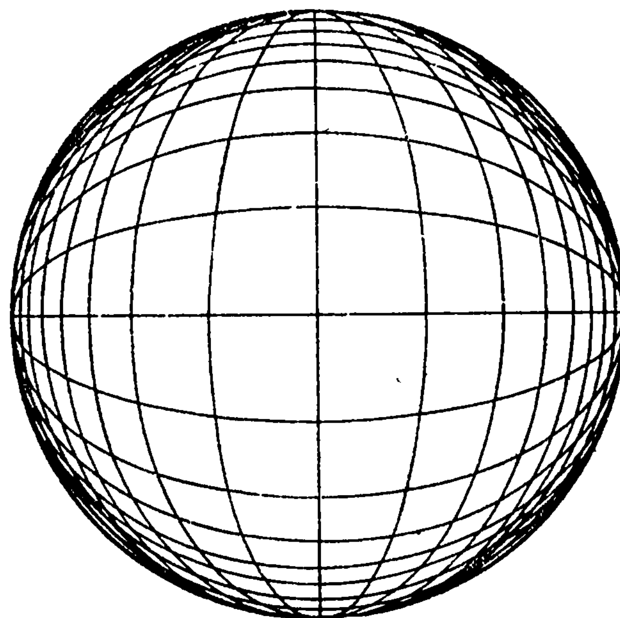
Черт. 19

метром которой будет тот диаметр UV круга α, который параллелен этой прямой a. А эта полуокружность a' перпендикулярами к плоскости круга α спроектируется окончательно на этот круг α в виде полуэллипса a'', для которого диаметр UV круга есть большая ось.

Если построить на плоскости P сетку квадратов, один из узлов которой есть точка C, то эта сетка спроектируется на круг α в виде сетки эллипсов (черт. 20). Эта сетка легко позволяет вычерчивать проекцию на круг α любой фигуры плоскости P. Мы получаем таким образом способ рассматривать всю бесконечную эвклидову плоскость в виде ее проекции внутрь круга, но как бы в «кривом зеркале».

По сетке эллипсов черт. 20 можно находить, рассуждая только с этой проекцией, например, расстояние между двумя

точками или угол между двумя прямыми: для нахождения расстояния достаточно построить «прямоугольный треугольник», катетами которого будут куски эллипсов сетки, проходящих через рассматриваемые точки, и дальше употреблять теорему Пифагора и т. д.



Черт. 20

Мы приводим здесь этот пример проекции бесконечной эвклидовой плоскости в круг не потому, конечно, что удобно решать задачи эвклидовой плоскости на этой ее проекции. Это можно. Но, конечно, проще решать их на самой эвклидовой плоскости. Мы это делаем потому, что аналогичным способом в круге, как бы рассматривая ее «в кривом зеркале», мы будем сейчас изучать плоскость Лобачевского.

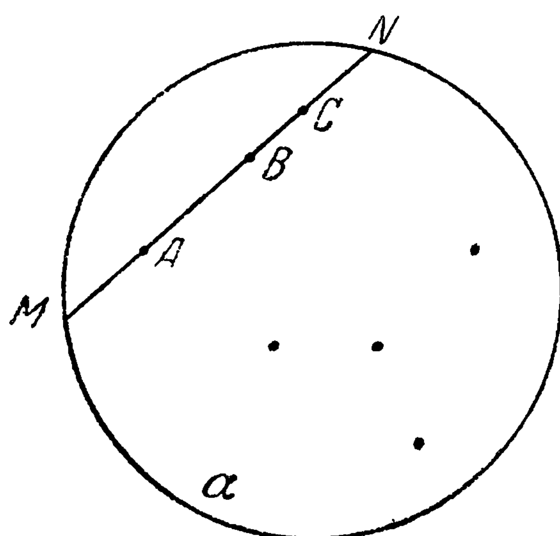
§ 8. Доказательство непротиворечивости аксиоматики плоскости Лобачевского

Покажем, что нельзя доказать пятый постулат Эвклида при помощи других аксиом планиметрии Эвклида, а что можно его заменить обратным утверждением и выйдет тоже возможная планиметрия.

1. Модель Кэли — Клейна плоскости Лобачевского

Элементами плоскости Лобачевского будем считать следующие объекты эвклидовой плоскости. Возьмем некоторый круг α и будем называть точками плоскости Лобачевского внутренние точки этого круга, прямыми плоскости Лобачевского — хорды этого круга без их концов и, наконец, движениями Лобачевского — изученные нами выше преобразования Λ круга α в себя.

Соотношениями между этими элементами будем считать следующие эвклидовы соотношения между этими эвклидовыми объектами. Будем говорить, что точка Лобачевского лежит на прямой Лобачевского, если соответственная внутренняя точка круга α в обычном смысле лежит на соответственной хорде круга α (черт. 21). Будем говорить, что точка Лобачевского B лежит между точками Лобачевского A и C, если соответственные внутренние точки A, B, C круга лежат на одной хорде и точка B в обычном смысле лежит между точками A и C. Наконец, будем говорить, что при заданном движении Лобачевского $\bigwedge$ точка Лобачевского A переходит в точку Лобачевского A', если при рассматриваемом преобразовании $\bigwedge$ круга α в себя соответственная внутренняя точка A круга α переходит в его точку A', и то же самое будем говорить о хордах.



Черт. 21

Покажем теперь, что эти эвклидовы соотношения между этими также эвклидовыми элементами удовлетворяют всем 20 аксиомам Лобачевского.

2. Проверка того, что все 20 аксиом Лобачевского удовлетворяются на модели Кэли — Клейна

I. Аксиомы связи:

1) Через любые две внутренние точки круга α проходит некоторая хорда этого круга.

2) Такая хорда проходит только одна.

3) На всякой хорде круга лежит сколько угодно внутренних точек круга.

4) Какую бы хорду ни взять, всегда есть внутренние точки круга, на ней не лежащие.

Очевидны.

II. Аксиомы порядка:

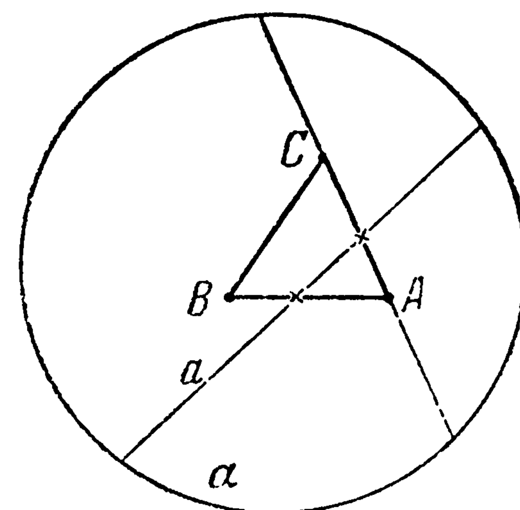
1) Если точка B лежит между точками A и C, то она лежит на хорде AC.

2) Если точка B лежит между точками A и C, то она лежит и между точками C и A.

3) Если A и B — две внутренние точки круга, принадлежащие некоторой его хорде, то на этой хорде всегда есть такая внутренняя точка круга C, что B лежит между A и C.

4) Из трех внутренних точек круга, лежащих на одной хорде круга, не больше одной лежит между двумя другими.

Очевидны.



Черт. 22

5) (Аксиома Паша). Если внутренние точки круга A, B, C не лежат на одной и той же хорде круга, и хорда a не проходит ни через одну из них и пересекает отрезок AB, то она пересекает еще хоть один из отрезков AC или BC.

Следует из обычной аксиомы Паша, если учесть, что если две точки суть внутренние точки круга, то и все точки соединяющего их отрезка — также внутренние точки круга (черт. 22).

III. Аксиомы движения:

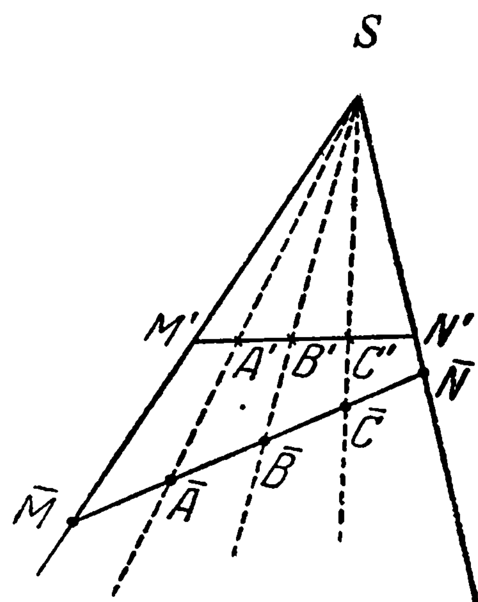
1) Если задано некоторое преобразование $\wedge$, то при нем любая внутренняя точка A круга α переходит в одну определенную точку A' круга α.

2) При заданном преобразовании $\wedge$ в любую внутреннюю точку круга переходит только одна внутренняя точка этого круга.

3) При заданном преобразовании $\wedge$ две разные внутренние точки A и B круга переходят в разные внутренние точки A' и B' круга α.

4) Произведение двух преобразований Λ_1 и Λ_2 есть снова некоторое преобразование Λ_3.

5) Преобразование, обратное преобразованию Λ, есть тоже преобразование Λ.



Черт. 23

6) При преобразовании Λ сохраняется порядок точек (черт. 23).

7) Если внутри круга α даны два репера A и A', то существует преобразование Λ, при котором первый из них переходит во второй.

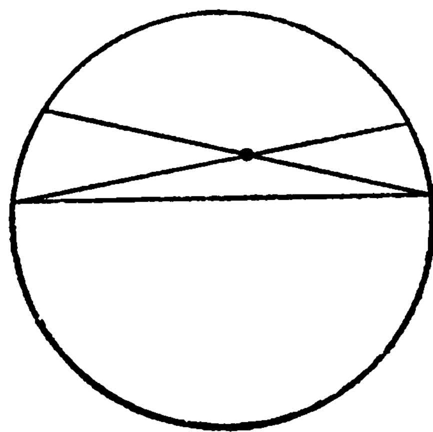
8) Такое преобразование Λ существует только одно.

9) При преобразовании Λ всякая хорда a круга α переходит в некоторую его хорду a' и притом в ту, на которой лежат образы точек хорды a.

Эти девять свойств представляют собою как раз те девять теорем о преобразованиях Λ, которые были доказаны в § 6.

IV. Аксиома непрерывности (Дедекинда):

Для хорды она вытекает из той же аксиомы для прямой на эвклидовой плоскости, если дополнить хорду в обе стороны до прямой.



Черт. 24

V. Аксиома о параллельных (Лобачевского):

1) Если a — некоторая хорда и B — некоторая внутренняя точка круга α, на ней не лежащая, то имеется больше одной хорды, проходящей через точку B и не пересекающей хорды a.

Очевидна непосредственно из чертежа (черт. 24).

3. Непротиворечивость аксиоматики планиметрии Лобачевского и невозможность доказать пятый постулат Эвклида при помощи других аксиом планиметрии Эвклида

Построенная сейчас «модель» плоскости Лобачевского показывает, что из аксиом плоскости Лобачевского никак нельзя вывести противоречащие друг другу следствия, как бы далеко ни выводить из них следствия.

Действительно, когда мы вводили аксиоматику плоскости Лобачевского, мы элементы: «точки», «прямые», «движения» и соотношения между ними «связи», «порядка» и «соответствия» точек и прямых при движении только лишь называли, а затем требовали, чтобы эти соотношения между этими элементами удовлетворяли указанным 20 аксиомам. Теперь же мы нашли такие существующие в эвклидовой геометрии объекты: внутренние точки круга α, его хорды без концов и его преобразования Λ в себя и такие осуществляющиеся в эвклидовой геометрии соотношения между этими объектами: лежание точки на хорде, обычный порядок точек на хорде и соответствие точек и прямых при преобразованиях Λ, которые как раз удовлетворяют всем тем же 20 требованиям. Если бы эти 20 аксиом вели к противоречию, то можно было бы об этих эвклидовых объектах, пользуясь лишь этими в действительности имеющимися эвклидовыми соотношениями между ними, вывести, логически правильно о них рассуждая, противоречащие друг другу факты. Но это значило бы, что, рассуждая логически правильно, в самой эвклидовой геометрии можно было бы прийти к противоречию.

Вот то соображение, которое не приходило в голову ни великому Лобачевскому, ни Бóяи, ни Гауссу, ни Риману. Если бы оно пришло им в голову, уже они, а не Клейн, доказали бы непротиворечивость геометрии Лобачевского. Повторяем еще раз. Соображение это состоит в том, чтобы реализовать, «моделировать» рассматриваемую аксиоматику в какой-нибудь математической системе, которую мы считаем непротиворечивой.

Непротиворечивость самой геометрии Эвклида в свою очередь может быть доказана, если предполагать непротиворечивость

обычной арифметики. Это делается при помощи метода аналитической геометрии.

Для стереометрии Лобачевского также существуют доказательства ее непротиворечивости. Они осуществляются тоже при помощи тех или иных моделирований.

В силу того, что было сказано в начале этой главы, мы видим также, что тем самым показано, что нельзя, исходя из остальных аксиом планиметрии Эвклида, доказать пятый постулат Эвклида.

ПРИМЕЧАНИЯ



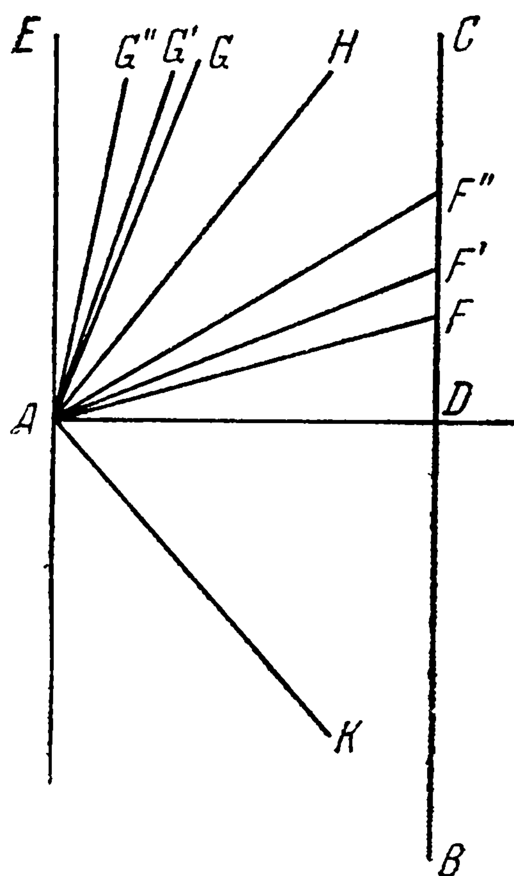
[1] Столь обычное определение прямой как оси вращения все же выражено в тексте Лобачевского странно. Почему он говорит о вращении *поверхности*, а не твердого тела (неизменяемой среды)? Определение прямой как геометрического места точек, остающихся неподвижными вместе с двумя точками, принадлежащими движущемуся геометрическому образу (телу, поверхности), имеет содержание только в том случае, если речь идет о неподвижных точках этого движущегося образа: среда, *относительно которой* происходит движение, вся рассматривается как неподвижная. Вращающаяся *поверхность* неподвижной прямой не содержит, за исключением плоскости и некоторых особенных поверхностей, содержащих прямые линии. Английский переводчик Гальстед поэтому вносит после текста Лобачевского следующее замечание: „Это значит: если мы вращаем поверхность, ее (эту линию) содержащую, около двух точек этой линии, то линия остается в покое". Кстати сказать, помещая это замечание в скобках, переводчик не указывает, что оно принадлежит ему, а не Лобачевскому.

[2] Под „ограниченной плоскостью" („begrenzte Ebene") Лобачевский разумеет часть плоскости, ограниченную замкнутой (выпуклой) кривой, „плоскую (выпуклую) фигуру", как часто говорят теперь. Проходя через такую фигуру, неограниченная прямая должна из нее выйти и таким образом делит ее на две части. Самое важное точно выраженное применение, которое это положение в дальнейшем получает, заключается в том, что *прямая, пересекая одну сторону треугольника и входя поэтому внутрь треугольника, должна из него выйти, а поэтому неизбежно пересекает и другую сторону треугольника.* Отнюдь не будет преувеличенным сказать, что построение своеобразной теории параллельных линий Лобачевского опирается преимущественно на это положение (см., например, предложения 17 и 18 настоящего сочинения). Выделенный таким образом частный случай, которого, несомненно, достаточно, чтобы в дальнейшем (при правильном определении непрерывной замкнутой кривой)

доказать приведенное выше общее предложение, в позднейшей литературе обыкновенно называют *аксиомой Паша*. Хотя на нее, несомненно, опираются и гораздо более ранние авторы (Саккери, Лежандр), но в совершенно отчетливой форме она, действительно, выражена впервые в сочинении Паша „Лекции по новой геометрии“ * [IV основное положение (IV Grundsatz) в теории плоскости].

[3] Точнее: прямолинейный отрезок, соединяющий точку, лежащую по одну сторону некоторой прямой, с точкой, лежащей по другую сторону той же прямой, пересекает эту прямую.

[4] В оригинале „Congruent”. Во всех своих сочинениях на русском языке Лобачевский называет конгруэнтные фигуры *одинаковыми*. В настоящем переводе везде сохранен термин „конгруэнты”.



Черт. 1

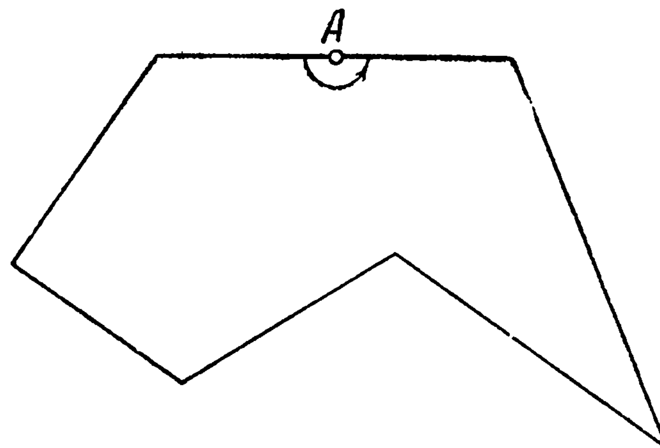
[5] В оригинале сказано неудачно „der grössten Seite”, т. е. наибольшей стороне (треугольника).

[6] Существование такой „граничной прямой” требует, конечно, доказательства. Оно основано на непрерывности пучка прямых или, лучше сказать, лучей, проведенных внутри угла EAD (черт. 1) из его вершины A. При допущении, что, кроме AE, есть еще лучи, не встречающие DC, лучи этого пучка распадаются на две категории: лучи первой категории AF, AF', AF'',... встречают луч DC, лучи второй категории AG, AG', AG'',... его не встречают. При этом все лучи первой категории неизбежно расположены по одну сторону лучей второй категории и обратно. В самом деле, если лучи AF и AF'' принадлежат первой категории, то никакой луч второй категории не может лежать между ними, ибо всякий луч AF', лежащий между двумя лучами AF и AF'', встречающими DC, также встречает DC (предложение 3 и к нему примечание [2]). Таким образом, предположение, что из точки A внутри прямого угла EAD выходит не один, а несколько (и вследствие этого — бесконечное множество) лучей, не встречающих DC, приводит к образованию дедекиндова сечения в пучке лучей, проходящих в угле EAD через его вершину. Вследствие

* M. Pasch — Vorlesungen über neuere Geometrie. Leipzig, 1882, стр. 21; новое издание с обширной статьей Дена (M. Dehn) выпущено в 1926 г.

этого по принципу Дедекинда в этом пучке необходимо существует *граничный луч*, представляющий собой либо последний луч первой категории (последний луч, встречающий DC), либо первый луч второй категории (первый луч, не встречающий DC). Но последнего встречающего луча существовать не может; в самом деле, если AF есть встречающий луч, то, взяв на DC точки F', F'' за точкой F, мы получим дальнейшие лучи AF', AF'', встречающие DC. Следовательно, существует первый луч второй категории, т. е. первый (граничный) луч, не встречающий DC; это и есть луч AH, который Лобачевский называет *параллельным* DC.

[7] Рассмотрим какой-либо плоский многоугольник (не обязательно выпуклый), и пусть n — число его вершин (или сторон), а Σ — сумма всех внутренних углов. Разность $(n-2)\pi - \Sigma$ называется *дефектом* рассматриваемого многоугольника. В эвклидовой геометрии дефект всякого многоугольника равен нулю. Рассмотрим свойства дефекта в неэвклидовой геометрии Лобачевского.



Черт. 2

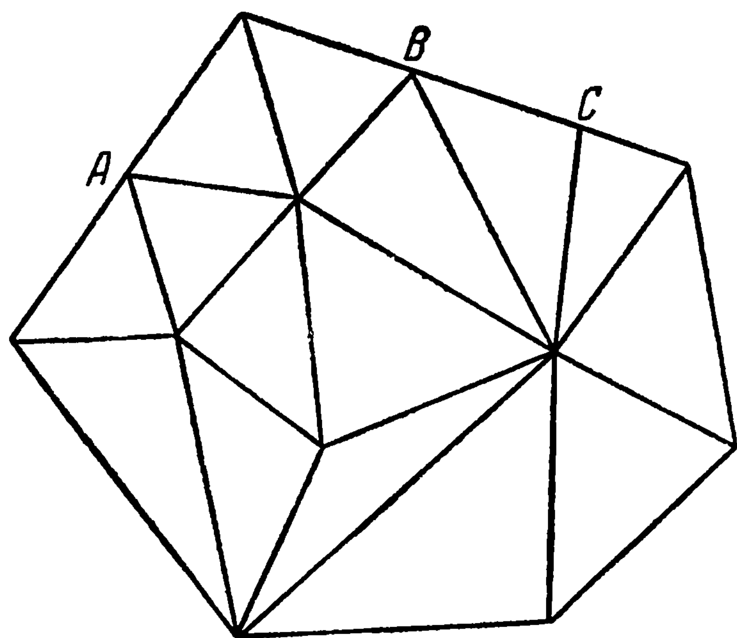
Заметим прежде всего, что если мы выберем конечное число точек, лежащих на сторонах многоугольника M, и причислим их к вершинам этого многоугольника (угол при каждой такой «вершине» будет равен π, черт. 2), то от этого дефект его не изменится (хотя число вершин увеличится). Действительно, при добавлении к числу вершин m точек, лежащих на сторонах многоугольника M, к уменьшаемому $(n-2)\pi$ добавляется $m\pi$ (ибо число вершин становится равным $n+m$), а к вычитаемому Σ (т. е. к сумме углов) добавляется также $m\pi$ (ибо добавляются m новых углов, каждый из которых равен π). Таким образом, разность $(n-2)\pi - \Sigma$ (т. е. дефект) не меняется.

Далее, условимся говорить, что многоугольник M *правильным образом* разбит на треугольники (черт. 3), если эти треугольники примыкают друг к другу целыми сторонами, т. е. если каждые два из них имеют либо целую общую сторону, либо общую вершину, либо не имеют общих точек (примыкание лишь частью стороны не допускается).

Лемма. *Если многоугольник M правильным образом разбит на треугольники, то его дефект равен сумме дефектов составляющих треугольников.*

Доказательство. Добавляя к вершинам многоугольника M точки, лежащие на его сторонах, мы можем добиться того, что он будет с каждым из составляющих треугольников соприкасаться только це-

лыми общими сторонами (т. е. вершины составляющих треугольников будут либо вершинами, либо внутренними точками многоугольника M). На черт. 3 изображен многоугольник, правильно разбитый на треугольники; точки A, B, C, лежащие на сторонах многоугольника, являются вершинами составляющих треугольников — их надо добавить к числу вершин многоугольника.



Черт. 3

Обозначим через k число составляющих треугольников и предположим доказанным (по индукции), что для многоугольников, разбитых на меньшее число правильно примыкающих треугольников, лемма справедлива (для $k = 1$ она очевидна). Выберем из составляющих треугольников один (обозначим его через T), примыкающий к контуру многоугольника M. Тогда могут представиться следующие три случая:

1. Треугольник T имеет с многоугольником M две общие стороны.

2. Треугольник T имеет с многоугольником M одну общую сторону, причем вершина треугольника T, противолежащая этой стороне, не лежит на контуре многоугольника M.

3. Треугольник T имеет с многоугольником M одну общую сторону, причем вершина треугольника T, противолежащая этой стороне, расположена на контуре многоугольника M.

В первом случае многоугольник M_1, получающийся из M после отделения треугольника T, имеет $n-1$ сторон (где n — число сторон многоугольника M), а сумма его углов Σ_1 имеет значение $\Sigma_1 = \Sigma - (\alpha + \beta + \gamma)$, где Σ — сумма углов многоугольника M, а α, β, γ — углы треугольника T (черт. 4). Так как для M_1 по предположению индукции лемма справедлива, то сумма дефектов всех составляющих треугольников, кроме T, равна дефекту многоугольника M_1, т. е. равна

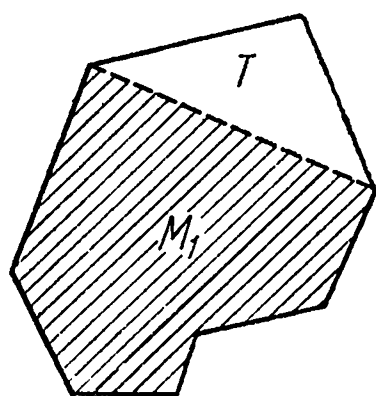
$$[(n-1)-2]\pi - \Sigma_1 = (n-3)\pi - [\Sigma - (\alpha + \beta + \gamma)] =$$
$$= [(n-2)\pi - \Sigma] - [\pi - (\alpha + \beta + \gamma)].$$

Во втором случае многоугольник M_1, получающийся из M после отделения треугольника T, имеет $n+1$ сторон (черт. 5), а сумма его углов равна $\Sigma_1 = \Sigma - \alpha - \beta + (2\pi - \gamma)$. Поэтому сумма дефектов всех

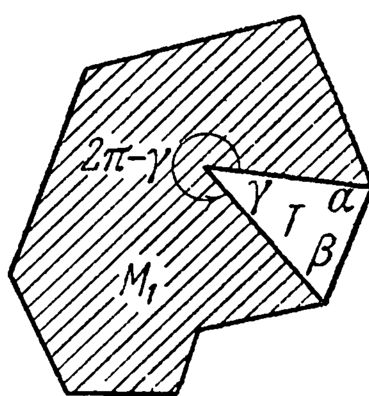
составляющих треугольников, кроме T, равна

$$[(n+1)-2]\pi-\Sigma_1=(n-1)\pi-[\Sigma-\alpha-\beta+(2\pi-\gamma)]=[(n-2)\pi-\Sigma]-$$
$$-[\pi-(\alpha+\beta+\gamma)].$$

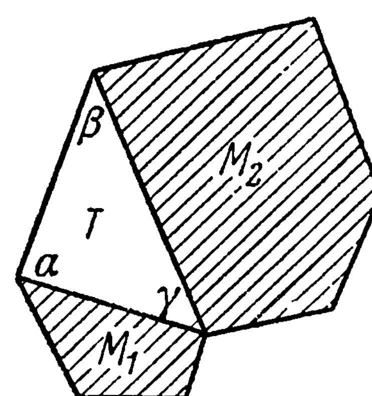
В третьем случае после удаления треугольника T многоугольник M распадется на два многоугольника, которые мы обозначим через M_1 и M_2



Черт. 4



Черт. 5



Черт. 6

(черт. 6). Число сторон этих многоугольников обозначим соответственно через n_1 и n_2, а сумму углов — через Σ_1 и Σ_2. Тогда имеют место равенства

$$n_1+n_2=n+1,\ \Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2+(\alpha+\beta+\gamma).$$

По предположению индукции для M_1 и M_2 лемма справедлива, так что сумма дефектов всех составляющих треугольников, кроме T, равна сумме дефектов многоугольников M_1 и M_2, т. е. равна

$$[(n_1-2)\pi-\Sigma_1]+[(n_2-2)\pi-\Sigma_2]=(n_1+n_2-4)\pi-$$
$$-(\Sigma_1+\Sigma_2)=(n-3)\pi-[\Sigma-(\alpha+\beta+\gamma)]=$$
$$=[(n-2)\pi-\Sigma]-[\pi-(\alpha+\beta+\gamma)].$$

Итак, во всех случаях сумма дефектов всех составляющих треугольников, кроме T, равна $[(n-2)\pi-\Sigma]-[\pi-(\alpha+\beta+\gamma)]$. Прибавив дефект треугольника T, т. е. величину $\pi-(\alpha+\beta+\gamma)$, мы найдем, что сумма дефектов всех составляющих треугольников (включая T) равна $(n-2)\pi-\Sigma$, т. е. равна дефекту многоугольника M. Лемма доказана.

Другое доказательство леммы легко получить с применением эйлеровой характеристики (см. «Новые начала», ст. 73 и сноску ◇ на стр. 185). Обозначим через B число точек, являющихся вершинами составляющих треугольников, через P — число отрезков, являющихся сторонами этих треугольников, через Γ — число самих треугольников. Тогда

$$\Gamma-P+B=1.$$

Кроме того, подсчитывая число сторон по всем треугольникам, мы найдем

$$3Г = 2P - n$$

(ибо каждая внутренняя сторона засчитывается 2 раза, а каждая сторона многоугольника M — один раз). Из найденных соотношений получаем (исключая P):

$$2B - Г = n + 2. \qquad (*)$$

Теперь найдем сумму дефектов всех составляющих треугольников. Для этого из $Г\pi$ нужно вычесть сумму всех углов всех составляющих треугольников. Но эта сумма углов равна $\Sigma + (B - n)2\pi$, так как сумма углов, примыкающих к вершинам многоугольника M, равна Σ, а в каждой внутренней вершине (число их равно $B - n$) сумма примыкающих углов равна полному углу, т. е. 2π. Итак, сумма дефектов составляющих треугольников равна (см. (*))

$$Г\pi - [\Sigma + (B - n)\,2\pi] = 2n\pi - \Sigma - \pi\,(2B - Г) = 2n\pi - \Sigma - \pi\,(n + 2) = \\ = (n - 2)\,\pi - \Sigma,$$

т. е. равна дефекту многоугольника M.

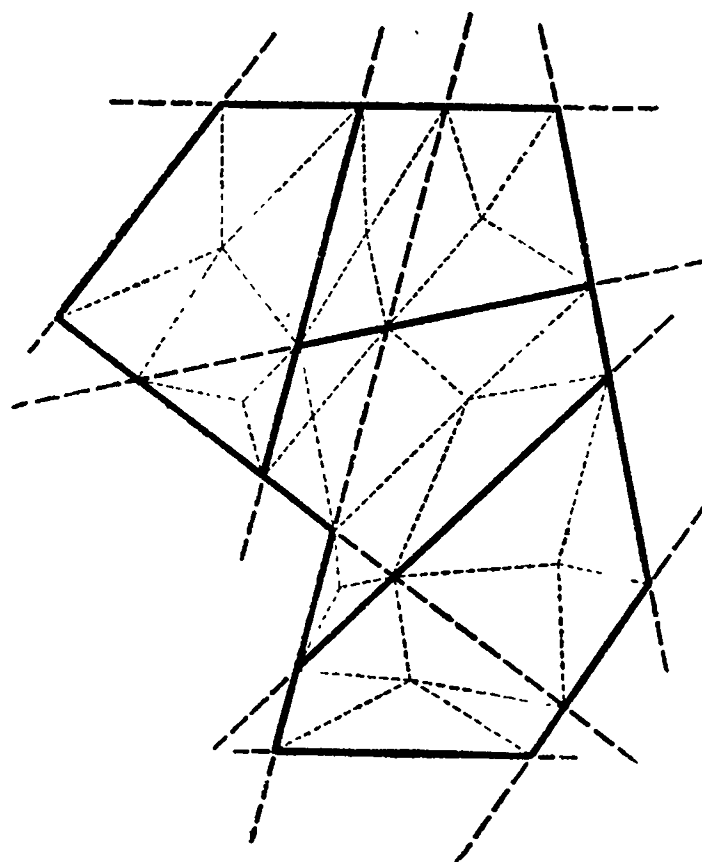
С помощью доказанной леммы легко доказать аддитивность дефекта в общем случае.

Теорема. *Если многоугольник M разбит на конечное число многоугольников* (произвольным образом примыкающих друг к другу), то *дефект многоугольника M равен сумме дефектов составляющих многоугольников.*

Доказательство. Проведем все прямые, являющиеся продолжением всех сторон многоугольника M или составляющих многоугольников. Тогда многоугольник M (и каждый из составляющих многоугольников) разобьется на выпуклые многоугольники (черт. 7), примыкающие друг к другу целыми сторонами. Каждый из этих выпуклых многоугольников мы разобьем на треугольники, соединяя его внутреннюю точку со всеми его вершинами. Тогда многоугольник M (и каждый из составляющих многоугольников) будет разбит на правильно примыкающие треугольники. Сумма дефектов всех этих треугольников будет (по лемме) равна дефекту многоугольника M. Беря же сначала все треугольники, содержащиеся в первом из составляющих многоугольников, затем все, содержащиеся во втором многоугольнике, и т. д., мы найдем, что эта же сумма равна сумме дефектов составляющих многоугольников. Теорема доказана.

В сочинении „О началах геометрии" (см. Приложение 1 на стр. 415) Лобачевский доказал, что в его геометрии площадь многоугольника

равна (при надлежащем выборе единицы измерения площадей) его дефекту. Отсюда становится понятной аддитивность дефекта: если многоугольник M разбит на несколько многоугольников, то площадь многоугольника M равна сумме площадей составляющих многоугольников (это одно из основных свойств площади). См. также примечание [99].


Черт. 7

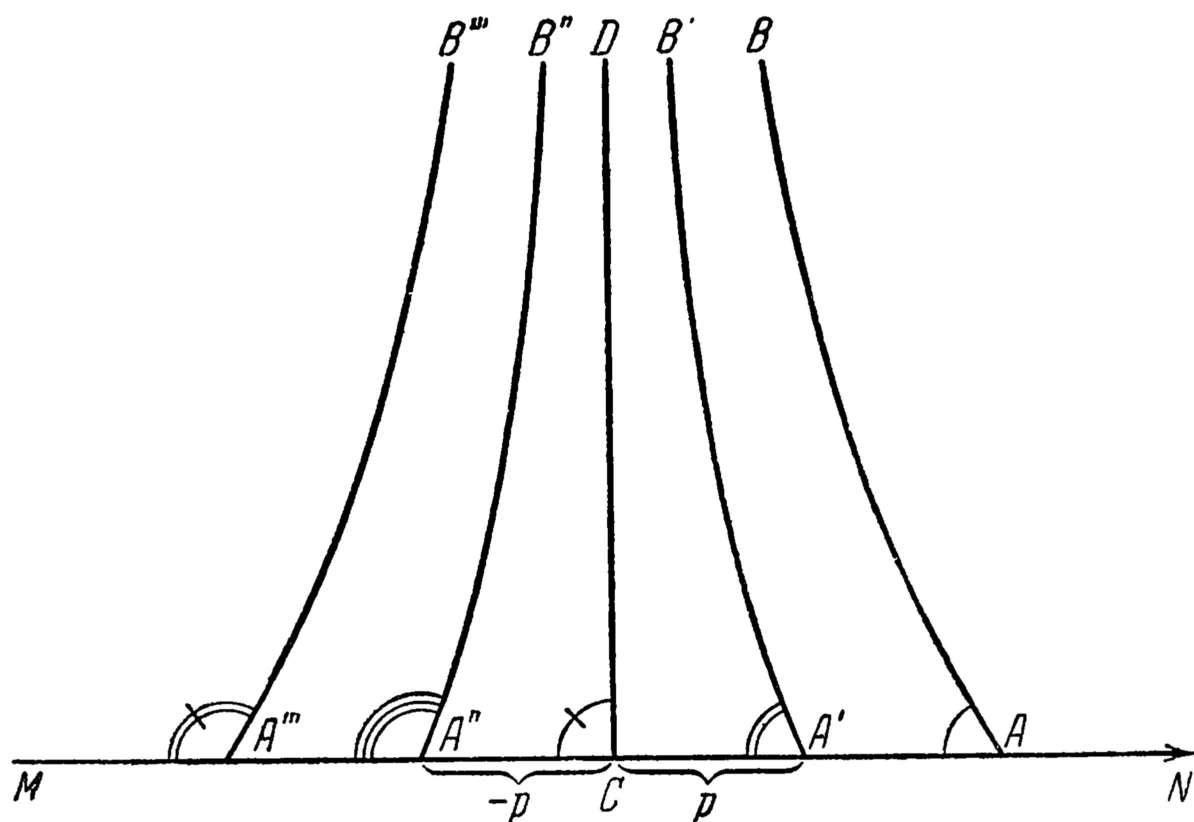
[8] Острый угол $\Pi(p)$ был определен геометрически для положительных чисел p (так как каждому положительному числу при установленной единице меры соответствует определенный отрезок). Будем теперь откладывать от точки C прямой MN (черт. 8) отрезки ... CA, CA', CA'', CA''' ... как в положительном, так и в отрицательном направлениях. Тогда углы параллельности $\angle MAB$, $\angle MA'B'$ ... превращаются для отрицательных отрезков CA'', CA'''... в тупые углы $\angle MA''B''$, $\angle MA'''B'''$. При этом ясно, что если точки A' и A'' расположены на равном расстоянии от C (т. е. $CA' = p$, $CA'' = -p$), то углы $MA'B'$ и $MA''B''$ дают в сумме π, т. е. обозначая угол $MA''B''$ через $\Pi(-p)$, получим

$$\Pi(p) + \Pi(-p) = \pi.$$

Как видим, эта формула (с помощью которой Лобачевский определяет угол параллельности $\Pi(p)$ для отрицательных значений p) представляется вполне естественной.

[9] Предложение, содержащееся в этой рубрике, было, конечно, хорошо известно до Лобачевского; как и предыдущее предложение, оно принадлежит абсолютной геометрии. Впервые оно было, повидимому, установлено в 1603 г. англичанином Харрио (Th. Harriot) и независимо открыто и опубликовано Жираром (A. Girard) в 1629 г. Лобачевский мог бы на него непосредственно сослаться. Однако приведенные в тексте два доказательства имеют двоякую цель. Во-первых, Лобачевскому необходимо четко показать, что доказательство этого предложения не зависит от теории параллельных. Во-вторых, принадлежащее ему второе доказательство имеет то значение, что оно с несущественными изменениями может быть применено к разысканию площади прямолинейного треугольника в его неэвклидовой геометрии (см. Приложение 1 на стр. 415).

[10] Приведенное в тексте доказательство ничем не отличается от того, при помощи которого издавна доказывается, что около каждого треугольника можно описать окружность (Эвклид, „Начала", IV, 5). Существенным моментом в традиционном доказательстве является неявно



Черт. 8

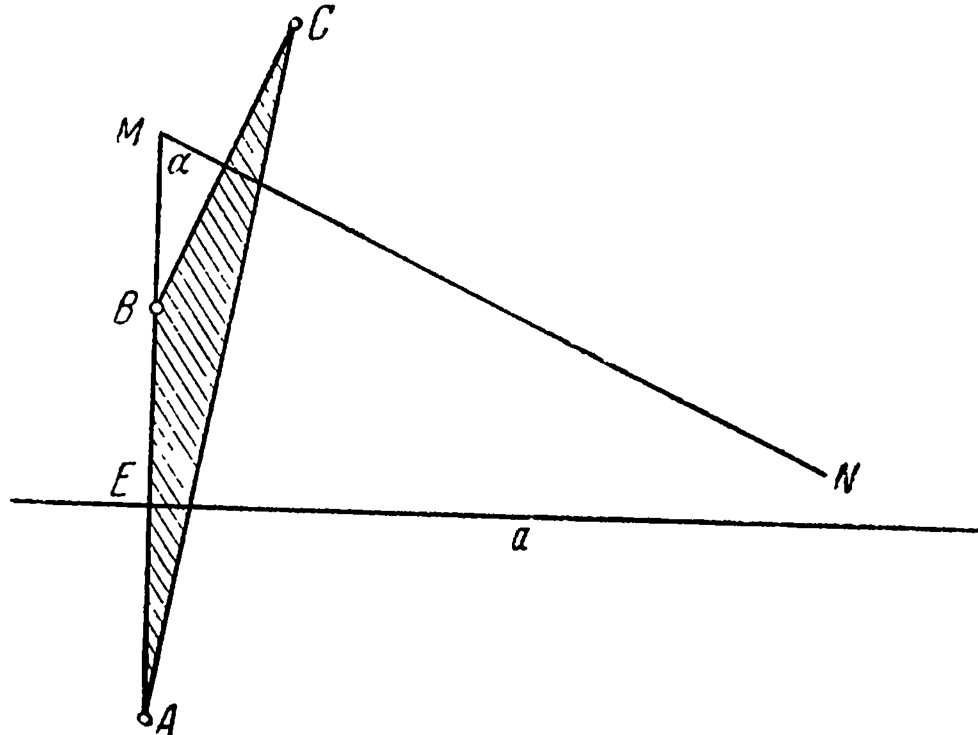
применяемое предположение о том, что точка пересечения D перпендикуляров ED и FD существует. Однако доказать, что эта точка пересечения всегда существует (т. е. что около всякого треугольника можно описать окружность), невозможно без использования эвклидова постулата о параллельных. Действительно, допустим, что эта точка пересечения всегда существует, и покажем, что из этого вытекает постулат о параллельных линиях (тогда как этот постулат из остальных аксиом геометрии не вытекает).

Пусть точка M лежит вне прямой a (черт. 9). Проведем прямую MN, образующую любой острый угол α с перпендикуляром ME, опущенным на a. Возьмем далее любую точку B на ME и пусть A и C — точки, симметричные с B относительно прямых a и MN. Тогда точки A, B, C не лежат на одной прямой (ибо $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$), т. е. являются вершинами некоторого треугольника. Прямые a и MN являются перпендикулярами, проведенными через середины сторон AB и BC, и потому (согласно сделанному допущению) пересекаются, как бы ни был угол α близок к $\frac{\pi}{2}$.

Положение „через любые три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести окружность" эквивалентно постулату Эвклида; оно пред-

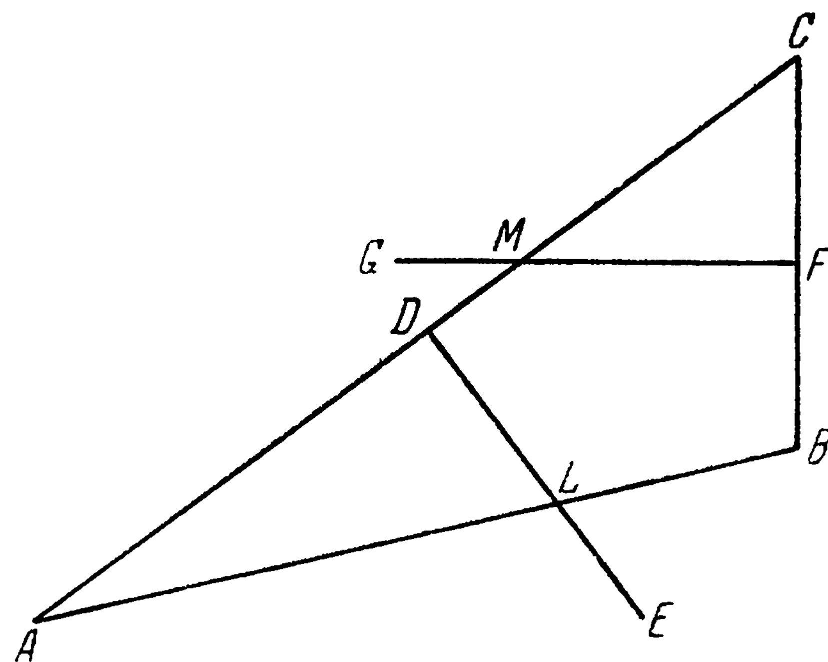
ставляет собой одну из форм постулата, устанавливающего эвклидову геометрию.

[11] На черт. 22 текста, при помощи которого Лобачевский обосновывает все доказательство, оба перпендикуляра DE и FG, восставленные



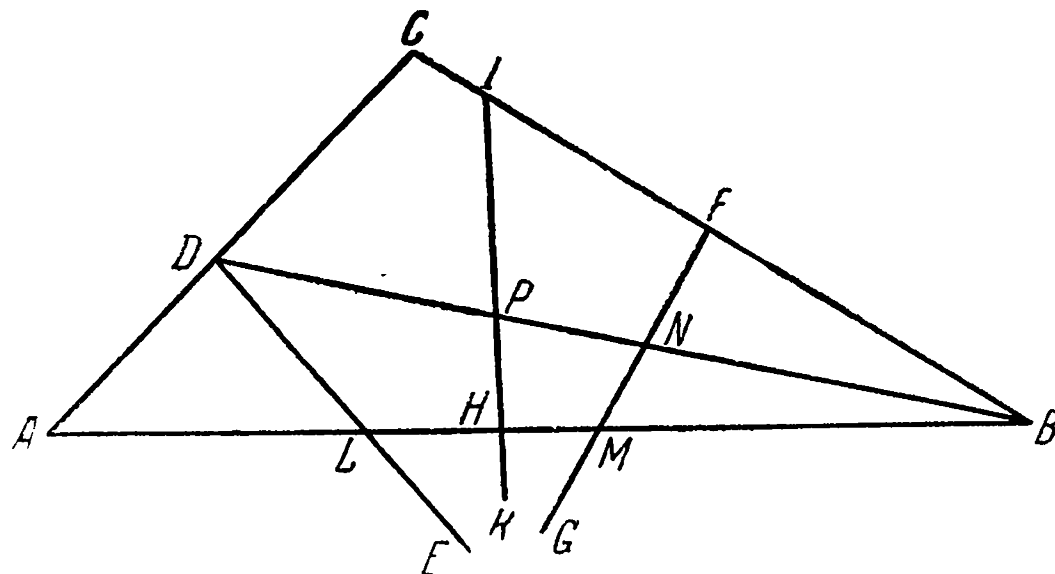
Черт. 9

к сторонам треугольника AC и BC из их середин D и F, пересекают третью сторону AB в точках L и M и притом так, что середина H третьей стороны лежит между точками L и M. Эту конфигурацию необходимо прежде всего обосновать. Конечно, могло бы случиться, что перпендикуляр DE действительно встречает сторону AB треугольника, между тем как перпендикуляр FG встречает не AB, а AC, как это имеет место на черт. 10. Однако в предположении, что перпендикуляры DE, FG, HK не пересекаются (как это соответствует условию теоремы), конфигурация, приведенная в тексте, всегда имеет место, если за основание AB взята *наибольшая* сторона треугольника ($AB \geqslant AC, AB \geqslant BC$) (см. черт. 11). В самом деле, перпендикуляр HI к стороне AB, выходя из треугольника, пересекает бо́льшую из двух других сторон треугольника, скажем, сторону CB, в некоторой точке I. Так как $AB \geqslant CB$, то $HB \geqslant FB$, а потому во всяком



Черт. 10

случае $IB > FB$ (предложение 9). Точка F лежит, следовательно, внутри стороны IB треугольника IHB. Перпендикуляр FM, входя внутрь треугольника IHB, должен пересечь еще одну его сторону; но сторону IH он встретить не может, так как перпендикуляры HK и FG по условию не пересекаются. Следовательно, он встречает сторону HB, т. е. точка M лежит между H и B.



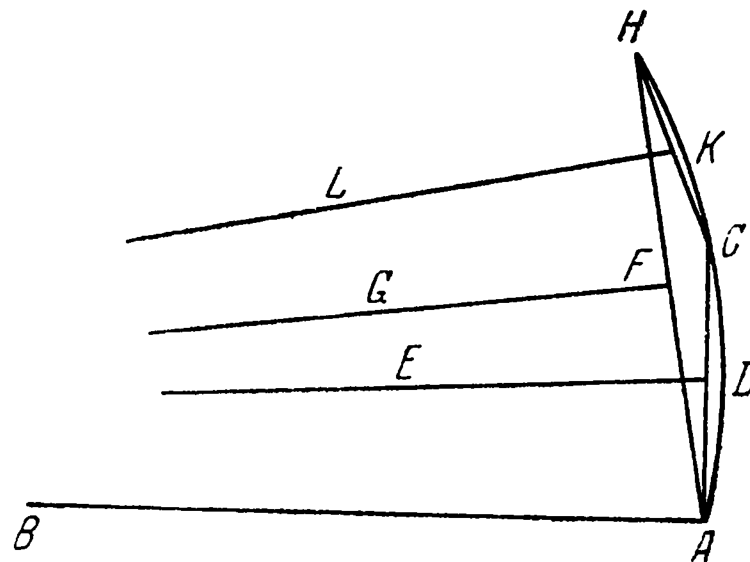
Черт. 11

Проведем теперь медиану DB. В треугольниках ADB и CDB имеются по две соответственно равных стороны ($AD = DC$; сторона BD — общая); третьи их стороны связаны соотношением $AB \geqslant BC$. Поэтому углы, противолежащие этим третьим сторонам, связаны соотношением $\angle ADB \geqslant \angle CDB$. Следовательно, угол ADB прямой или тупой. Но прямым он быть не может, так как иначе перпендикуляр DE совпадал бы с DB и пересекал перпендикуляр FG, что противоречит условию. Таким образом, угол ADB тупой. Поэтому перпендикуляр DE входит внутрь четырехугольника $ADPH$; выходя из него, он не может встретить сторону PH, потому что он вообще не пересекается с перпендикуляром HK. Он встречает, таким образом, сторону AH в некоторой точке L.

[12]. Изложим указанное в тексте построение предельной линии подробнее.

Лобачевский предполагает сначала, что предельная линия задана некоторой определенной своей точкой A (черт. 12) и проходящей через эту точку осью AB (ср. черт. 24 на стр. 46). Под произвольным *острым* углом BAC к оси он проводит прямую AC, на ней откладывает отрезок $AD = a$, для которого $\Pi(a) = \angle BAD$, так что перпендикуляр к нему DE параллелен AB; затем он удваивает этот отрезок, откладывая $DC = AD$. При непрерывном изменении угла CAB от $\frac{1}{2}\pi$ до 0 точка C образует предельную линию, определяемую «началом» A и «осью» AB. Перпендикуляр

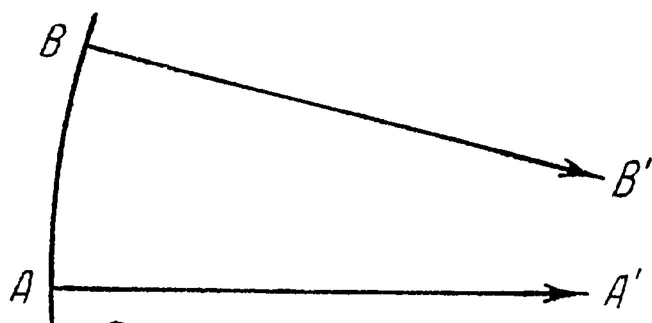
DE к хорде AC, выходящей из начала, в ее середине D параллелен оси AB по самому построению кривой. Совершенно так же перпендикуляр FG к хорде AH в ее середине F параллелен AB, а следовательно, и DE. Таким образом, в треугольнике ACH перпендикуляры, восставленные к двум его сторонам из их середин, параллельны. В силу предложения 30 перпендикуляр KL к хорде HC в ее середине также параллелен AB; иначе говоря, все перпендикуляры, восставленные из середин хорд кривой в надлежащую сторону, параллельны между собой в соответствии с определением предельной линии. Вместе с тем ясно, что ту же кривую получим, если будем исходить, скажем, из точки H и примем за ось луч, проходящий через H параллельно AB. Таким образом, каждая точка предельной линии может быть принята за начало, а проходящая через нее ось — за начальную ось. Это может быть выражено в следующем виде.



Черт. 12

Теорема 1. *Предельная линия вполне определяется любой своей точкой и осью.*

В тесной связи с этим находится еще одно важное свойство предельной линии. Передвинем предельную линию AB (черт. 13) так, чтобы точка A совместилась с точкой B, а луч AA' — с лучом BB'. Тогда предельная линия совместится с самой собой, потому что она так же определяется точкой B и осью BB', как и точкой A и осью AA'. Так как точку B можно взять сколь угодно близко к A, то можно этому результату дать следующее выражение.



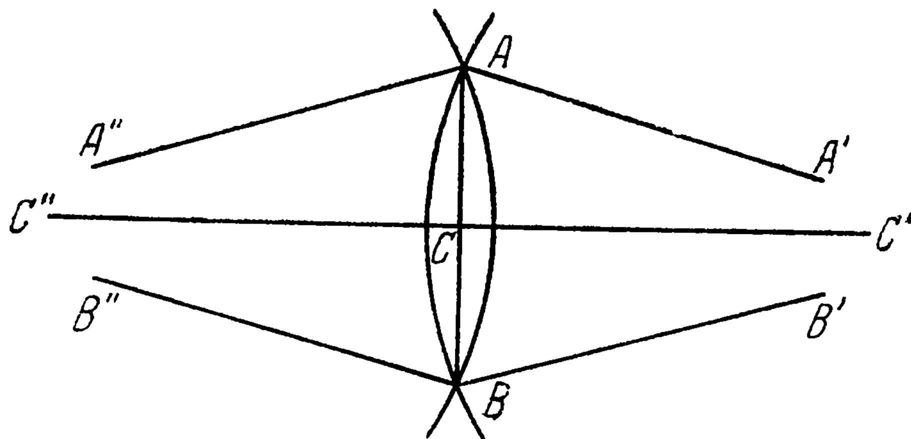
Черт. 13

Теорема 2. *Предельная линия может скользить по себе самой подобно тому, как может скользить по себе самой прямая и окружность.*

Изложенное рассуждение обнаруживает также, что перпендикуляры, восставленные к хордам предельной линии из их середин, не только параллельны между собой, но параллельны осям кривой; они могут рассматриваться как ее оси. Отсюда еще следующий вывод.

Теорема 3. *Предельная линия определяется двумя своими точками до симметрии относительно прямой, соединяющей эти точки*

В самом деле, если A и B (черт. 14) суть две точки предельной линии, то мы найдем ее ось, восставив перпендикуляр к отрезку AB из его середины C. Однако эта ось может быть направлена либо в сторону CC', либо в противоположную сторону CC''. В силу предыдущей теоремы отсюда следует, что через точки A и B проходят две (и только две) предельные линии; они симметричны относительно прямой AB. Третья точка уже определяет и сторону, в которую ось обращена.



Черт. 14

Теорема 4. *Оси предельной линии, проведенные через две ее точки, одинаково наклонены к хорде, соединяющей эти точки.*

В самом деле, как мы видели, $\angle A'AB = \angle B'BA = \Pi\left(\frac{1}{2}AB\right)$. Это свойство предельной линии Гаусс и Бояй принимали за ее определение и основывали на нем ее построение (см. следующее примечание [13]).

Если хорда AB стремится к нулю, то прямая AB обращается в пределе в касательную; угол $\Pi\left(\frac{1}{2}AB\right)$ при этом стремится к $\frac{1}{2}\pi$. Таким образом, имеет место:

Теорема 5. *Касательная к предельной линии перпендикулярна к оси, проходящей через точку касания.*

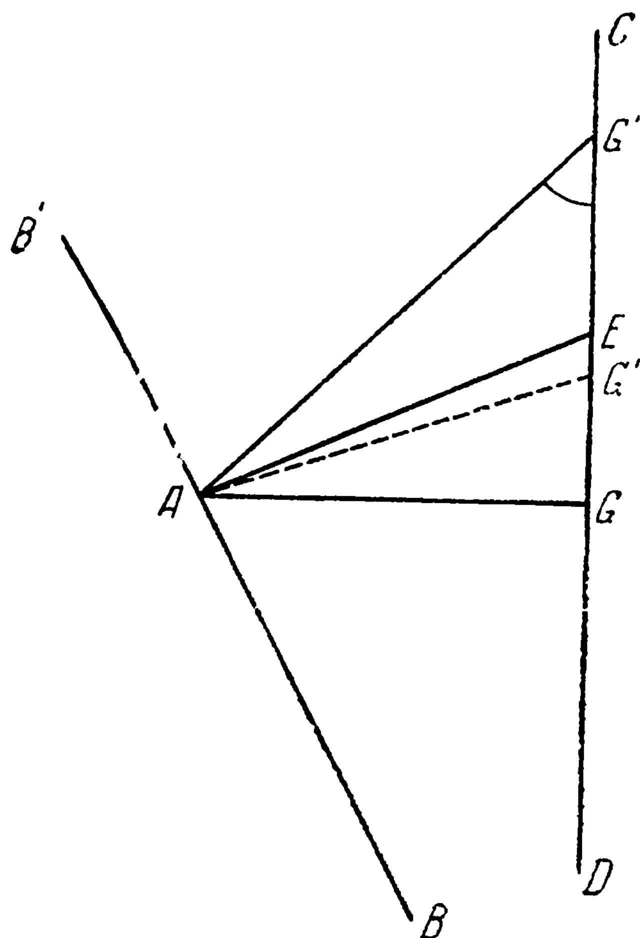
[13] Определение (и построение) предельной линии, данное Гауссом (см. предыдущее примечание), им только намечено. Но оно имеет большие достоинства. Мы дадим здесь подробное обоснование этого построения. Это требует некоторых предварительных предложений.

Лемма 1. *Как бы ни были расположены две прямые AB и CD на плоскости, через каждую точку A одной из них можно провести одну и только одну прямую AE таким образом, чтобы она образовала с обеими данными прямыми равные внутренние односторонние углы, т. е. чтобы имело место равенство* (черт. 15)

$$\angle AED = \angle EAB.$$

Чтобы это доказать, опустим из точки A перпендикуляр AG на прямую CD. Если бы оказалось, что прямая AG перпендикулярна также к AB, то это и была бы требуемая прямая. Положим поэтому, что AG образует с AB с одной стороны острый угол BAG, а с другой стороны — тупой угол $B'AG$. Таким образом, $\angle BAG < \angle AGD$. Отложим в сторону

GC отрезок $GG'' = AG$. Тогда $\angle GAG'' = \angle GG''A$, а потому $\angle BAG'' > > \angle AG''D$. Это значит, что когда секущая AG, вращаясь вокруг A, перейдет из положения AG в AG'', то угол, который она образует с лучом AB, бывший сначала меньше соответствующего ему одностороннего угла при второй прямой (т. е. $\angle BAG < \angle AGD$), в положении AG'' станет больше его ($\angle BAG'' > > \angle AG''D$). Между точками G и G'' в силу непрерывности изменения углов BAG, AGD будет поэтому существовать точка E, при которой $\angle BAE = = \angle DEA$; AE и есть искомая прямая. При дальнейшем вращении секущей угол BAG' при луче AB возрастает, соответствующий же односторонний с ним угол $AG'D$ уменьшается; равенство их нарушается. Через точку A проходит, следовательно, только одна прямая, обладающая требуемым свойством.



Черт. 15

Эту прямую можно называть *секущей равного наклона* прямых AB и CD. Особенное значение имеет тот случай, когда лучи AB и CD параллельны (черт. 16). Если в этом случае AC есть секущая равного наклона, то Гаусс называет точку C *соответственной точке* A на параллели CD. Каждой точке луча соответствует, таким образом, одна и только одна точка на любом параллельном луче.

В развитие леммы 1 приведем еще следующее предложение:

Л е м м а 2. *Перпендикуляр, восставленный к секущей равного наклона AC двух параллельных лучей AB и CD из ее середины E, параллелен этим лучам* (черт. 17).

В самом деле, ни одного из этих лучей он не может встретить, ибо через точку пересечения, если бы таковая существовала, вследствие равенства углов BAC и DCA, неизбежно проходила бы вторая параллель. Всякий же луч AG, проходящий внутри угла EAB, непременно встретит луч CD, а потому, переходя с одной стороны прямой EF на другую, необходимо пересечет луч EF в некоторой точке H (предложение 5 Лобачевского). Это рассуждение Лобачевский собственно и приводит при доказательстве предложения 30 (черт. 22). Самое предложение 30 может быть в терминологии Гаусса формулировано следующим образом.

Лемма 3. *Если через вершины A, B, C треугольника ABC в его плоскости проведены параллельные между собой лучи AA', BB', CC', причем точки A и B соответствуют друг другу на параллелях AA' и BB', а точки B и C соответствуют друг другу на параллельных BB' и CC', то точки A и C друг другу соответствуют на параллелях AA' и CC'* (черт. 18).

Черт. 16

Черт. 17

Еще иначе: *если через вершины A, B, C треугольника ABC в его плоскости проведены параллельные лучи AA', BB', CC', причем две стороны треугольника служат секущими равного наклона по отношению к соответствующим параллелям, то и третья сторона треугольника служит секущей равного наклона по отношению к параллелям, проходящим через ее концы*

Черт. 18

Черт. 19

Обратимся теперь к той роли, которую эти предложения играют в геометрии Лобачевского или, лучше, в том определении предельной линии, которое дает Гаусс.

В некоторой плоскости представим себе луч AA' и совокупность всех ему параллельных лучей (пучок параллельных лучей; мы будем говорить

короче: „пучок AA'"). Если будем исходить от определенной точки A на AA', то ей на каждом луче BB' пучка *соответствует* в установленном значении слова определенная точка B. *Геометрическое место точек B на всех лучах пучка и есть предельная линия Лобачевского.*

В самом деле, если B и C (черт. 19) суть две точки этой линии, т. е. если они соответствуют точке A на параллелях BB' и CC', то в силу леммы 3 (т. е. предложения 30 в тексте Лобачевского) они и друг другу соответствуют на своих параллелях, т. е. BC есть секущая равного наклона по отношению к параллелям BB' и CC'. Согласно лемме 2 перпендикуляр EE', восставленный из середины хорды BC, параллелен лучам BB', CC', т. е. принадлежит пучку AA'. Кривая обладает основным свойством, которым Лобачевский определяет предельную линию. Обратно, построение Лобачевского устанавливает, что его предельная линия обладает свойством, содержащимся в этом новом определении. В самом деле, если B есть точка предельной линии, определяемой началом A и осью AA', а хорда $AB = 2a$, то по построению Лобачевского $\angle A'AB = \angle B'BA = \Pi(a)$.

Если бы мы исходили при построении предельной линии не от точки A, а от другой точки B, то точка A, как соответствующая B на параллели BB', оказалась бы на предельной линии, определяемой точкой B и лучом BB'; на ней оказалась бы и каждая точка C той же линии. Это значит, что *любая точка предельной линии может быть принята за начало, а проходящая через нее ось — за начальную ось*; результат, к которому приводит также построение Лобачевского, как это было указано в предыдущем примечании.

[14] Сущность этого рассуждения вряд ли может представить затруднение. Тем не менее точное обоснование этих заключений требует предварительного установления нескольких простых теорем.

Лемма 1. *Если в прямолинейном четырехугольнике $AA'B'B$* (черт. 20) *равны углы при «нижнем основании»* ($\angle A = \angle B$) *и „боковые стороны"* ($AA' = BB'$), *то равны также углы при верхнем основании* ($\angle A' = \angle B'$), *а средняя линия* (*т. е. прямая CC', соединяющая середины обоих оснований*) *перпендикулярна к основаниям.*

Доказательство осуществляется наложением четырехугольника самого на себя, так что AB совмещается с BA, BB' с AA', и обратно, а средняя линия CC' совмещается с самой собой.

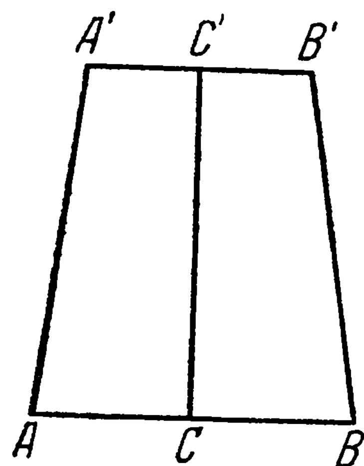
Лемма 2. *Если в прямолинейном четырехугольнике $AA'B'B$ равны углы при верхнем и при нижнем основаниях* ($\angle A = \angle B$ *и* $\angle A' = \angle B'$), *то равны и боковые стороны* ($AA' = BB'$) (черт. 21).

Доказательство от противного. Допустим, что $AA' < BB'$. Отложим на BB' отрезок $BB'' = AA'$. Теперь в четырехугольнике $ABB''A'$ углы при верхнем основании в силу предыдущей теоремы должны быть равны:

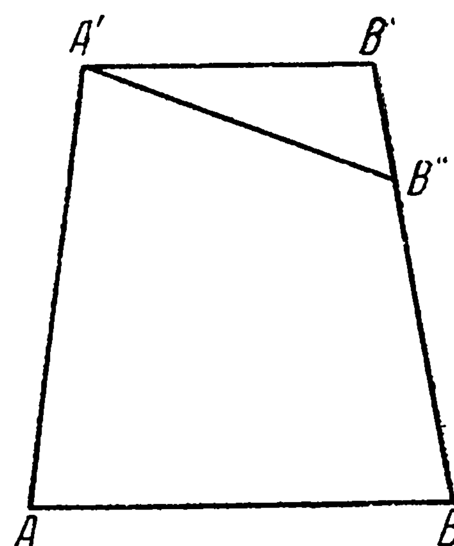
$\angle AA'B'' = \angle BB''A'$, что несовместимо с равенством углов $AA'B'$ и $A'B'B$.

Теорема 1. *Отрезки осей, которые содержатся между предельными линиями, имеющими общие оси, равны между собой.*

На чертеже 22 AA' и BB' суть общие оси предельных линий AB и $A'B'$. Вследствие этого угол $A'AB$ равен углу $B'BA$ (см. на стр. 480—483 подробное примечание [13] к предложению 31); по той же причине равны также углы $AA'B'$ и $BB'A'$; в силу леммы 2 поэтому равны отрезки AA' и BB'.

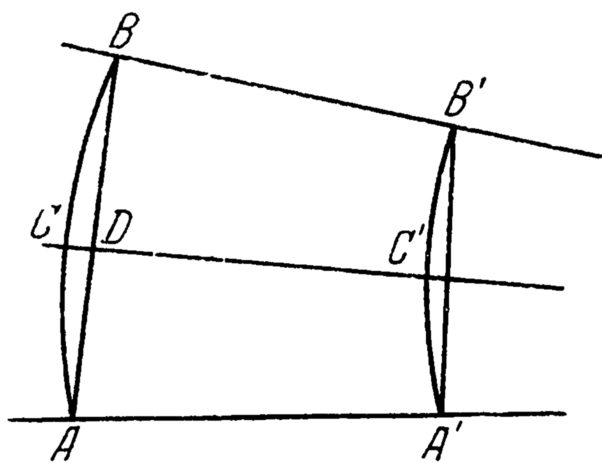


Черт. 20

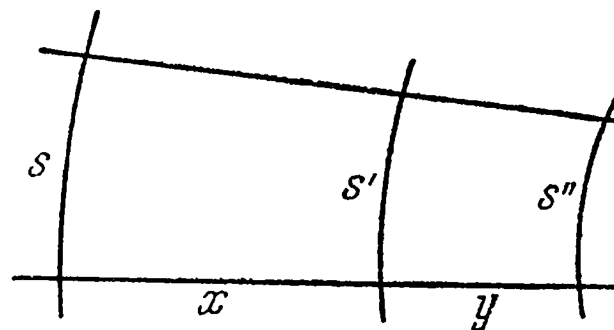


Черт. 21

Теперь мы можем с полным основанием говорить о расстоянии x между двумя „параллельными" (т. е. имеющими общие оси) предельными линиями: это расстояние можно отсчитывать по любой оси: $AA' = BB' = x$.



Черт. 22



Черт. 23

Перпендикуляр BD, опущенный из точки B на ось CC', называется *высотой предельной дуги BC*. Таким образом, высота предельной дуги есть перпендикуляр, опущенный из одного ее конца на ось, проходящую через другой ее конец. Ясно, что *предельная дуга* (по своей длине) вполне

определяется своей высотой. В самом деле, если дан отрезок BD, то, продолжив его на расстояние $DA = DB$, проведем дугу BCA, проходящую через точки A и B (см. [12], теорема 3). Половина этой дуги BC удовлетворяет требованию.

Теорема 2. *Равным дугам предельной линии отвечают равные дуги на параллельной предельной линии.*

Если $AC = CB$, то мы совместим дугу AC с CB (см. примечание [12], теорема 2): дуга AC может скользить по CB. Тогда оси AA' и CC' пойдут по осям CC' и BB' (теорема 3 в том же примечании); равные отрезки AA' и CC', а также CC' и BB' соответственно совместятся; вместе с тем дуга $A'C'$ совместится с дугой $C'B'$ (та же теорема 3).

Теорема 3. *Соответствующие дуги s и s', t и t' двух параллельных предельных линий пропорциональны.*

Эта теорема доказана в тексте на основе теоремы 2.

[15] Как показано в тексте, отношение $\frac{s}{s'}$ есть функция расстояния x между предельными дугами, от величин же дуг s и s' оно не зависит. Эту функцию обозначим через $f(x)$.

Возьмем три предельные дуги s, s', s'' (черт. 23), содержащиеся между теми же двумя осями. Пусть x будет расстояние между дугами s и s', y — расстояние между дугами s' и s''. Тогда

$$s = s'f(x), \quad s' = s''f(y),$$

$$s = s''f(x+y).$$

Следовательно, функция $f(x)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$f(x+y) = f(x)\,f(y);$$

так как $f(x)$ есть непрерывная функция от x, то это уравнение характеризует показательную функцию a^x. Так как по условию $f(1) = e$, то $a = e$, т. е. $s = s'e^x$, где e, однако, остается еще неопределенным. Лобачевский замечает, что надлежащим выбором единицы длины можно привести к тому, что основание e совпадет с основанием неперовых логарифмов. При выяснении этого для большей отчетливости будем исходить из формулы $s = s'a^x$.

Если мы увеличим единицу длины в k раз, то отношение $\frac{s}{s'}$ сохранит свое значение, число же x заменится числом $\bar{x} = \frac{x}{k}$. Поэтому мы будем иметь

$$s = s'a^{k\bar{x}} = s'(a^k)^{\bar{x}}.$$

Число k можно выбрать так, чтобы $a^k = e$, где e — основание неперовых логарифмов. Вместе с тем

$$s = s'e^{\bar{x}} \text{ или } s' = se^{-\bar{x}}. \qquad (*)$$

Черта над x означает, что длина отрезка выражена в специфической единице, при которой формула (*) имеет место. Лобачевский раз навсегда устанавливает, что единица меры выбрана именно так, а потому пишет просто $s' = se^{-x}$. Нужно, однако, твердо помнить, что этим зафиксирована единица длины (ср. прим. [21]).

В связи с этим нужно обратить внимание на следующее весьма важное обстоятельство. В гиперболической геометрии, как обнаруживают эти соображения, существует некоторая специфическая длина, выбор которой в качестве единицы меры имеет абсолютное преимущество: говорят, что в гиперболическом пространстве возможна „абсолютная мера длины". Эта единица меры определяется математически и на основе этого определения может быть фактически установлена только экспериментально. Абсолютная мера длины гиперболического пространства есть та, в которой имеет место соотношение $s' = se^{-x}$; это — ее математическое определение.

Какова же эта единица фактически? Этот вопрос может быть разрешен только прямым измерением. Дальнейшие соображения по этому вопросу читатель найдет ниже, в примечании [26] к предложению 37.

Отрезок, служащий при установленных соглашениях единицей длины, в настоящее время часто называют *радиусом кривизны пространства*. Возможность абсолютной единицы длины долго вызывала возражения против признания гиперболической геометрии. В эвклидовом пространстве такой абсолютной единицы не существует: все прямолинейные отрезки здесь равноправны, и единица меры может быть установлена только заданием стандарта — зафиксированного стержня. Однако на сфере абсолютная мера длины в том смысле, как понимается этот термин, возможна: за таковую можно, например, принять длину окружности большого круга или определенную ее часть. Такой абсолютной единицей меры является также радиан, т. е. π-я часть полуокружности большого круга; в этой именно абсолютной единице обыкновенно пишутся все метрические соотношения сферической геометрии.

Если в гиперболическом пространстве за единицу меры принять не радиус кривизны пространства, а другой отрезок, в $\varkappa$ раз меньший, то основное соотношение предложения 33 принимает вид

$$s' = se^{-\frac{x}{\varkappa}}.$$

Лобачевский всегда полагает $\varkappa = 1$; нужно, однако, снова отметить, что при этом условии единица длины уже зафиксирована.

[16] Предельную поверхность Лобачевский определяет как такую поверхность, которая образуется вращением предельной линии вокруг одной из своих осей. Это определение, таким образом, существенно отличается от определения предельной линии. Между тем, эти определения могут быть сближены. Все элементы для такого объединения содержатся и в предложении 34 настоящего сочинения.

Предположим, как в тексте, что предельная поверхность образована вращением предельной линии вокруг оси ее AA' (черт. 27 на стр. 50). Лобачевский отмечает прежде всего, что во всякой точке B поверхности ось BB' наклонена к хорде AB под тем же углом, под которым к этой хорде наклонена ось вращения AA'. В терминологии Гаусса (см. примечание [13]) это означает, что точка B на луче BB' соответствует точке A на луче AA'.

Но так как этим свойством обладает каждая точка предельной поверхности, то это приводит к следующему определению последней.

Представим себе все лучи *в пространстве*, параллельные лучу AA',— „связку параллелей". Каждый луч BB' этой связки лежит с AA' в одной плоскости, и на нем существует одна и только одна точка B, соответственная (см. примечание [13]) точке A луча AA'. ***Геометрическое место точек B на всех лучах связки и есть предельная поверхность, определяемая точкой A и осью AA'.*** Это определение предельной поверхности явно аналогично определению предельной линии в плоскости. Исследование предельной линии основывается главным образом на предложении, приведенном в примечании [13] в виде леммы 3. Это предложение остается в силе и в том случае, когда параллельные лучи AA', BB', CC' расположены не в одной плоскости, а как угодно в пространстве. Именно доказательство этой теоремы и составляет главное содержание предложения 34 в тексте. Формулируем ее в этом виде.

Если AA', BB' и CC' суть параллельные между собой лучи, которые не расположены в одной плоскости, причем как точка B на луче BB', так и точка C на луче CC' соответствуют точке A на луче AA', то точки B и C соответствуют друг другу на лучах BB' и CC'.

Дадим еще другое доказательство этого предложения. Пусть B^* — точка луча BB', соответствующая точке C луча CC'. Отложим отрезки

$$AA_1 = BB_1 = CC_1 = B^*B_1^* = x.$$

Тогда имеем (предложение 33)

$$B_1^*C_1 = B^*C \cdot e^{-x};\ C_1A_1 = CA \cdot e^{-x};\ A_1B_1 = AB \cdot e^{-x}$$

потому

$$B_1^*B_1 \leqslant B_1^*C_1 + C_1A_1 + A_1B_1 = (B^*C + CA + AB)e^{-x}.$$

Но в силу равенства $BB_1 = B^*B^*_1$ мы имеем

$$B^*B = B^*_1B_1 \leqslant (B^*C + CA + AB)e^{-x}.$$

Так как здесь число x произвольно, то длина отрезка B^*B равна нулю, т. е. точка B луча BB' соответствует точке C луча CC'.

Если теперь за начало предельной поверхности примем точку B и луч BB' — за начальную ось, то точки A и C, как соответствующие ей на лучах AA' и CC', окажутся на поверхности. Это значит:

Каждая точка предельной поверхности может быть принята за начало, а проходящая через нее ось — за начальную ось.

Предельную поверхность можно, таким образом, рассматривать как поверхность вращения вокруг любой оси (подобно тому, как это имеет место в случае сферы и плоскости).

Теперь уже не трудно показать совершенно так же, как это было сделано в примечании [12] (теорема 2), что предельная поверхность может передвигаться по самой себе так, чтобы каждая ее точка пришла в совмещение с любой другой ее точкой, а вращением поверхности вокруг любой ее точки можно любой выходящий из этой точки предельный луч поверхности привести в совмещение с любым другим предельным лучом, выходящим из той же точки. На предельной поверхности, таким образом, возможны движения тех же типов, что и на плоскости или на сфере.

[17] Эвклидова двумерная геометрия, так называемая *планиметрия*, может быть построена рассуждениями, относящимися только к плоскости, т. е. без обращения в трехмерное пространство. Такое построение эвклидовой планиметрии осуществляется на основе возможных в плоскости движений и постулатов, характеризующих ее основные образы, главным образом прямую. Движения в эвклидовой плоскости характеризуются следующими „постулатами движения":

a) *Плоскость может быть перемещена в самой себе таким образом, чтобы любая ее точка A пришла в совмещение с любой другой ее точкой A' (принцип транзитивности движения).*

b) *Плоскость может быть повернута в самой себе вокруг любой ее точки A таким образом, чтобы любой луч AB, выходящий из центра вращения, совместился с любым другим лучом AB', также выходящим из центра вращения („принцип вращения").*

Этими двумя постулатами устанавливаются возможные в плоскости движения. С присоединением к ним постулатов Эвклида о прямой линии — постулатов, характеризующих расположение точек на прямой, постулата непрерывности, постулата Паша (см. примечание [2] на стр. 469), наконец,

постулата о параллельных линиях, получается база, на которой строится плоская геометрия Эвклида *.

Двумерная геометрия может быть в том же порядке идей построена и на другой поверхности, допускающей движения с теми же степенями свободы. Такими поверхностями в эвклидовом пространстве являются только сферы. На сфере возможны движения, удовлетворяющие принципу транзитивности и принципу вращения. Но роль прямых линий здесь играют окружности больших кругов, роль лучей — соответствующие полуокружности.

Однако постулаты, характеризующие окружности больших кругов на сфере, существенно отличаются от постулатов, характеризующих прямые на плоскости. Прямая вполне определяется любыми двумя точками, так что две прямые на плоскости могут пересекаться только в одной точке; окружности больших кругов на сфере всегда пересекаются в двух точках. Прямая может быть неограниченно продолжена в обе стороны; окружность большого круга есть замкнутая кривая конечного размера. Это порождает глубокое различие в плоской и сферической (или, иначе, эвклидовой и римановой) геометриях.

Обращаемся к «пространству Лобачевского», т. е. к пространству, в котором имеют место установленные им постулаты неэвклидовой геометрии. Здесь на плоскости имеет место своеобразная «гиперболическая» геометрия, отличная от эвклидовой. На сфере в гиперболическом пространстве имеют место те же движения (и та же геометрия, см. ниже, предложение 35), что и на сфере эвклидова пространства.

Но в гиперболическом пространстве существует, кроме того, замечательный тип поверхностей, на которых возможны движения, удовлетворяющие тем же основным двум постулатам. Это — предельные поверхности (см. примечание [16]).

При построении геометрии предельной поверхности роль прямых играют предельные линии. Предельная линия на предельной поверхности вполне определяется двумя точками. Действительно, если через точки A и B предельной поверхности проведем ее оси AA' и BB' и через них проведем плоскость, то она пересечет предельную поверхность по той единственной предельной линии, которая на этой поверхности проходит через точки A и B. Далее, предельную линию можно неограниченно продолжить в обе стороны. На предельной поверхности остаются в силе постулаты, определяющие расположение точек на предельной линии, постулат непрерывности, постулат Паша. Лобачевский еще даже не владел точно перечнем постулатов геометрии; но из 15 предложений, приведенных им в на-

* Об аксиоматике эвклидовой плоскости (а также плоскости Лобачевского) см. в Приложении 3.

чале настоящего сочинения в качестве базы для всего дальнейшего построения геометрии, 10 относятся к двумерной геометрии и как бы составляют принимаемую им аксиоматику плоской геометрии. Все эти 10 предложений остаются в силе на предельной поверхности, если в них заменить прямые предельными линиями. Поэтому для окончательного решения вопроса о характере геометрии остается только решить, как обстоит дело с постулатом о параллельных линиях. Но мы знаем, что этот постулат эквивалентен предложению, что сумма углов в треугольнике равна π. В предельном треугольнике на предельной поверхности сумма внутренних углов действительно равна π. Следовательно, *на предельной поверхности имеет место эвклидова геометрия*. Этот замечательный результат, таким образом, обнаруживает, что с отказом от постулата эвклида о параллельных линиях двумерная эвклидова геометрия не прекращает своего существования: она только переносится с плоскости на предельную поверхность. Значение этого факта выясняется в примечании [18].

Полезно отметить, что в гиперболическом пространстве существуют поверхности еще одного типа, на которых возможно движение фигур без деформации с тремя степенями свободы; это — *эквидистантные поверхности*. Под эквидистантной поверхностью разумеют геометрическое место точек, отстоящих от заданной плоскости (базы поверхности) на одно и то же расстояние h (параметр поверхности). На плоскость можно смотреть как на эквидистантную поверхность с параметром $h = 0$. Таким образом в гиперболическом пространстве существует три типа поверхностей, на которых возможны движения с тремя степенями свободы: сферические, эквидистантные и предельные поверхности.

[18] Отметим два важных следствия из того факта, что на предельной поверхности имеет место эвклидова геометрия.

Во-первых, в предельном треугольнике* сохраняются *соотношения эвклидовой геометрии*, что служит отправной точкой для построения метрики неэвклидова (гиперболического) пространства. На этом пути Лобачевский доказывает, в частности, предложение 35, наиболее важное во всем сочинении. Главное содержание этого предложения заключается в том, что в нем устанавливаются соотношения между сторонами и углами как в прямолинейном, так и сферическом прямоугольных треугольниках гиперболического пространства. Вывод этих соотношений (довольно сложный, несмотря на элементарность отдельных его приемов) представляет собой образец тонкой, изумительно искусной цепи умозаключений, может быть, наиболее характерных синтетических рассуждений Лобачевского.

* Т. е. треугольнике, образованном на предельной поверхности дугами предельных линий.

Во-вторых, установленный факт имеет непосредственное отношение к важному вопросу о *непротиворечивости* геометрии Лобачевского. Предчувствуя, что необычность выводов его геометрии встретит массу возражений, Лобачевский попытался доказать, что его теория непротиворечива.

Иначе говоря, доказать, что в рамках этой теории невозможно получить двух теорем, взаимно исключающих друг друга, невозможно прийти к противоречию. Сам Лобачевский не сумел, однако, строго доказать непротиворечивость своей геометрии, но был глубоко убежден в этой непротиворечивости на основе двух своих результатов. Один из этих результатов заключается в том, что тригонометрические формулы, выведенные Лобачевским, получаются из формул обычной сферической тригонометрии, если в них радиус сферы заменить чисто мнимым числом (см. заключительные строки „Геометрических исследований"). Отсюда вытекает, как полагал Лобачевский, что его тригонометрия (а значит, и геометрия) так же непротиворечива, как и обычная сферическая геометрия. С современной аксиоматической точки зрения это соображение нельзя признать строгим доказательством непротиворечивости, хотя оно и является довольно убедительным.

Другим результатом является доказанная выше теорема о том, что на предельной поверхности имеет место эвклидова геометрия. Этот результат показывает, что внутри гиперболического пространства, пользуясь „материалом" этого пространства, можно построить *модель* (или *интерпретацию*) обычной эвклидовой геометрии (правда, только плоской геометрии, т. е. планиметрии). Таким образом, из непротиворечивости геометрии Лобачевского вытекает непротиворечивость эвклидовой планиметрии. Хотя этот результат является прямо противоположным тому, который хотелось бы получить (желательно было бы, предполагая установленной непротиворечивость геометрии Эвклида, доказать непротиворечивость геометрии Лобачевского, а не наоборот), он все же показывает тесную связь этих двух геометрических систем и внушает некоторую убежденность в математической непогрешимости геометрии Лобачевского. Однако ни один из этих результатов не дает строго доказательства непротиворечивости.

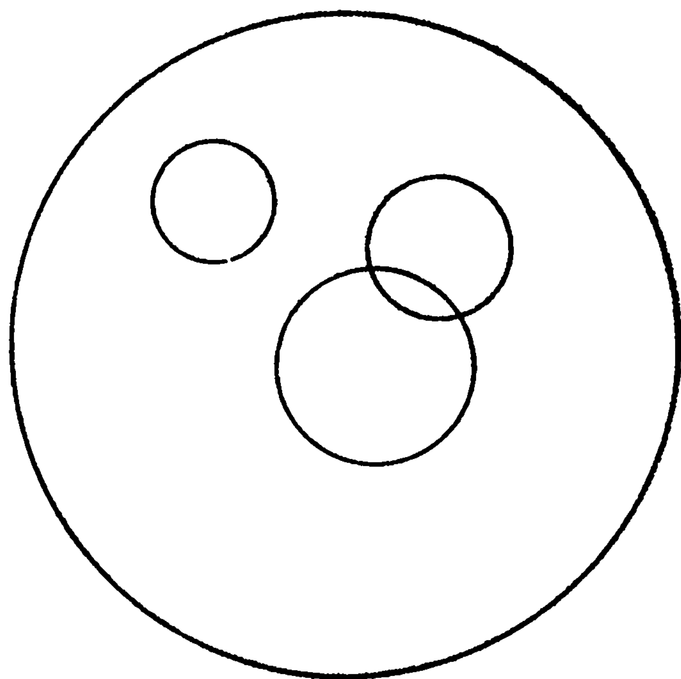
Первое строгое доказательство непротиворечивости геометрии Лобачевского было получено Клейном, который заметил, что на основании работ Кэли по проективной геометрии можно построить модель (интерпретацию) геометрии Лобачевского из „материала" эвклидовой плоскости (так называемая модель Кэли — Клейна). Другая интерпретация была предложена Пуанкаре („модель Пуанкаре"). Обе интерпретации (Кэли — Клейна и Пуанкаре) тесно связаны друг с другом. Дадим краткий обзор интерпретации Пуанкаре.

В плоскости с двумя действительными прямоугольными координатами x, y или, иначе, с одной комплексной координатой $z = x + iy$ рассмотрим единичный круг $|z| < 1$. Модель Пуанкаре строится из всех внутренних точек этого круга, которые и будут рассматриваться как „точки" плоскости Лобачевского. Движениями в этой модели служат конформные (сохраняющие углы) преобразования единичного круга, т. е. дробно-линейные преобразования вида

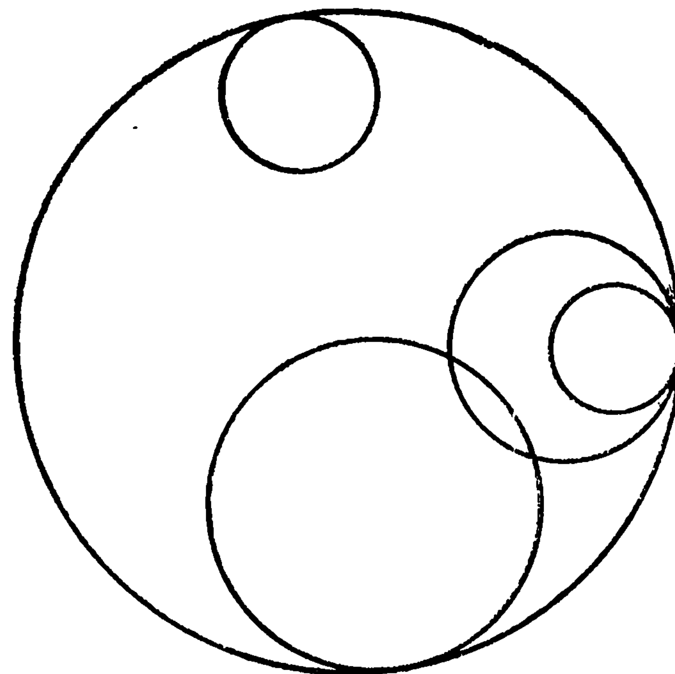
$$z_1 = e^{i\varphi} \frac{z - \bar{\alpha}}{\alpha z - 1},$$

где φ — действительное число, а α — комплексное число, меньшее единицы по модулю (т. е. точка единичного круга). Эти движения удовлетворяют обоим постулатам, указанным в примечании [17].

Перейдем к описанию геометрических образов. Всякая дуга окружности или прямой линии, расположенная внутри единичного круга, рассматривается в модели Пуанкаре либо как „прямая", либо как „окружность", либо как „предельная линия", либо как „эквидистанта". Именно, всякая окружность, расположенная целиком внутри единичного круга,



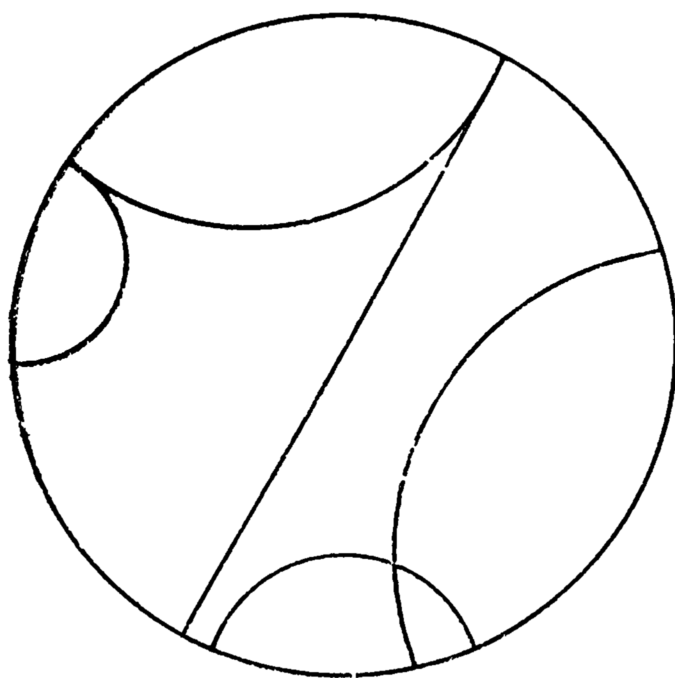
Черт. 24



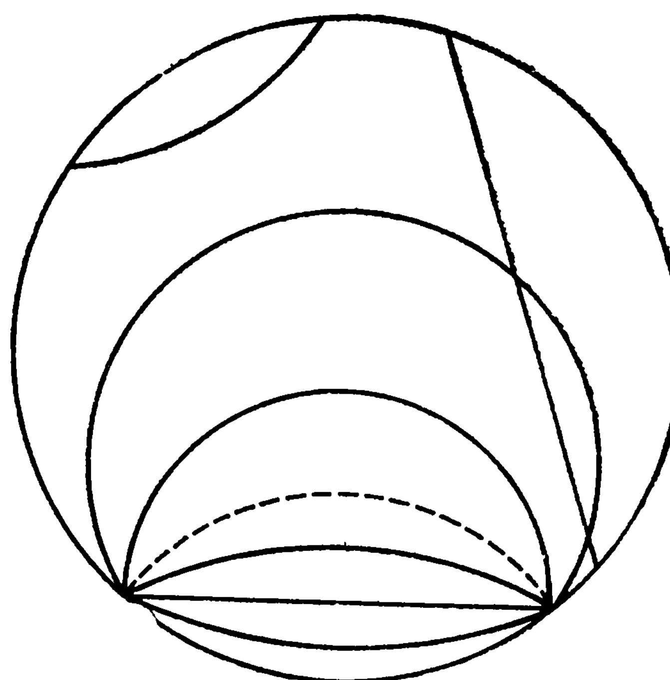
Черт. 25

рассматривается как „окружность" в этой модели (черт. 24). Окружность, изнутри касающаяся границы единичного круга, рассматривается как „предельная линия" (черт. 25). Наконец, окружности или прямые, пересекающие границу единичного круга (вернее, дуги этих линий, расположенные внутри единичного круга), рассматриваются как „прямые" и „эквидистанты": как „прямые", если эти дуги подходят под прямым углом к границе единичного круга (черт. 26), и как „эквидистанты" в противном случае (черт. 27). „Углом" между двумя „прямыми" называется угол меж-

ду изображающими их дугами окружностей. Две „прямые“ рассматриваются как „параллельные“, если изображающие их дуги имеют общую

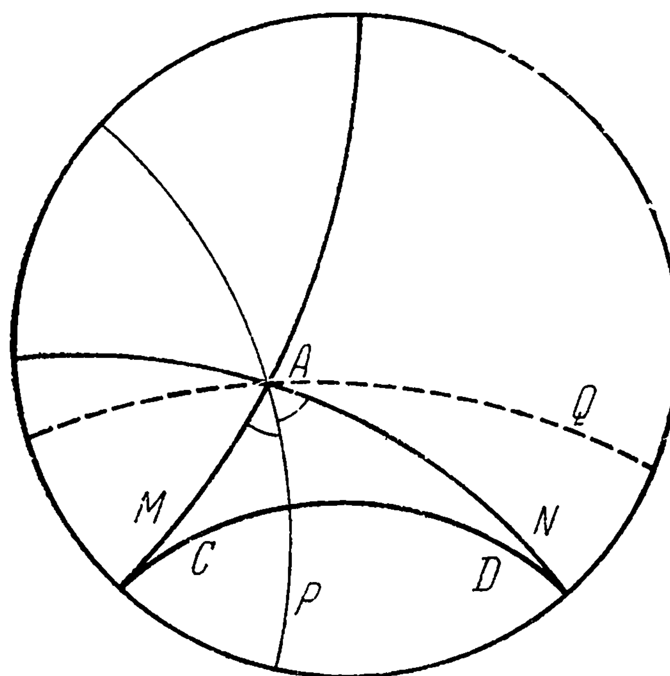


Черт. 26



Черт. 27

точку на границе единичного круга (напомним, что граничные точки единичного круга в рассматриваемую модель не входят). На черт. 28 изображены „прямые“ AM и AN, „параллельные“ одной и той же „прямой“ CD в различных направлениях. Непосредственно видно, что через точку A, лежащую вне «прямой» CD, проходит бесконечно много «прямых», не встречающих CD. «Параллели» AM и AN отделяют пересекающие «прямые» (такие, как AB) от «расходящихся» (AQ).



Черт. 28

Модель Кэли—Клейна также строится в круге, но прямые линии в ней изображаются не дугами окружностей, а отрезками прямых линий (см. Приложение 3*).

* Излагаемое в Приложении 3 построение модели Кэли — Клейна взято из книги Б. Н. Д е л о н е «Краткое изложение доказательства непротиворечивости планиметрии Лобачевского» (Изд-во АН СССР, 1953). Подробное построение модели Пуанкаре см., например, в одной из следующих книг: Н. В. Е ф и м о в «Высшая геометрия»; И. И. П р и в а л о в «Введение в теорию функций комплексного переменного».

[19] В эвклидовой геометрии угол обычно измеряется либо в градусах, либо в радианах. Оба эти способа измерения угла применяются и в неэвклидовой геометрии; но здесь возможен и своеобразный *линейный* способ выражения угла. Каждому острому углу φ отвечает отрезок, выражаемый в установленной единице меры числом x, для которого $\Pi(x) = \varphi$; это число x и представляет своеобразное, только в неэвклидовой геометрии существующее выражение угла; его поэтому можно назвать *гиперболическим* (или линейным) *значением угла*; нужно, однако, иметь в виду, что гиперболическое значение угла не пропорционально величине угла. Этим гиперболическим значением угла Лобачевский уже и выше пользовался для выражения угла (см., например, предложение 34; двугранный угол выражен своим гиперболическим значением a); в дальнейшем он пользуется им систематически. Заметим еще, что $\Pi(x)$ выражает в радианах тот угол, гиперболическое (линейное) значение которого есть x.

Здесь, однако, Лобачевский вводит дополнительное соглашение, заключающееся в следующем. Обозначая через x гиперболическое значение некоторого угла, он обозначает через x' гиперболическое значение дополнительного угла. Таким образом, углы $\Pi(x)$ и $\Pi(x')$ всегда дополняют друг друга до $\frac{1}{2}\pi$; это и выражено уравнением, приведенным в тексте.

Отрезки x и x' условимся называть дополнительными друг к другу.

[20] Действительно, положим, что существует сферический треугольник kmn (черт. 28 на стр. 53) со сторонами $mn = \Pi(c)$, $kn = \Pi(\beta)$, $mk = \Pi(a)$ и противолежащими им углами $\Pi(b)$, $\Pi(\alpha')$, $\frac{1}{2}\pi$. На луче Bn отложим отрезок BA, равный c, и из точки A опустим перпендикуляр AC на прямую Bk. Полученный таким образом треугольник ABC будет удовлетворять требованию. Действительно, из точки A восставим перпендикуляр AA' к плоскости треугольника ABC; луч Bm обозначим через BB' и прямую пересечения плоскостей $B'BC$ и $A'AC$ обозначим через CC'. Угол $B'BA$ измеряется стороной mn сферического треугольника, а потому равен $\Pi(c) = \Pi(AB)$; следовательно, луч BB' параллелен AA'; вместе с тем луч CC' параллелен AA' и BB' (см. заключительный абзац предложения 25). С другой стороны, по самому построению плоскость $C'CAA'$ перпендикулярна к плоскости треугольника ABC; прямая BC перпендикулярна к плоскости $C'CAA'$, а вследствие этого она перпендикулярна и к прямой CC'; поэтому $\angle B'BC = \Pi(BC)$; но этот угол измеряется дугой mk сферического треугольника, а потому равен $\Pi(a)$; следовательно, $BC = a$. Далее, $\angle C'CA = \Pi(AC)$; но этот угол совпадает с углом k сферического треугольника, а потому равен $\Pi(b)$; следовательно, $AC = b$. Угол B прямоугольного треугольника ABC измеряется дугой kn, а потому равен $\Pi(\beta)$.

Далее, двугранный угол (CC') прямой, двугранный угол (BB') совпадает с углом m сферического треугольника, а потому равен $\Pi(\alpha')$. Наконец, двугранный угол $(AA') = \frac{1}{2}\pi - (BB') = \frac{1}{2}\pi - \Pi(\alpha') = \Pi(\alpha)$, а так как угол (AA') измеряется линейным углом A, то $A = \Pi(\alpha)$. Итак, в треугольнике ABC стороны и углы имеют значения a, b, c, $\Pi(\alpha)$, $\Pi(\beta)$, т. е. существование сферического треугольника со сторонами $\Pi(c)$, $\Pi(\beta)$, $\Pi(a)$ и противолежащими углами $\Pi(b)$, $\Pi(\alpha')$, $\frac{1}{2}\pi$ обусловливает существование прямолинейного треугольника со сторонами a, b, c и противолежащими углами $\Pi(\alpha)$, $\Pi(\beta)$, $\frac{1}{2}\pi$.

Таким образом, из существования прямолинейного прямоугольного треугольника со сторонами и углами

$$\left.\begin{matrix} a, & b, & c, \\ \Pi(\alpha), & \Pi(\beta), & \frac{1}{2}\pi, \end{matrix}\right\} \qquad (A)$$

вытекает существование сферического прямоугольного треугольника со сторонами и углами

$$\left.\begin{matrix} \Pi(c), & \Pi(\beta), & \Pi(a), \\ \Pi(b), & \Pi(\alpha'), & \frac{1}{2}\pi \end{matrix}\right\} \qquad (B)$$

и обратно. Поменяв ролями катеты (и противолежащие им острые углы) треугольника (B), мы получим сферический треугольник со сторонами и углами

$$\left.\begin{matrix} \Pi(\beta), & \Pi(c), & \Pi(a), \\ \Pi(\alpha'), & \Pi(b), & \frac{1}{2}\pi. \end{matrix}\right\} \qquad (B')$$

Заметим теперь, что при переходе от (B) к (B′) величины a, b, c, α', β заменяются величинами a, α', β, b, c или, что то же самое, величины a, b, c, α, β заменяются величинами a, α', β, b', c*. Иначе говоря, из

---

* Если α' заменяется b, т. е. $\Pi(\alpha')$ заменяется $\Pi(b)$, то величина $\Pi(\alpha) = \frac{1}{2}\pi - \Pi(\alpha')$ заменяется величиной $\frac{1}{2}\pi - \Pi(b) = \Pi(b')$, т. е. α заменяется b'.

(B′) вытекает существование прямолинейного треугольника со сторонами и углами

$$\left.\begin{matrix} a, & \alpha', & \beta, \\ \Pi(b'), & \Pi(c), & \frac{1}{2}\pi. \end{matrix}\right\} \qquad (C)$$

Итак, из существования треугольника (A) вытекает существование треугольника (C) и обратно. Эти два прямолинейных треугольника существуют поэтому всегда одновременно.

Последнему утверждению можно придать следующую весьма элегантную форму, принадлежащую А. П. Котельникову. В треугольнике (C) поменяем ролями катеты и острые углы. Мы получим прямоугольный треугольник со сторонами и углами

$$\left.\begin{matrix} \alpha', & a, & \beta, \\ \Pi(c), & \Pi(b'), & \frac{1}{2}\pi. \end{matrix}\right\} \qquad (D)$$

Переход от треугольника (A) к треугольнику (D) называется *преобразованием Лобачевского.*

Разобьем теперь круг на пять равных секторов и поместим в них по порядку следующие обозначения:

1) гипотенуза,

2) линейная величина одного острого угла,

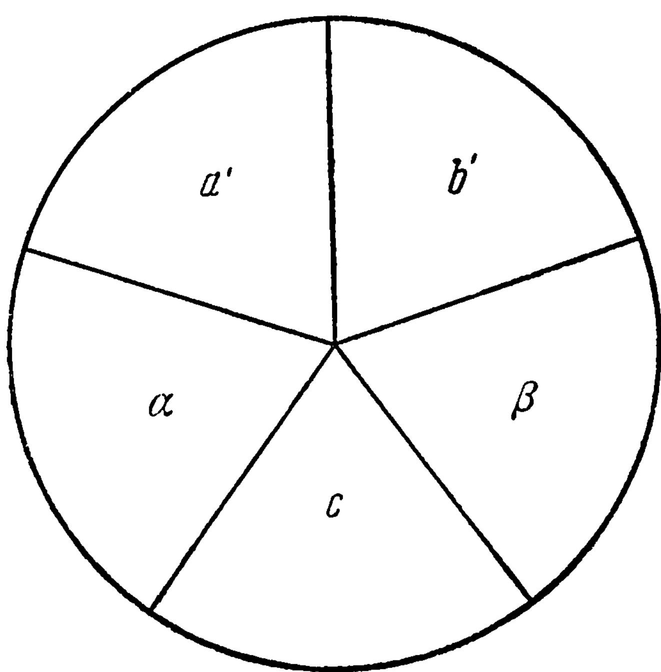
3) отрезок, дополнительный для катета, противолежащего этому острому углу,

4) отрезок, дополнительный для другого катета,

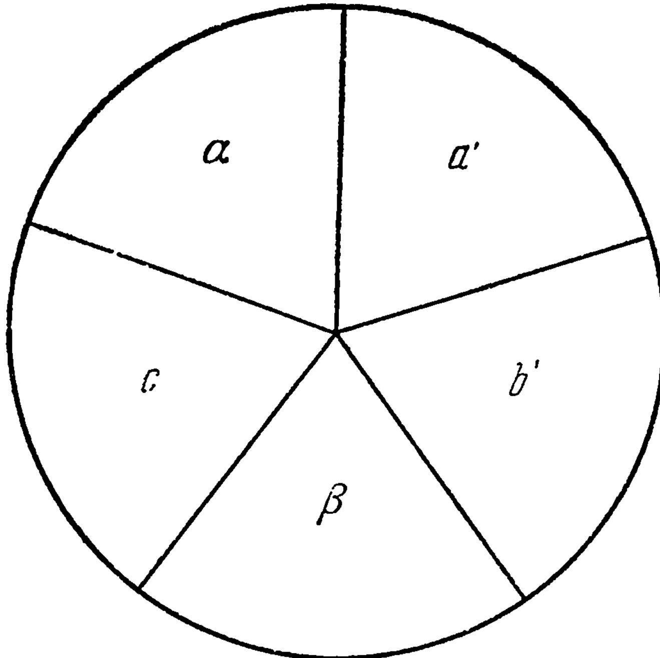
5) линейная величина второго острого угла.

Тогда мы получим для треугольника (A) диаграмму, изображенную на черт. 29. Для треугольника (D), получающегося из (A) преобразованием Лобачевского, аналогичная диаграмма имеет вид, изображенный на черт. 30. Мы видим, что преобразование Лобачевского соответствует вращению диаграммы на угол $\frac{2\pi}{5}$ по часовой стрелке. Если к треугольнику (D) мы снова применим преобразование Лобачевского, то диаграмма повернется еще на угол $\frac{2\pi}{5}$. Таким образом, после пятикратного применения преобразования Лобачевского мы снова придем к исходному треугольнику, получив *цикл* Лобачевского. Если в каждом из пяти треугольников, составляющих цикл, поменять ролями катеты и острые углы (что соответствует симметрии круговой диаграммы относительно одного из диаметров), то получим еще пять треугольников. Все эти десять треугольников изображены в приводимой таблице (первые пять получаются друг из друга преобразованием Лобачевского, остальные пять получаются из первых транс-

понированием катетов и острых углов). Для написания этой таблицы достаточно составить круговую диаграмму и подвергать ее затем поворотам и отражениям. Или иначе: любой элемент диаграммы можно принять за



Черт. 29



Черт. 30

гипотенузу, соседние элементы — за линейные величины острых углов, а два оставшихся элемента — за отрезки, дополнительные к катетам (катет и острый угол, изображающиеся соседними элементами, являются противолежащими). .

№ треугольника	Гипотенуза	1-й катет	2-й катет	Угол, противолежащий 1-му катету (в линейной мере)	Угол, противолежащий 2-му катету (в линейной мере)
1	c	a	b	α	β
2	β	α'	a	c	b'
3	b'	c'	α'	β	a'
4	a'	β'	c'	b'	α
5	α	b	β'	a'	c
6	c	b	a	β	α
7	β	a	α'	b'	c
8	b'	α'	c'	a'	β
9	a'	c'	β'	α	b'
10	α	β'	$в$	c	a'

Смысл преобразования Лобачевского (или приведенной выше таблицы) заключается в том, что, зная одно соотношение между сторонами и углами прямоугольного треугольника в геометрии Лобачевского, можно

получить из него десять соотношений (или пять, если катеты и острые углы входят в начальное соотношение симметрично). Например, в сочинении „Новые начала“ Лобачевский приводит формулы (55) и (56), каждая из которых содержит 10 соотношений, получающихся друг из друга описанным здесь способом.

[21] В предыдущем основном соотношении, где было введено обозначение «e», о нем говорилось только, что e есть некоторое положительное число, большее единицы. Значение этого числа остается произвольным в том смысле, что постулаты, на которых построена геометрия Лобачевского, совместимы с любым значением числа e. Но самое установление этого числа, очевидно, связано с единицей меры, в которой выражается длина x. С изменением единицы меры значение e будет меняться; при надлежащем выборе единицы число e совпадает с основанием натуральных логарифмов (ср. примечание [15]). Тем не менее в этом рассуждении есть некоторая неувязка с предыдущим. Дело в том, что совершенно аналогичное рассуждение уже было проделано в предложении 33 и в примечании [15] к соотношению $s' = se^{-x}$, связывающему длины предельных дуг, содержащихся между двумя осями. И там число e зависело от единицы меры, в которой выражено расстояние x между дугами. Единица меры была уже там установлена так, чтобы e имело значение основания неперовых логарифмов. Стало быть, вновь устанавливать единицу так, чтобы и в новой показательной функции привести основание e к неперову числу, безоговорочно нельзя. Бояй в своих замечаниях к «Геометрическим исследованиям» подвергает это место резкой критике. В действительности дело обстоит так, что обе экспоненциальные функции приводятся к неперову основанию при одной и той же единице меры*. Лобачевский сам обнаружил этот дефект и исправил его в «Пангеометрии». (Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. III, Гостехиздат, 1951.)

[22] Если перейти к обычным обозначениям углов, т. е. вместо $\Pi(\alpha)$ и $\Pi(\beta)$ писать A и B, то два уравнения, приведенные в начале настоящего предложения, примут вид

$$\sin \Pi(c) = \sin \Pi(a) \sin \Pi(b), \quad (1)$$

$$\sin A = \sin \Pi(b) \cos B. \quad (2)$$

Транспонируя в последнем уравнении углы A и B и заменяя соответственно этому катет b катетом a, получим третье уравнение, о котором говорит Лобачевский.

$$\sin B = \sin \Pi(a) \cos A. \quad (3)$$

---

* Доказательство приведено в примечании [71].

Перемножая уравнения (2) и (3) и учитывая (1), получаем

$$\sin \Pi (c) = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B. \tag{4}$$

Исключая B из уравнений (2) и (3), получаем

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 \Pi (b)} + \sin^2 \Pi (a) \cos^2 A = 1.$$

Освобождая это уравнение от знаменателя и заменяя в силу уравнения (1) произведение $\sin \Pi (a) \sin \Pi (b)$ через $\sin \Pi (c)$, получаем

$$\sin^2 \Pi (c) \cos^2 A = \sin^2 \Pi (b) - \sin^2 A$$

и, следовательно, $\cos^2 \Pi (c) \cos^2 A = \cos^2 \Pi (b)$.

Извлекая квадратный корень из обеих частей и принимая во внимание, как на это указывает Лобачевский, что все углы A, $\Pi (b)$, $\Pi (c)$ острые, получаем

$$\cos \Pi (c) \cos A = \cos \Pi (b). \tag{5}$$

Если из уравнений (2) и (3) исключим не угол B, а угол A, то таким же образом получим

$$\cos \Pi (c) \cos B = \cos \Pi (a). \tag{6}$$

Это и есть уравнение, приведенное в тексте под номером 2. Оно приведено и в предыдущем предложении. Теперь исключим угол A из уравнений (5) и (4). Если для этого напишем эти уравнения в виде

$$\cos A = \frac{\cos \Pi (b)}{\cos \Pi (c)}, \quad \operatorname{tg} A = \sin \Pi (c) \operatorname{ctg} B,$$

то исключение дает:

$$\frac{\cos^2 \Pi (c)}{\cos^2 \Pi (b)} = 1 + \sin^2 \Pi (c) \operatorname{ctg}^2 B.$$

Вычисляя отсюда $\operatorname{ctg}^2 \Pi (b)$, получим:

$$\operatorname{ctg} \Pi (b) = \operatorname{ctg} \Pi (c) \sin B. \tag{7}$$

Таким же образом, исключая из уравнения (4) и (6) угол B, получим

$$\operatorname{ctg} \Pi (a) = \operatorname{ctg} \Pi (c) \sin A. \tag{8}$$

Это и есть уравнение 1, приведенное в тексте.

Наконец, перемножая уравнения (5) и (8), получим

$$\operatorname{ctg} \Pi (a) \cos \Pi(c) \cos A = \operatorname{ctg} \Pi (c) \sin A \cos \Pi (b).$$

Так как $\cos \Pi(c) \neq 0$, то мы можем сократить уравнение на $\cos \Pi(c)$. Заменяя после этого в силу соотношения (1) $\sin \Pi(c) = \sin \Pi(a) \sin \Pi(b)$, получим

$$\cos \Pi(a) = \operatorname{ctg} \Pi(b) \operatorname{tg} A \tag{9}$$

и аналогично этому

$$\cos \Pi(b) = \operatorname{ctg} \Pi(a) \operatorname{tg} B. \tag{10}$$

Уравнения (7) и (8) отличаются от соответствующих уравнений эвклидовой геометрии

$$a = c \sin A, \quad b = c \sin B$$

тем, что стороны треугольника a, b, c заменены через $\operatorname{ctg} \Pi(a)$, $\operatorname{ctg} \Pi(b)$, $\operatorname{ctg} \Pi(c)$.

Как известно, Непером было указано мнемоническое правило, дающее возможность без труда запомнить соотношения между сторонами и углами сферического треугольника. Проф. А. П. Котельников показал, что это правило в несколько измененном виде может служить и для записывания тригонометрических уравнений прямоугольного треугольника в гиперболической плоскости (см. примечание [20]).

[23] Иначе говоря, геометрия бесконечно малого в гиперболическом пространстве совпадает с эвклидовой геометрией. Более точно: если стороны треугольника выражаются (при выбранной единице длины) настолько малыми числами, что их квадраты ничтожны по сравнению с единицей (или, иначе, кубами сторон можно пренебречь в сравнении с самими этими сторонами), то уравнения, связывающие стороны и углы треугольника, не отличаются от тех, которые имеют место в эвклидовой геометрии. Выбранная Лобачевским единица длины (при которой в соотношении $\operatorname{ctg} \frac{1}{2} \Pi(x) = e^x$ число e представляет собой основание натуральных логарифмов) называется *радиусом кривизны гиперболического пространства*. Итак, гиперболическая геометрия совпадает с эвклидовой на протяжении, весьма малом по сравнению с радиусом кривизны пространства.

[24] Лобачевский имеет в виду сочинения: «О началах геометрии», напечатанное, правда, не в «Ученых записках», а в «Казанском вестнике» (1829—1830 гг.), «Воображаемая геометрия», напечатанное в «Ученых записках Казанского университета» за 1835 г., «Применение воображаемой геометрии к некоторым интегралам», напечатанное в «Ученых записках» за 1836 г.

[25] Лобачевский в очень осторожной форме высказывал предположение, что в нашем пространстве в действительности, может быть, имеет место гиперболическая геометрия, но что размеры той части вселенной,

в которой мы производим наши измерения, настолько малы по сравнению с радиусом кривизны пространства, что отклонения наблюдаемых нами метрических соотношений от эвклидовых весьма ничтожны, и мы этих отклонений вовсе не замечаем: они падают за пределы точности наших измерений [см. «О началах геометрии», выводы из формул (17)]. Вычисления суммы углов в некотором космическом треугольнике (см. там же) не дали оснований к подтверждению такого предположения. В последнее время высказываются предположения, что действительная геометрия космоса не эвклидова (Эйнштейн, Эддингтон). При этом есть основание предполагать, что эта геометрия эллиптическая (риманова), а не гиперболическая. Нужно, однако, сказать, что на эти соображения можно смотреть только как на весьма проблематические предположения, требующие еще тщательной проверки. По этому поводу см. также примечание [73].

[26] Функция $\Pi(x)$ определена Лобачевским геометрически, а затем установлено ее аналитическое выражение, содержащееся в заключительной формуле предложения 36; в сноске* на стр. 70 это же соотношение приведено в других видах.

Если функции, этими формулами определяемые, распространить и на мнимые значения аргумента α, то получим

$$\operatorname{ctg}\Pi(xi) = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2} = i\sin x,$$

$$\sin\Pi(xi) = \frac{2}{e^{xi} + e^{-xi}} = \frac{1}{\cos x},$$

$$\cos\Pi(xi) = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{e^{xi} + e^{-xi}} = i\operatorname{tg} x.$$

Эти именно формулы Лобачевский и приводит в тексте. Если в уравнения (8) вместо a, b, c подставить ai, bi, ci и выразить тригонометрические функции от $\Pi(ai)$, $\Pi(bi)$, $\Pi(ci)$ по приведенным выше формулам, то получим заключительные уравнения текста. Это суть соотношения между сторонами и углами сферического треугольника. Можно сказать, что и обратно формулы сферической тригонометрии переходят в уравнения гиперболической тригонометрии, если заменить стороны треугольника a, b, c через $\frac{a}{i}$, $\frac{b}{i}$, $\frac{c}{i}$. С другой стороны, в сферической тригонометрии под a, b, c разумеют угловые значения сторон; если под a, b, c разуметь длины этих сторон, то угловые их значения будут $\frac{a}{R}$, $\frac{b}{R}$, $\frac{c}{R}$, где R — радиус сферы. Уравнения сферической тригонометрии, содержащие эти формулы, переходят в гиперболические, если заменим $\frac{a}{R}$, $\frac{b}{R}$, $\frac{c}{R}$ через $\frac{a}{Ri}$, $\frac{b}{Ri}$, $\frac{c}{Ri}$, т. е. если

заменить R через Ri. Можно сказать, что уравнения гиперболической тригонометрии имеют место на мнимой сфере.

Сфера радиуса R имеет кривизну $\frac{1}{R^2}$. С другой стороны, формулы гиперболической тригонометрии получаются, если в формулах сферической тригонометрии заменить R через Ri; в этом смысле на гиперболическую плоскость можно формально смотреть как на сферу с кривизной $K = -\frac{1}{R^2}$; это и служило основанием для присвоения гиперболическому пространству кривизны $-\frac{1}{R^2}$. Более глубокое обоснование этот термин получает в римановой геометрии в широком смысле этого слова (см., например, В. Каган, Геометрические идеи Римана и их современное развитие. М.— Л., 1933, стр. 14).

[27] Рассуждение «Exposition succincte...», т. е. «Краткое изложение принципов геометрии со строгим доказательством теоремы о параллельных», было читано им не 12 февраля 1826 г., как указывает он в примечании, а 11 февраля 1826 г. Это следует из найденной в январе 1926 г. в архиве Казанского университета препроводительной бумаги от 6 февраля 1826 г., с которой «рассуждение» было представлено Лобачевским в Отделение физико-математических наук. Надписи на этой бумаге показывают, то сочинение Лобачевского было получено Отделением 7 февраля 1826 г., а слушано 11 февраля. Интересно отметить, что более ранняя ссылка Лобачевского (1829 г.) на это рассуждение в примечании к заглавию «О началах геометрии» тоже указывает неверную дату — 12 февраля 1826 г. Повидимому, в более ранней ссылке эта дата была написана Лобачевским по памяти и затем повторена в примечании к «Новым началам».

Содержание этого «рассуждения», как можно заключить из примечаний Лобачевского к сочинению «О началах геометрии», вошло в основном в первые разделы сочинения «О началах геометрии», опубликованные в книжках «Казанского вестника» за 1829 г.

[28] Так как AB в треугольнике ABC не меньше других сторон, то угол C не меньше других углов и, следовательно, только он может быть самое большее прямым или тупым, а остальные два угла A и B обязательно острые; но $\angle A' + \angle B' = \angle A$, и потому углы A' и B' тоже острые. Таким образом, основание H высоты $C'H = h$, проведенной из вершины C', упадет между A и B' (черт. 31). Мы имеем [см. соотношение (3) на стр. 65 или формулы (83) на стр. 295]

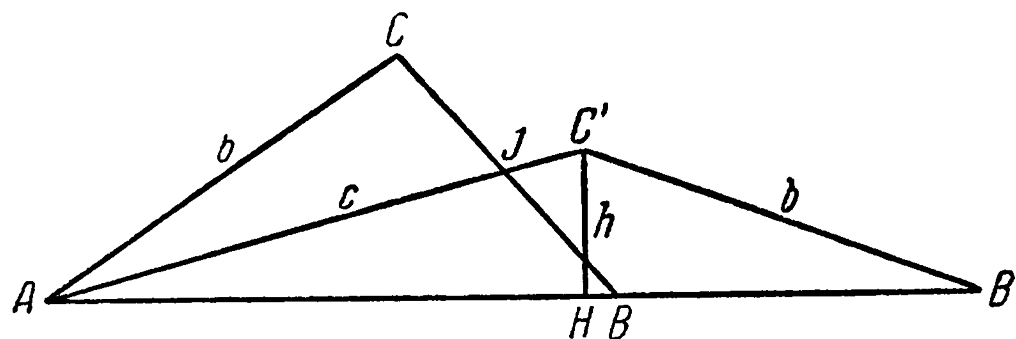
$$\operatorname{tg} \Pi(b) \sin B = \operatorname{tg} \Pi(c) \sin C,$$

$$\operatorname{tg} \Pi(b) \sin A' = \operatorname{tg} \Pi(c) \sin B',$$

откуда находим

$$\sin A' \sin C = \sin B' \sin B. \qquad (*)$$

Чтобы получить $\operatorname{ctg} A' - \operatorname{ctg} A$, рассмотрим $\sin (A - A') = \sin B'$ и, разделив обе части равенства на произведение $\sin A \sin A'$, находим



Черт. 31

выражение, приведенное в тексте [см. (*)]

$$\operatorname{ctg} A' - \operatorname{ctg} A = \frac{\sin B'}{\sin A \sin A'} = \frac{\sin C}{\sin A \sin B}.$$

Аналогично, рассматривая $\sin (A - B') = \sin A'$, найдем

$$\operatorname{ctg} B' - \operatorname{ctg} A = \frac{\sin A'}{\sin B' \sin A} = \frac{\sin B}{\sin A \sin C}.$$

Выражение для h найдем, применив формулу (72) стр. 290 к треугольникам $AC'H$ и $B'C'H$.

Обозначив через C_1' и C_2' углы в этих треугольниках при вершине C' находим

$$C_1' + C_2' = C',$$

$$\sin C_1' = \sin \Pi (h) \cos A',$$

$$\sin C_2' = \sin \Pi (h) \cos B'.$$

Чтобы исключить C_1' и C_2', вычисляем $\cos C' = \cos (C_1' + C_2')$:

$$\cos C' = \sqrt{1 - \sin^2 \Pi (h) \cos^2 A'} \sqrt{1 - \sin^2 \Pi (h) \cos^2 B'} - \\ - \sin \Pi (h) \cos A' \sin \Pi (h) \cos B',$$

откуда, освобождаясь от радикалов, получим

$$\sin^2 C' = \sin^2 \Pi (h) (\cos^2 A' + \cos^2 B' + 2 \cos A' \cos B' \cos C'). \qquad (**)$$

Учитывая, что $\operatorname{ctg}\Pi(h)=\frac{e^h-e^{-h}}{2}$ (см. сноску * на стр. 70 или формулу (62), стр. 280), находим из равенства (**):

$$\operatorname{ctg}^2\Pi(h)=\frac{1}{\sin^2\Pi(h)}-1=\frac{\cos^2 A'+\cos^2 B'+2\cos A'\cos B'\cos C'-\sin^2 C'}{\sin^2 C'}.$$

Преобразуем числитель правой части:

$$1-\sin^2 A'-\sin^2 B'+2\cos A'\cos B'\cos C'+\cos^2 C'=$$
$$=[(1-\sin^2 A')(1-\sin^2 B')-\sin^2 A'\sin^2 B']+$$
$$+\cos C'[\cos(A'+B')+\cos(A'-B')]+\cos^2 C'=$$
$$=\cos(A'+B')\cos(A'-B')+\cos(A'+B')\cos C'+$$
$$+\cos C'\cos(A'-B')+\cos^2 C'=$$
$$=[(\cos(A'+B')+\cos C'][\cos(A'-B')+\cos C']=$$
$$=4\cos\frac{A'+B'+C'}{2}\cos\frac{A'+B'-C'}{2}\cos\frac{A'+C'-B'}{2}\times$$
$$\times\cos\frac{B'+C'-A'}{2}=4\cos\frac{S}{2}\cos\left(\frac{S}{2}-A'\right)\cos\left(\frac{S}{2}-B'\right)\cos\left(\frac{S}{2}-C'\right),$$

так как

$$A'+B'+C'=A+B+C=S.$$

Таким образом, формула для h, приведенная в тексте, получена.

Выведенные формулы имеют место и для каждого последующего треугольника. Но предельные значения A', B', C' будут таковы:

$$A'=0,\ B'=0,\ C'=S.$$

Из уравнения для h найдем соответствующее предельное значение h

$$e^h-e^{-h}=\frac{4\cos^2\frac{S}{2}}{\sin S},$$

откуда

$$e^h-\frac{1}{e^h}=2\operatorname{ctg}\frac{S}{2}.$$

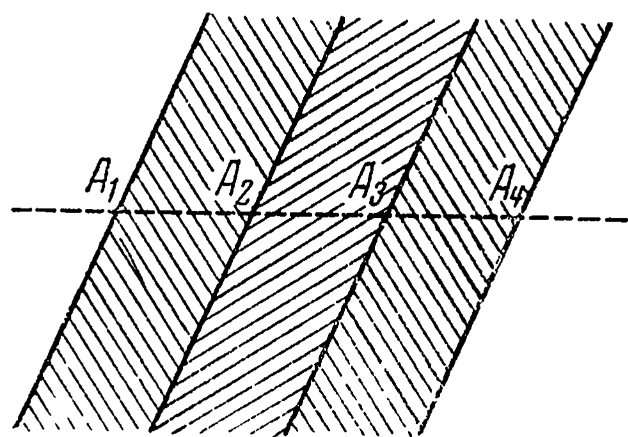
Решая это уравнение, квадратное относительно e^h, берем только положительный корень

$$e^h=\operatorname{ctg}\frac{S}{4};\quad h=\ln\operatorname{ctg}\frac{S}{4}.$$

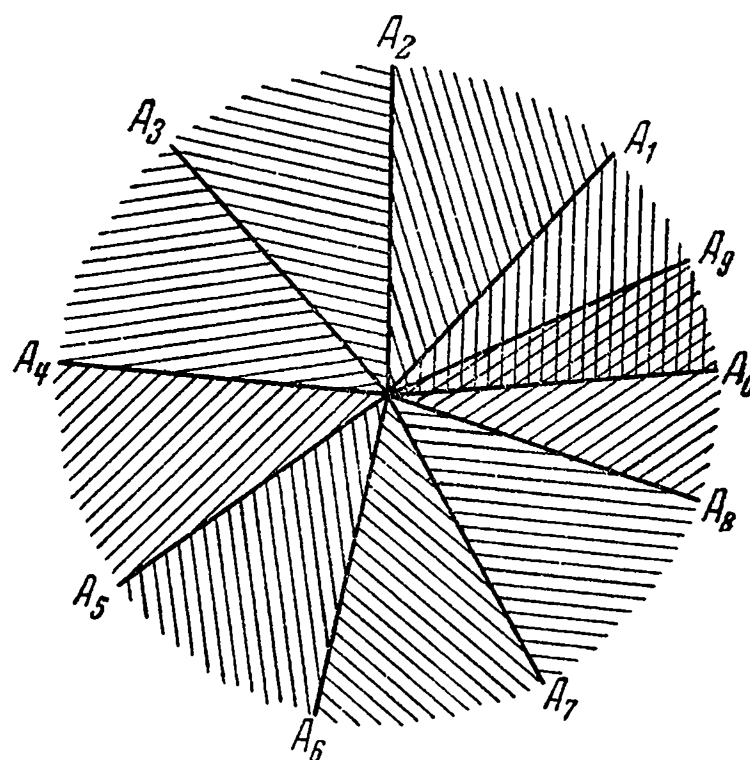
[29] Лобачевский излагал доказательство Бертрана в своем учебнике «Геометрия» (1823 г.), называя его «не в полном смысле математическим доказательством», а «пояснением», но лучшим из существующих.

Сущность этого доказательства заключается в том, что рассматриваются два рода бесконечных фигур и бесконечные части плоскости, ими высекаемые:

1) части плоскости, высекаемые двумя прямыми, исходящими из концов отрезка прямой и образующими с ним односторонние углы, сумма которых равна двум прямым углам (Бертран называет эту фигуру полосой, la bande),



Черт. 32



Черт. 33

2) части плоскости, высекаемые двумя полупрямыми, исходящими из одной точки (внутренняя область угла).

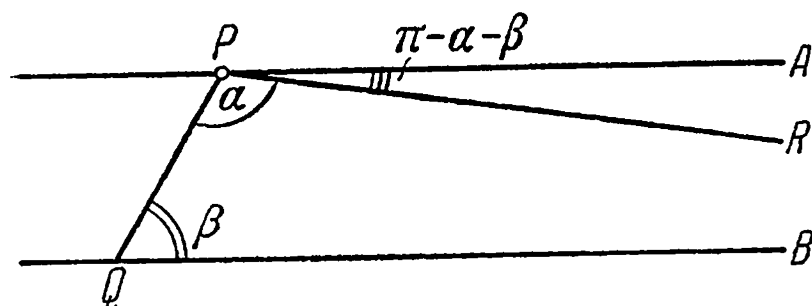
Если дана фигура первого типа, то для покрытия всей плоскости необходимо бесконечное множество фигур, конгруэнтных ей (черт. 32). Если дана фигура второго типа, то достаточно взять конечное число конгруэнтных ей фигур, чтобы покрыть всю плоскость (черт. 33). Отсюда Бертран заключает, что если $\alpha + \beta < \pi$ (черт. 34), то полупрямая PR обязательно пересечет QB, так как фигура APR имеет площадь, в бесконечное число раз бо́льшую, чем площадь фигуры $APQB$, и потому первая фигура не может уместиться целиком внутри второй, не может составлять часть второй.

Лобачевский совершенно правильно усмотрел ошибку доказательства Бертрана в том, что Бертран с бесконечными частями плоскости оперировал, как с геометрическими величинами. Но для того, чтобы множество элементов образовывало величину, необходимо, чтобы из транзитивных

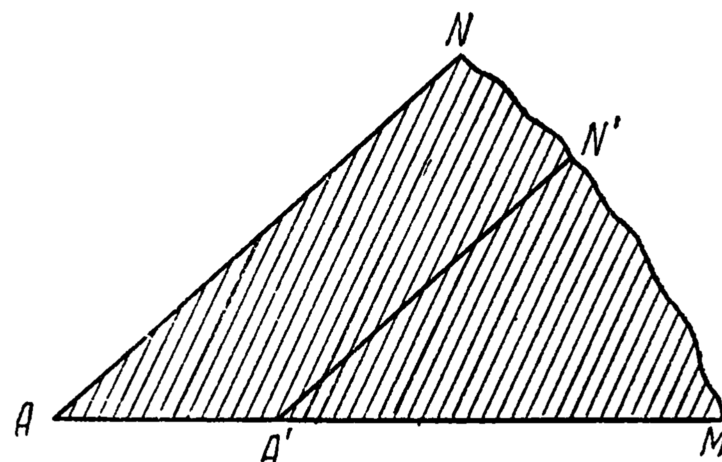
отношений «больше», «равно» и «меньше» одно и только одно всегда имело место для двух произвольно взятых элементов.

Далее, двум конгруэнтным фигурам необходимо относят равные геометрические величины, а части фигуры (понятие разделения фигуры на части должно быть установлено) относят меньшую геометрическую величину, чем целой фигуре.

При сравнении же площадей рассматриваемых бесконечных фигур видим (черт. 35), что *MA'N'* конгруэнтна *MAN* (одна переводится в другую движением) и в то же время составляет ее часть; т. е. этим фигурам



Черт. 34



Черт. 35

должны быть отнесены равные величины и в то же время неравные. Таким образом, площади рассматриваемых фигур не образуют геометрических величин.

Поэтому, если рассматривать, как это делается при вычислении несобственных интегралов, отношение площадей этих бесконечных фигур как предел отношения площадей конечных фигур, изменяющихся некоторым образом в данные бесконечные фигуры, то, конечно, должно обнаружиться, что этот предел зависит от выбора конечных фигур и закона их изменения.

Лобачевский и показывает это ниже.

[30] В сочинении «Воображаемая геометрия» Лобачевский получает* следующую формулу для площади, заключенной между двумя ординатами (одна из которых проходит через начало, а другая — через точку с абсциссой x), осью абсцисс и окружностью радиуса r, центр которой помещен в начале координат (черт. 36):

$$S = \frac{\theta}{\sin \Pi(r)} - \psi^{\diamond};$$

* Стр. 341 настоящего издания.

◇ Отметим, что в сочинении «Воображаемая геометрия» Лобачевский пользуется вместо обозначения $\Pi(a)$ для угла параллельности обозначением a'.

здесь θ и ψ определяются соотношениями

$$\operatorname{ctg}\theta = \operatorname{ctg}\psi \sin \Pi(r), \qquad \sin\psi = \operatorname{tg}\Pi(r) \operatorname{ctg}\Pi(x).$$

Из этих соотношений находим

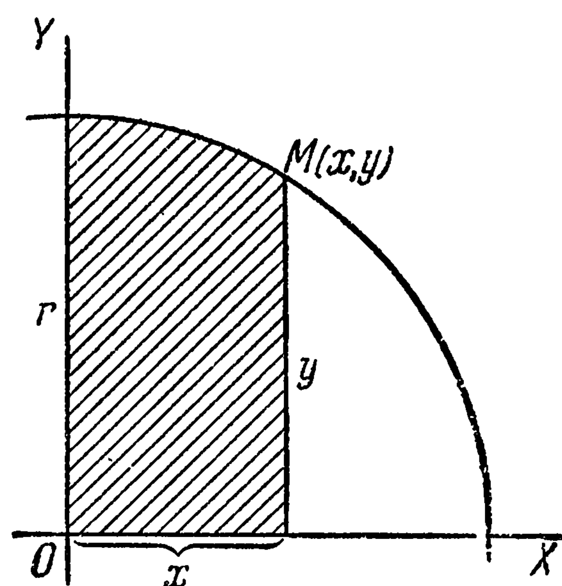
$$\frac{1}{\sin^2\theta} = 1 + \operatorname{ctg}^2\theta = 1 + \operatorname{ctg}^2\psi \sin^2\Pi(r) =$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{\sin^2\psi} - 1\right)\sin^2\Pi(r) = 1 + [\operatorname{ctg}^2\Pi(r)\operatorname{tg}^2\Pi(x) - 1]\sin^2\Pi(r) =$$

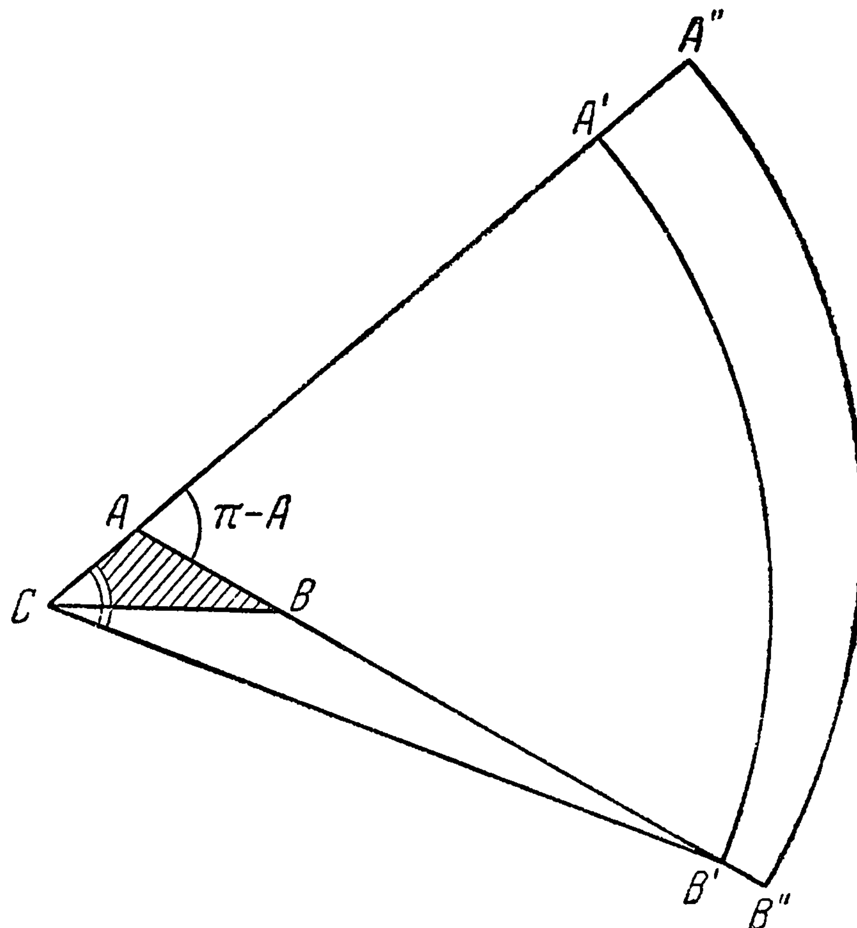
$$= 1 + \cos^2\Pi(r)\operatorname{tg}^2\Pi(x) - \sin^2\Pi(r) =$$

$$= \cos^2\Pi(r)(1 + \operatorname{tg}^2\Pi(x)) =$$

$$= \frac{\cos^2\Pi(r)}{\cos^2\Pi(x)}.$$



Черт. 36



Черт. 37

Таким образом, имеем (учитывая формулы, приведенные **в сноске*** на стр. 70)

$$S = \frac{1}{\sin\Pi(r)} \arcsin\frac{\cos\Pi(x)}{\cos\Pi(r)} - \arcsin\frac{\operatorname{ctg}\Pi(x)}{\operatorname{ctg}\Pi(r)} =$$

$$= \frac{e^r + e^{-r}}{2} \arcsin\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \cdot \frac{e^r + e^{-r}}{e^r - e^{-r}} - \arcsin\frac{e^x - e^{-x}}{e^r - e^{-r}}.$$

Полагая здесь $x = a$, $r = na$, находим значение Y, а полагая $x = r = na$, находим X, после чего для отношения $\frac{Y}{X}$ получаем выражение, указанное в тексте.

[31] Угол ACB' при достаточно большом r сколь угодно близок к $\pi - A - \alpha$, так как CB' приближается к параллели (в смысле Лобачевского) к AB (черт. 37). Поэтому площадь $B'CA'$ близка к $\frac{1}{2\pi}(\pi - A - \alpha)R$.

Но пл. $B'CA'$ = пл. $B''AA''$ — пл. $B''B'A'A''$ + пл. $B'CA$. Это соотношение и приводит к приближенной формуле, приведенной в тексте.

Формула (3), следующая ниже, получится, если рассмотреть следующее разбиение фигуры $BB'''C''$ (черт. 4 на стр. 85):

$$\text{пл. } BB'''C'' = \text{пл. } CB'C' + \text{пл. } CB'B + \text{пл. } y - \text{пл. } z$$

и учесть, что пл. $CB'B$ = пл. $CB'A$ — пл. CBA.

[32] Доказательство Лежандра помещено в его «Reflexions» на стр. 400—403. Он рассматривает *двуугольники* (biangles) — так он называет фигуры, на которые «полоса» Бертрана рассекается ее основным отрезком, т. е. двуугольник Лежандра — это фигура, образованная отрезком прямой и двумя полупрямыми, исходящими из его концов и образующими с ним односторонние углы, сумма которых равна двум прямым углам. Лежандр рассматривает площади этих двуугольников, повторяя ошибку Бертрана, вскрытую Лобачевским.

[33] Нельзя не отметить некоторой неопределенности основных понятий, вводимых Лобачевским, так как многие допущения явно не высказаны. Например, Лобачевский скрыто пользуется понятием движения, не указывая, каковы его свойства; говоря о телах, он подразумевает часто только тела, гомеоморфные шару, и т. п. Существенно, однако, что Лобачевский делает первую в истории математических наук попытку исходить в построении геометрии от топологических свойств тел.

Исходными понятиями у него являются *трехмерное тело* (фактически гомеоморфное шару) и разделение тела *сечением* (гомеоморфным плоскому сечению шара) на две части, или составление из двух тел, при наличии их *соприкосновения*, одного тела.

Понятия *поверхность*, *линия* и *точка* определяются у Лобачевского в терминах сечений и прикосновений тел.

Двум точкам отнесено *расстояние*, как инвариант движений (отчетливым образом это не сформулировано, но выясняется в главе II).

[34] Лобачевский принимает *прикосновение* как первоначальное неопределимое понятие, как основное отношение, в котором могут находиться *геометрические тела*. Лобачевский указывает на происхождение этих понятий, возникающих в результате абстракции определенных свойств материальных тел реального мира, свойств, постигаемых «прямо в природе чувствами», свойств, с которыми человек постоянно сталкивается в своей жизненной практике, прежде всего — при действительных измерениях, связанных уже на первых этапах развития культуры с его хозяйственной и общественно-экономической деятельностью. Понятия *протяжение*, *поверхность*, *линия*, *точка* появляются на дальнейших ступенях абстракции, и потому Лобачевский полагает, что с них нельзя начинать геометрию, что они еще «подлежат толкованию».

[35] Лобачевский определяет *пространство* как то целое, по отношению к которому все геометрические тела являются частями. Остается неясным, считает ли он пространство телом.

[36] Иначе говоря, окружным пространством Лобачевский называет дополнительное (по отношению к телу A) пространство, т. е. тело, получающееся из всего пространства за вычетом тела A. Местом тела A называется тело, соприкасающееся с A по всей границе тела A, т. е. как бы оболочка, имеющая внутри себя пустоту в форме тела A (толщина стенок несущественна).

[37] Лобачевский прибегает неявно к понятию движения, говоря, что все тела, без всякой с ними перемены наполняющие место B, одинаковы между собой, подразумевая возможность перемещения тела «без всякой с ним перемены».

[38] Лобачевский измерение величин рассматривает как одну из основных проблем геометрии; в своем учебнике геометрии он даже определяет геометрию как науку, «в которой предписываются способы измерять пространство» *.

Верный своему принципу принимать за исходное понятие «геометрическое тело», Лобачевский прежде всего рассматривает измерение геометрических тел, т. е. измерение объемов. Он дает здесь только следующую общую сжатую характеристику процесса измерения объемов, не перечисляя явно постулатов сравнения и не уточняя понятия геометрической величины.

Для измерения некоторого геометрического тела необходимо задать еще геометрическое тело, называемое *единицей меры*. Тогда, если удастся разделить и измеряемое тело и единицу меры на части, «равные» (т. е. равносоставленные) между собой, то объем выразится отношением числа частей в теле к числу частей в единице меры. Если же это не удастся сделать, то для измерения необходимо придать единице меры такой вид, чтобы она могла быть разделена на конгруэнтные части неограниченно малые («произвольного размера») — *аксиома неограниченного дробления* — и чтобы из повторения единицы меры и ее частей могло образовываться сплошное тело неограниченно большое («вне всяких границ») — обобщенная *аксиома Евдокса — Архимеда.*

Если эти условия выполнены ◊, то, как указывает Лобачевский, геометрические погрешности при измерении материальных тел могут быть

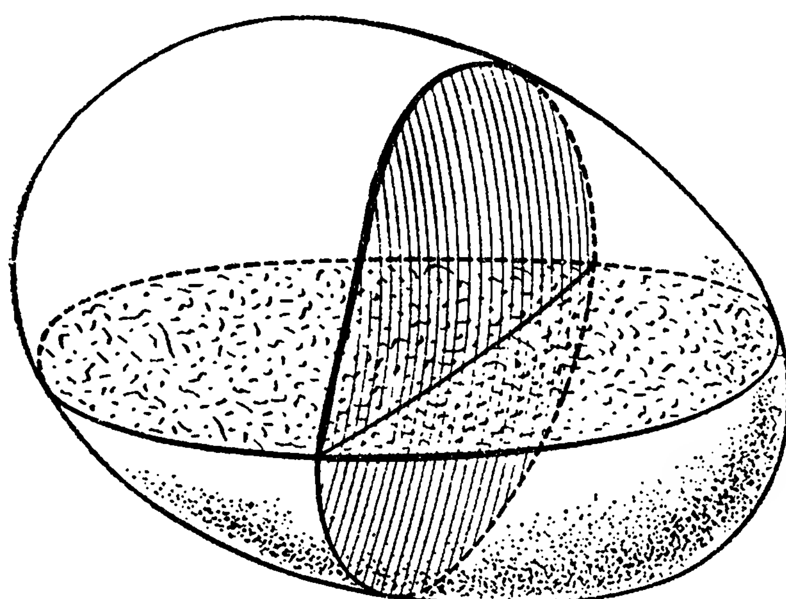
---

* Н. И. Лобачевский. Полн. собр. соч., т. II, Гостехиздат, 1949, стр. 43.

◊ В эвклидовой геометрии это достигается, если, например, за единицу меры принять куб и разбивать его на кубические части плоскостями, параллельными его граням.

сделаны меньшими, чем вызванные атомной структурой вещества отклонения реального физического тела от строгой геометрической формы. Но конечная цель науки — это ее приложение к самой природе; поэтому с точки зрения практики процесс измерения всегда заканчивается.

Для воображаемых теоретически несоизмеримых тел, существование которых легко может быть доказано, можно получать приближенные значения с недостатком и с избытком с произвольной степенью точности, что является *теоретическим решением* проблемы измерения.



Черт. 38

[39] Тело, разделенное двумя обращательными сечениями на четыре части (черт. 38), гомеоморфно шару с проведенными в нем сечениями двумя плоскостями больших кругов. Дальнейшее прибавление обращательных сечений соответствует проведению новых плоскостей больших кругов через диаметр, общий двум первым.

[40] Главные сечения следует рассматривать лишь для тел, гомеоморфных шару. Эти сечения гомеоморфны трем большим кругам, плоскости которых не принадлежат одному пучку. Возможность разделить шар тремя плоскими сечениями на восемь частей, взаимно прикосновенных, и невозможность проведением четвертого сечения удвоить число частей характеризуют трехмерность пространства.

[41] Отбрасывание неприкосновенных частей в случае трех типов касания тел — поверхностного, линейного и в точке — приводит соответственно к понятиям поверхности, линии и точки. Поверхность, определяемая с помощью поступательных сечений,— внутренняя поверхность,— топологически эквивалентна куску плоскости, ограниченному окружностью. Поверхность, определяемая касанием тела с окружным пространством,— наружная поверхность,— топологически эквивалентна сфере. Она разделяет пространство на две области — внутреннюю и внешнюю. Замкнутые поверхности, не ограничивающие тело, и вообще поверхности неориентируемые Лобачевскому неизвестны. Первые работы, связанные с их открытием, появились значительно позже: работа А. Мёбиуса была опубликована в 1865 г., работа Листинга — в 1862 г.

Приняв за отправное понятие геометрическое тело, гомеоморфное шару, Лобачевский приходит к замкнутой поверхности, гомеоморфной

сфере, и к простым ее кускам. Свойства тел, не гомеоморфных шару, едва намечены и остались неразработанными.

Линия, определяемая с помощью обращательных сечений, топологически эквивалентна отрезку прямой. Она принадлежит соответствующим обращательным сечениям и каждое из них разделяет на две части. Точка, определяемая с помощью главных сечений, принадлежит линиям, по которым пересекаются обращательные сечения, входящие в состав главных. Каждую из этих линий она разделяет на две части, дающие две противоположные стороны точки.

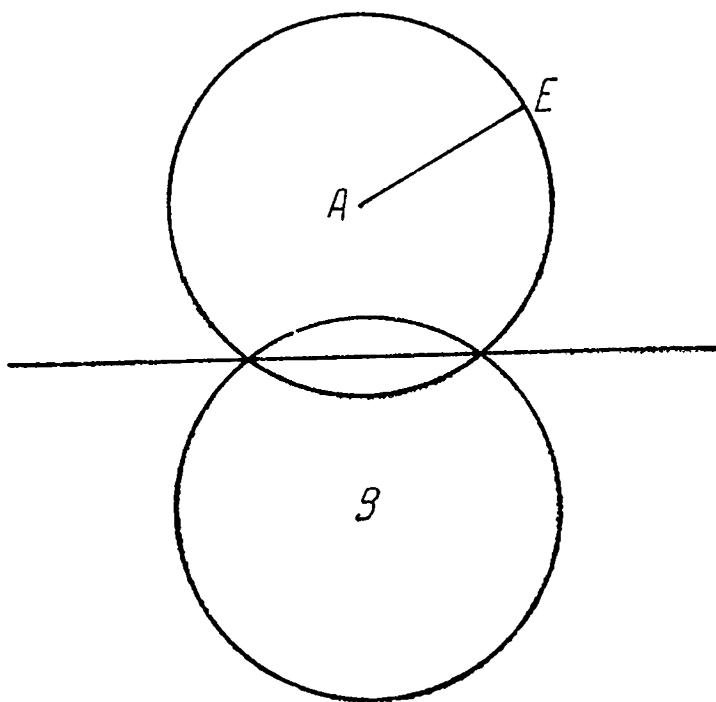
Замкнутая линия возникает при пересечении продолженной внутренней поверхности с наружной. Она топологически эквивалентна окружности. Лобачевский отмечает, что замкнутая линия делит продолженную внутреннюю поверхность на две области —внутреннюю и внешнюю, высказывая, таким образом, то предложение, которое получило впоследствии название теоремы Жордана. Точка, лежащая на замкнутой линии, не делит уже линию на две части. Но замкнутую линию можно сделать незамкнутой, если вынуть из нее часть.

[42] Подробно теорию измерения объемов и площадей в настоящем сочинении Лобачевский не рассматривает. Упоминание о последующем доказательстве возможности измерять тела позволяет предположить, что соответствующая глава должна была войти в состав сочинения, но по неизвестным причинам осталась невключенной. Теория измерения прямых линий и углов, линейных и двугранных, изложена в гл. III. Измерение телесных углов, т. е. величин сферических многоугольников, рассмотрено в гл. V (ст. 68, 69). См. также Приложение 1 (стр. 415).

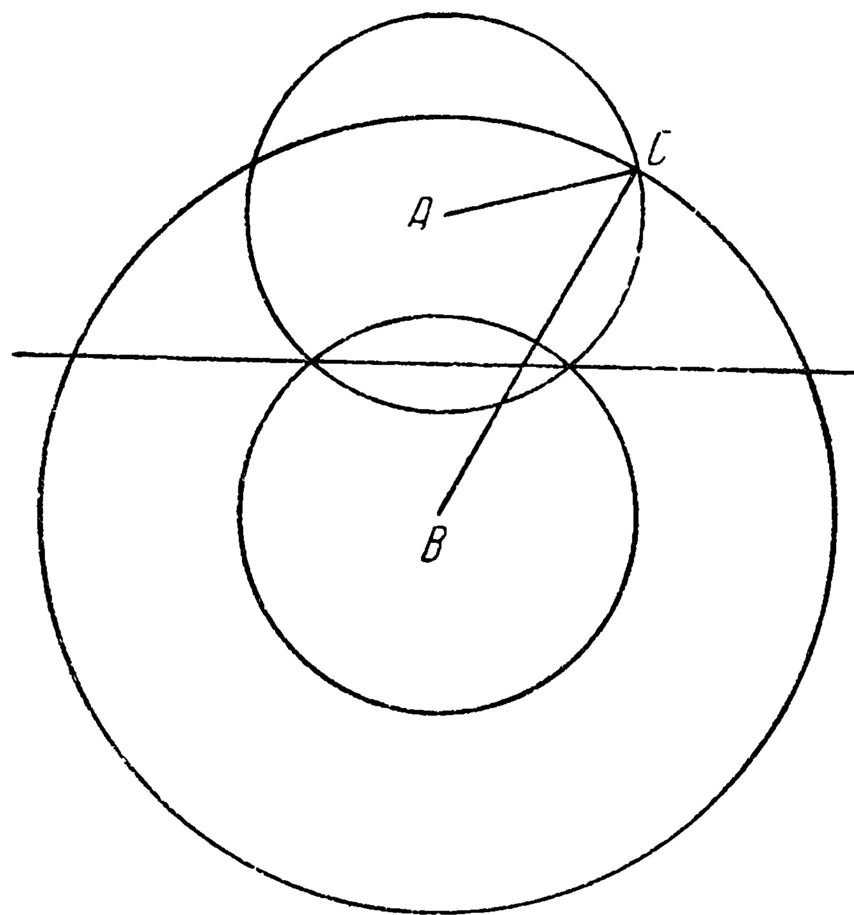
[43] Выражение Лобачевского «относительное положение двух точек называется *расстоянием*» и дальнейшее употребление понятия «расстояние» показывают, что расстояние рассматривается как инвариант движения. Однако, пользуясь в своих рассуждениях движением, Лобачевский не описывает явно его свойства, ограничиваясь замечаниями вроде того, что «тела, которые без всякой с ними перемены наполняют также место B, будут уже геометрически во всех отношениях одинаковы между собой» и т. п. При движении тела расстояние между двумя его любыми точками сохраняется. Этим Лобачевский пользуется в гл. II. Лобачевский отчетливо не сформулировал, что расстояние точек A, B такое же, как точек B, A, но полагал, повидимому, что это следует из определения.

Черт. 20 представляет абстрагированное изображение циркуля; касание его ножек с поверхностью дает на поверхности две точки, положение которых не меняется при наклонениях циркуля (без раздвижения ножек). Движения циркуля как тела позволят получать новые пары точек с тем же относительным положением, то-есть с тем же расстоянием.

[44] Заменяя аксиому параллельности Эвклида своей, Лобачевский предвидел возражения, что эта аксиома не соответствует природе прямой, что она изменяет природу прямой, что благодаря этой аксиоме прямые получают как бы некоторое искривление. Действительно, асимптотическое сближение параллелей Лобачевского напоминает нам известное и в эвклидовой геометрии сближение ветви кривой линии, например гиперболы, с ее асимптотой или асимптотическое сближение двух ветвей кривых. Чтобы отклонить подозрения в наличии искривленности у прямой



Черт. 39



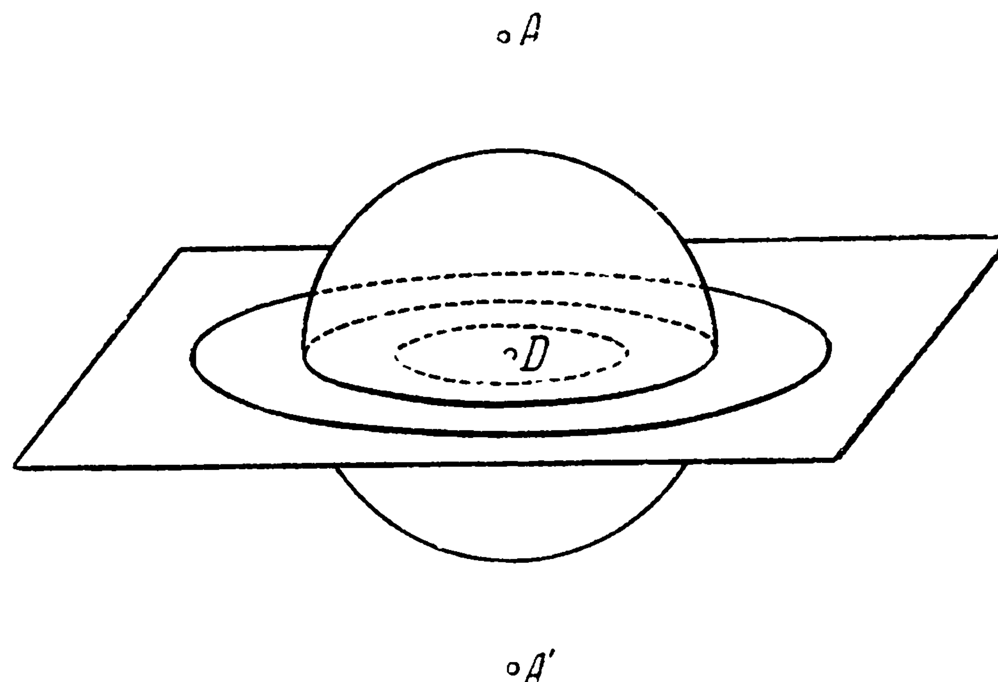
Черт. 40

линии и плоскости, Лобачевский дает определения плоскости и прямой линии, положив в основу понятие расстояния двух точек и понятие сферы как множества точек, равноудаленных от данной точки. Определение плоскости и прямой с помощью сфер и окружностей принадлежит к абсолютной геометрии. Симметричность построений полностью убеждает в отсутствии кривизны у плоскости и прямой. Таким образом, оставшееся у Эвклида «темным» понятие прямой Лобачевский определяет, опираясь на понятие тела, поверхности, линии, точки и расстояния двух точек — инварианта относительно движений. На этот оригинальный путь Лобачевский встает уже в 1829 г. в своем сочинении «О началах геометрии».

[45] Признак для различения двух сторон плоскости сформулирован Лобачевским неправильно. Если сферы, описанные радиусом AE вокруг A, B, пересекаются, то этого еще недостаточно, чтобы точка E лежала на

стороне полюса B (см. черт. 39), хотя это пересечение необходимо получается, если E лежит на стороне полюса B.

Признак можно исправить следующим образом (см. черт. 40): точка C лежит вне плоскости на стороне полюса A, если она лежит вне сферы, описанной вокруг B радиусом AC. В этом случае точка C лежит обязательно внутри сферы, описанной вокруг A радиусом BC. Действительно, шар, описанный вокруг центра B радиусом BC, содержит в себе шар, описанный вокруг центра B радиусом AC, так как по условию точка



Черт. 41

C — внешняя к этому последнему шару. Помещая центр этих двух шаров в точку A, находим, что точка C попадет на сферу радиуса AC и, следовательно, будет внутри шара радиуса BC, так как этот шар содержит внутри себя шар радиуса AC. Признак расположения точки на плоскости не требует исправлений.

Деление пространства плоскостью на две части связано у Лобачевского с выбором фиксированных полюсов A и B, от которых плоскость освобождается в ст. 28.

[46] Данное Лобачевским доказательство недостаточно. Следует доказать, что при таком «перемещении точек» (движении) все сферы с центром в B также движутся по себе (т. е. точка B остается на месте).

[47] В «Ученых записках» пропущена по ошибке статья 23, которая, несомненно, была в оригинале, так как в дальнейшем тексте Лобачевский делает на нее ссылки (в ст. 24, 36 и 44) и пользуется термином «большой круг» (ст. 25). По ссылкам можно предположить, что в ст. 23 устанавливаются следующие предложения.

Если рассмотреть сферу с центром в центре D «кругов происхождения» плоскости, соответствующей некоторым полюсам A, A' (черт. 41),

то эта сфера содержит тот из кругов, образующих плоскость, радиус которого равен радиусу сферы. Этот круг называется *большим кругом* сферы. Он происходит от пересечения сферы с плоскостью, проходящей через центр сферы и имеющей центр кругов происхождения в центре сферы.

Большой круг делит сферу на две конгруэнтные части, которые можно совместить каждым движением, при котором полюсы плоскости заменяют один другой. Действительно, при этом движении точка D остается на месте, так как каждый круг происхождения совпадет с самим собой. Но при неподвижном центре сфера скользит по самой себе, и потому часть этой сферы, лежащая по одну сторону плоскости, совпадает с частью, лежащей по другую сторону, так как большой круг, как круг происхождения, совпадает с самим собой.

Отметим единственность сферы, для которой данный образующий круг служит большим. Это следует из того, что и сферы и круги, имеющие одинаковые радиусы, конгруэнтны и сливаются, когда центр у них общий (ст. 14, ст. 22).

[48] Лобачевский, таким образом, доказывает, что если две вполне определенные точки прямой (концы диаметра) остаются неподвижными (при некотором движении), то «прямая покрывает сама себя». Следует, кроме того, доказать, что прямая обладает этим же свойством по отношению к любым двум своим точкам. Это доказательство Лобачевский проводит в ст. 27.

[49] Признаки взаимного расположения кругов у Лобачевского не выражены с достаточной полнотой. Два круга не встречаются, если расстояние между центрами больше суммы или менее разности их радиусов. Два круга касаются в одной точке, если это расстояние равно сумме или разности их радиусов. Два круга пересекаются в двух точках, если это расстояние меньше суммы и больше разности их радиусов.

[50] Лобачевский указывает, что при измерении геометрической величины, связанной с определенным классом фигур, необходимо, установив понятие больше и меньше, понятие суммы и части, потребовать еще, чтобы часть всегда имела меньшую величину, чем целое.

[51] Лобачевский опирается на аксиому Евдокса — Архимеда, так как допускает, что при откладывании отрезка b по отрезку, в m раз большему a, всегда найдется такое число n повторений, что остаток будет меньше b, т. е. дальнейшее откладывание b даст отрезок, больший, чем ma.

[52] Лобачевский показывает, как применение алгоритма Эвклида позволяет дать разложение длины измеряемого отрезка (для простоты рассуждений он полагает, что длина рациональна) в непрерывную дробь и получить приближенные рациональные значения этой длины с точностью

до $\frac{1}{33}$, так как известно, что подходящая дробь отличается от непрерывной на величину меньшую, чем единица, деленная на произведение знаменателей этой подходящей дроби и ей предшествующей.

[53] Подчеркивая произвол, которым мы располагаем в выборе дуги, принимаемой за единицу при измерении дуг окружности, и не желая преждевременно связывать вопрос измерения величин дуг одной окружности с вопросом измерения длины дуги кривой линии при заданной линейной единице, Лобачевский несколько необычно обозначает буквой π не классическое трансцендентное число 3,14159..., равное в эвклидовой геометрии отношению длины окружности к диаметру, а число, получаемое как результат измерения полуокружности при произвольно условно выбранной единице дуги окружности. Например, полагая $\pi = 180$, мы тем самым за единицу измерения принимаем дугу, составляющую $\frac{1}{180}$ полуокружности, называемую «градус». Придавая π известное трансцендентное значение 3,14159..., мы тем самым за единицу измерения принимаем дугу, называемую радиан, длина которой равна в эвклидовой геометрии радиусу. При измерении величин «вырезков», т. е. двуугольников на сфере и других частей сферы, приводящих к телесным углам, Лобачевский обозначает буквой π число, получаемое при измерении полусферы произвольно выбранной единицей измерения. Таким образом, вся сфера получает величину 2π.

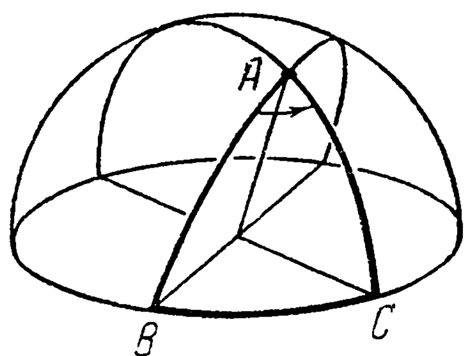
[54] Как видно из текста Лобачевского, он называет *сферическим треугольником* часть сферы, ограниченную такими тремя дугами больших кругов, которые составляют вместе простую замкнутую линию на сфере. Такая линия (контур сферического треугольника) разбивает сферу на две части, из которых одна меньше, а другая больше полусферы (случай, когда три рассматриваемые дуги составляют вместе один большой круг, исключается, т. е. вершины сферического треугольника не должны лежать на одном большом круге). Часть, меньшая полусферы, и называется сферическим треугольником.

Лобачевский показывает, что в таком треугольнике либо все три стороны меньше π (черт. 42), либо же две стороны меньше π, а третья равна (черт. 43) или больше π (черт. 44). Из рассмотрения этих чертежей ясно, что когда сторона BC, возрастая, становится равной π (черт. 43), противолежащий ей угол A также становится равным π (стороны AB и AC составляют продолжение одна другой); если же сторона BC становится $> \pi$, то и $\angle A > \pi$ (черт. 44).

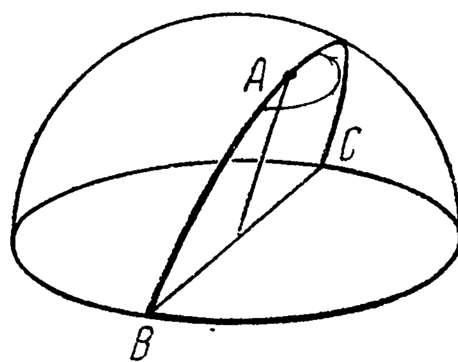
[55] Для пояснения прилагаем черт. 45 и 46.

Так как дуги больших кругов образуются от пересечения сферы плоскостями, проходящими через центр сферы O, а плоскости двух

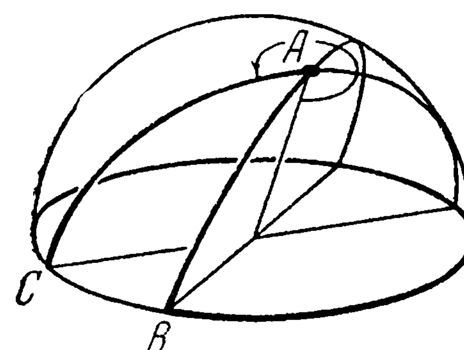
перпендикулярных дуг большого круга образуют прямой двугранный угол (ст.42), то для проведения через A дуги большого круга, перпендикулярной к большому кругу BCB', необходимо провести плоскость, перпендикулярную к данной и проходящую через точку A на или вне плоскости и через точку O на плоскости. Такая плоскость существует. Она будет единственной, если перпендикуляр из точки A на данную плоскость не пройдет через O (т. е. если точка A не является полюсом данной дуги).



Черт. 42



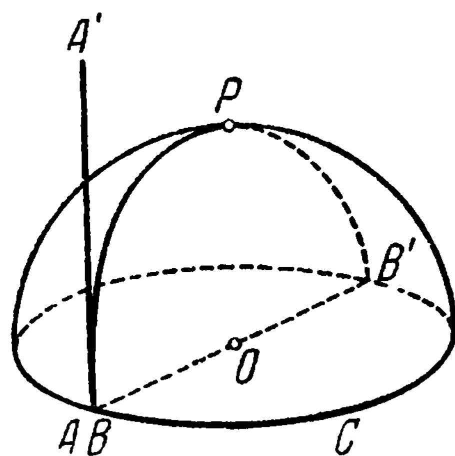
Черт. 43



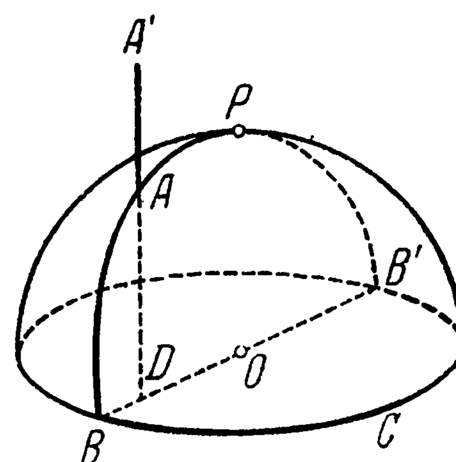
Черт. 44

Это следует из того, что эта плоскость должна пройти через перпендикуляр AA', проведенный через точку A к данной плоскости (ст. 59, 57, 33).

[56] Это утверждение Лобачевского можно сформулировать следующим образом. Пусть (черт. 47, ср. с черт. 56 Лобачевского) FG — большой



Черт. 45

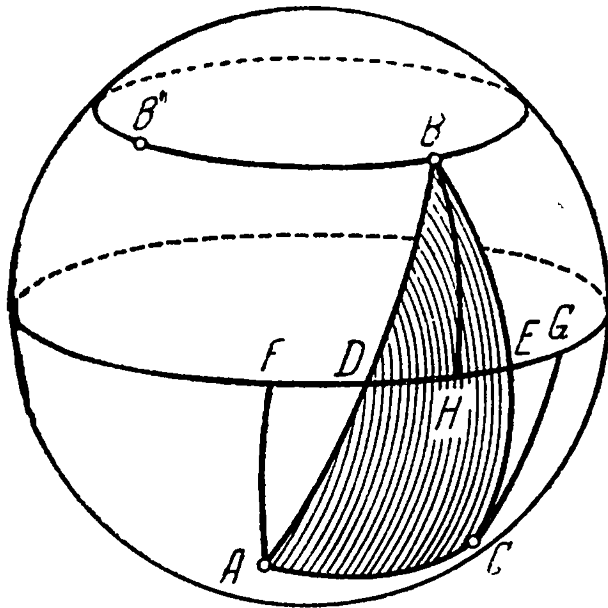


Черт. 46

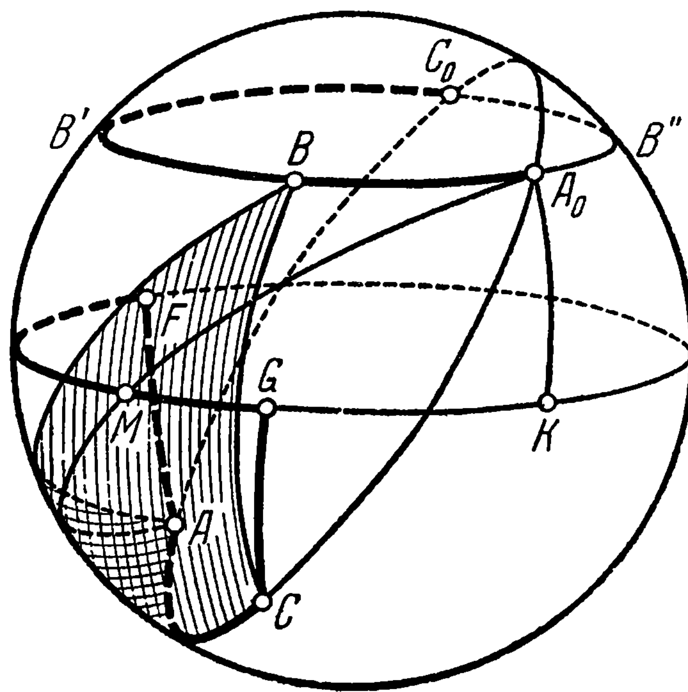
круг на сфере, а A и C — две точки, расположенные по одну сторону этого большого круга на равных (меньших $\frac{\pi}{2}$) расстояниях $AF = CG$ от него. Пусть, далее, BB' — геометрическое место точек, расположенных по другую сторону круга FG на том же расстоянии $BH = AF = CG$ от него (этим геометрическим местом будет малый круг, плоскость которого параллельна плоскости большого круга FG). Тогда все сферические треугольники, две вершины которых лежат в точках A и C, а третья вершина B

принадлежит указанному геометрическому месту BB', имеют одну и ту же сумму углов и одинаковую площадь.

Однако эта формулировка нуждается в уточнении. Проведем через точки A и C большой круг (т. е. продолжим сторону AC). Этот большой круг пересечет малый круг BB' в точках A_0 и C_0, диаметрально противоположных точкам A и C (черт. 48). Так как угол ACB рассматриваемого сферического треугольника меньше π, так же как и сторона BC, то точка B лежит по отношению к большому кругу AC в той же полусфере, что и точки F,G. Это неявно предполагается в доказательстве Лобачевского.



Черт. 47



Черт. 48

Таким образом, вершина B может перемещаться не по всему малому кругу BB', а лишь по той его дуге, которая расположена в одной полусфере с точками F, G (т. е. по дуге $A_0B'C_0$, которая на черт. 48 вычерчена жирно). Когда вершина B движется по этой дуге, сумма углов и площадь треугольника ABC не меняются. Если же точка B попадает на дугу $A_0B''C_0$, то сумма углов и площадь треугольника ABC принимают постоянные (не зависящие от положения точки B) значения, но отличные от значений, которые мы имели при расположении точки B на дуге $A_0B'C_0$. Для доказательства достаточно заметить, что при переходе точки B с дуги $A_0B'C_0$ на дугу $A_0B''C_0$ четырехугольник $AFGC$, о котором идет речь в рассуждениях Лобачевского (контур этого четырехугольника вычерчен жирно на черт. 48), заменяется другим четырехугольником, дополняющим первый до полусферы, ограниченной кругом FG. Иначе говоря, если при расположении точки B на дуге $A_0B'C_0$ площадь треугольника ABC равна σ, то при переходе точки B на дугу $A_0B''C_0$ площадь треугольника ABC становится равной $\pi - \sigma$ (ибо четырехугольники, о которых выше шла речь, составляют вместе полусферу, т. е. π).

[57] Разберем подробнее это рассуждение Лобачевского, опираясь на рассмотрения, проведенные в предыдущем примечании [56]. Будем двигать вершину B сферического треугольника ABC по дуге $A_0B'C_0$, приближая ее (черт. 49) к точке A_0 (у Лобачевского вместо A_0 стоит на черт. 59 обозначение F). Посмотрим, в какую фигуру перейдет в пределе треугольник ABC. Заметим для этого, что точка D пересечения стороны AB с кругом FG является серединой дуги FH (черт. 47), где H — основание перпендикуляра, опущенного из точки B на круг FG. Когда точка B приближается к A_0, точка H приближается к основанию K перпендикуляра, опущенного из A_0 на FG (у Лобачевского па черт. 59 вместо K стоит буква G). Поэтому точка D приближается к середине M дуги FK (черт. 48, 49) (у Лобачевского вместо дуги FK — дуга KG, а ее середина обозначена через H). Итак, в пределе (при $B \to A_0$) дуга AB превращается в дугу AMA_0, соединяющую диаметрально противоположные точки A и A_0 и проходящую через середину M дуги FK*. Что же касается сторон AC и CB, то они в пределе (при $B \to A_0$) составят продолжение одна другой, давая вместе дугу ACA_0 большого круга. Таким образом, треугольник ABC перейдет в пределе в сферический двуугольник («вырезок») AMA_0CA (у Лобачевского $AHFCA$; см. черт. 59). Так как при перемещении точки B по дуге $A_0B'C_0$ площадь треугольника ABC не менялась, то (переходя к пределу при $B \to A_0$) находим, что двуугольник AMA_0CA равновелик треугольнику ABC. Далее, сумма углов треугольника ABC не менялась при перемещении точки B по дуге $A_0B'C_0$. В пределе (при $B \to A_0$) угол A перейдет в угол MAC, угол B — в $\angle MA_0C$, а угол C — в $\angle ACA_0 = \pi$. Сумма же этих углов попрежнему равна S, где S — сумма углов треугольника ABC, т. е.

Черт. 49

$$\angle MAC + \angle MA_0C + \pi = S_1,$$

откуда находим, что каждый из углов MAC, MA_0C равен $\frac{1}{2}(S - \pi)$. Та-

---

* Этому и соответствует фраза «ведя первую через середину H дуги KG между перпендикулами к ней AK, FG» у Лобачевского. В оригинале эта фраза отсутствует. Она введена как поправка в списке опечаток, приложенном в конце кн. II Ученых записок Казанского университета за 1836 г.

ким образом, площадь сферического двуугольника AMA_0CA (и равновеликого ему треугольника ABC) в принятых Лобачевским единицах* равна $\frac{1}{2}(S - \pi)$.

Отметим, что по-существу это же доказательство, но в несколько иной форме (в частности, без предельного перехода) Лобачевский поместил в «Геометрических исследованиях» (стр. 38—40 настоящего издания).

[58] Лобачевский отмечает здесь дефектность вывода формулы для площади сферического треугольника, основанного на допущении, что симметричные относительно центра сферические треугольники равновелики. Действительно, это допущение требует доказательства. Строгое доказательство равновеликости двух симметричных сферических треугольников было дано Лежандром◇. Лобачевский в своем доказательстве близок к Лежандру.

[59] Вторая часть этой фразы Лобачевского описывает случай, когда плоскость проходит попеременно сначала через середину ребра перпендикулярно к нему, затем через вершину грани, на которой лежит это ребро, затем через эту вершину переходит на следующую грань, где пересекает новое ребро, проходя через его середину к нему перпендикулярно, переходит на смежную грань и т. д.

Этот случай будет иметь место, если число сторон в грани нечетное, но в каждой вершине сходится четное число граней (октаэдр).

Лобачевский опустил случай, когда плоскость проходит попеременно сначала через середину ребра, перпендикулярно к нему, затем через вершину грани, содержащей это ребро, затем через ребро, проходящее через эту вершину и не принадлежащее к этой грани, затем через вершину другой грани, через середину ребра этой грани, переходя в следующую грань и т. д. Этот случай будет иметь место, если число сторон в грани нечетное и если в каждой вершине сходится нечетное число граней. Такого рода правильными телами будут тетраэдр, додекаэдр и икосаэдр.

[60] Предельный случай, когда n (число граней) бесконечно велико, т. е. случай, когда

$$4 - (m - 2)(r - 2) = 0, \qquad (*)$$

тоже может быть рассмотрен. В этом случае правильная многогранная поверхность будет неограниченной. Однако при исследовании этого случая потребуется уже знание суммы углов многоугольника на плоскости (и в случае пространства Эвклида, и в случае пространства Лобачевского).

---

* См. стр. 36, сноска △.

◇ A. M. Legendre, Eléments de Géometrie, 3 éd., Paris, 1800, кн. 7 предл. 21, стр. 248—249.

Оси телесных углов при вершинах многогранной поверхности и перпендикуляры к граням, проведенные через их центры, должны и в рассматриваемом случае принадлежать к одной связке прямых, но эта связка не будет иметь собственного центра.

Это может быть связка параллельных прямых (возможно и в эвклидовом пространстве и в пространстве Лобачевского) или связка прямых, перпендикулярных к одной плоскости (в пространстве Лобачевского эта связка отличается от первой, в пространстве Эвклида — совпадает с ней).

Первый случай — случай связки параллельных прямых — даст в эвклидовой геометрии разбиение плоскости на правильные конгруэнтные многоугольники, а в случае геометрии Лобачевского — разбиение предельной поверхности на правильные конгруэнтные многоугольники, ограниченные дугами предельных линий.

Сумма углов m-угольника в обоих случаях равна

$$(m-2)\,\pi.$$

Отсюда, так как у каждой вершины смыкаются r многоугольников, находим, что

$$\frac{(m-2)\,\pi}{m}\,r = 2\pi.$$

Но это условие совпадает с (*).

Учитывая, что $m \geqslant 3$ и $r \geqslant 3$, находим все возможные случаи:

$m = 3,\ r = 6$ (треугольники);

$m = 4,\ r = 4$ (квадраты);

$m = 6,\ r = 3$ (шестиугольники).

Итак, в эвклидовом пространстве рассматриваемая многогранная поверхность вырождается в плоскость, разбитую на правильные конгруэнтные многоугольники одного из трех типов, указанных выше.

В случае пространства Лобачевского получаем невыродившуюся многогранную поверхность, вершины которой лежат в вершинах правильных конгруэнтных многоугольников, ограниченных предельными линиями и представляющих разбиение предельной поверхности одного из трех указанных выше типов. Линейные размеры ребра могут быть произвольны, так что существует бесконечное множество многогранных поверхностей каждого из трех типов.

Рассмотрим теперь второй случай в пространстве Лобачевского. Легко показать, что каждое разбиение плоскости Лобачевского на конгруэнтные правильные многоугольники можно спроектировать с помощью перпендикуляров к этой плоскости в разбиение того же типа на поверх-

ности равных расстояний, имеющей данную плоскость опорной, причем сторонами многоугольников будут являться дуги линий равных расстояний, и, таким образом, перейти затем к многогранной поверхности, уже не плоской, а такой, что оси и перпендикуляры через центры граней образуют связку с идеальным центром.

Обратный переход от многогранной поверхности к плоской также возможен.

Итак, рассмотрим разбиение плоскости Лобачевского. В этом случае сумма углов m-угольника может изменяться от значения, сколь угодно близкого к $(m-2)\pi$, но меньшего его, до нуля (при возрастании площади). Учитывая правильность многоугольника, получаем

$$\frac{(m-2)\pi}{m} r > 2\pi,$$

откуда

$$r > \frac{2m}{m-2}. \qquad (**)$$

В правой части стоит функция, непрерывная и убывающая при $m > 2$, имеющая при $m = 3$ значение 6.

Следовательно, при заданном $m\,(m \geqslant 3)$ всегда можно подобрать $r\,(r \geqslant 3)$ так, чтобы удовлетворить условию (**), и притом существует бесконечное множество таких значений r:

$$m = 3, \quad r > 6, \text{ т. е. } r = 7,\ 8,\ 9, \ldots$$
$$m = 4, \quad r > 4 \quad \text{»} \quad r = 5,\ 6,\ 7, \ldots$$
$$m = 5, \quad r > \frac{10}{3} \quad \text{»} \quad r = 4,\ 5,\ 6, \ldots$$
$$m = 6, \quad r > 3 \quad \text{»} \quad r = 4,\ 5,\ 6, \ldots$$

При $m \geqslant 7$ можно положить r равным любому положительному целому числу, не меньшему 3.

Итак, при заданном $m\,(m \geqslant 3)$ и выбранном, согласно найденным условиям, r на плоскости Лобачевского будет найдено разбиение вполне определенного типа, причем размеры угла α при вершине и стороны l в многоугольнике будут вполне определенными:

$$\alpha = \frac{2\pi}{r}.$$

Для нахождения стороны l соединим центр B правильного m-угольника с двумя его соседними вершинами A, D и в образовавшемся равнобедренном треугольнике ABD опустим высоту BC (черт. 50). Тогда в пря-

моугольном треугольнике ABC будем иметь

$$\angle A = \frac{\pi}{r}, \quad \angle B = \frac{\pi}{m}, \quad AC = \frac{l}{2}.$$

Поэтому на основании третьего из соотношений (80) (см. стр. 294) найдем формулу для вычисления стороны

$$\sin \Pi\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{\sin A}{\cos B} = \frac{\sin \frac{\pi}{r}}{\cos \frac{\pi}{m}}.$$

Спроектировав с помощью перпендикуляров, восставленных к плоскости, это разбиение на любую поверхность равных расстояний, для которой данная плоскость служит опорной, мы получим на этой поверхности разбиение того же типа на конгруэнтные правильные многоуголь-

Черт. 50 *Черт. 51*

ники, образованные дугами линий равных расстояний, причем величина углов будет такой же. По вершинам этих многоугольников мы найдем определенную правильную многогранную поверхность выделенного типа, вписанную в поверхность равных расстояний, проведенную на произвольно выбранном расстоянии от опорной плоскости.

[61] Лобачевский пользуется здесь следующим предложением. Пусть в сферическом треугольнике ABC наибольшая сторона c меньше π, а каждая из двух других сторон a, b — меньше $\frac{\pi}{2}$. Тогда углы A, B — острые.

Доказательства этого предложения в тексте не дано. Его лучше всего провести не на основе ст. 74 (на которую ссылается Лобачевский), а на основе ст. 78. Рассмотрим это доказательство. Проведем большой круг, являющийся продолжением стороны AB (черт. 51). Точка C не является

полюсом этого большого круга, так как дуга AC меньше $\frac{\pi}{2}$. Опустим из точки C перпендикуляр CD (меньший $\frac{\pi}{2}$) к большому кругу AB и покажем, что точка D лежит на дуге AB. Так как в прямоугольном треугольнике CDA катет CD и гипотенуза AC меньше $\frac{\pi}{2}$, то и катет DA меньше $\frac{\pi}{2}$ (заключительное предложение ст. 78). Точно так же дуга BD меньше $\frac{\pi}{2}$. Отсюда следует (ст. 75), что углы ACD, BCD, CAD, CBD — острые. Таким образом, $AD < AC$, $BD < BC$ (ст. 76). Если бы теперь точка D не лежала на дуге AB, например, если бы точка B занимала положение B' на черт. 51, то мы имели бы $AB' < AD < AC$. Но это противоречит тому, что $AB = c$ есть наибольшая сторона треугольника ABC. Итак, точка D лежит на дуге AB. Поэтому углы A и B сферического треугольника ABC совпадают с углами CAD, CBD. Выше было показано, что эти углы острые.

[62] Действительно, были рассмотрены следующие случаи треугольников со сторонами, меньшими π:

1) две стороны $< \frac{\pi}{2}$,

2) две стороны $= \frac{\pi}{2}$,

3) одна сторона $= \frac{\pi}{2}$, одна $< \frac{\pi}{2}$, одна $> \frac{\pi}{2}$,

4) две стороны $> \frac{\pi}{2}$.

Сюда вошли все возможные случаи, так как случай:

одна сторона $= \frac{\pi}{2}$, две $< \frac{\pi}{2}$ — входит в 1),

одна сторона $= \frac{\pi}{2}$, две $> \frac{\pi}{2}$ — входит в 4),

три стороны $= \frac{\pi}{2}$ — входит в 2).

[63] Двуугольники, в которые вырождаются в этом случае сферические треугольники, будут конгруэнтны. Однако сами треугольники нельзя считать, вообще говоря, конгруэнтными, так как при совмещении сторон BC и $B'C'$, когда двуугольники совместятся, вершины A и A' треугольников не будут совпадать, и дуги AB, AC не будут соответственно конгруэнтны дугам $A'B'$ и $A'C'$.

Треугольники будут конгруэнтны в смысле Лобачевского, если окажется $B = C$, $A = \pi$ и, кроме того, или $AB = A'B'$, или $AB = A'C'$.

[64] Последнее замечание можно истолковать так:

Если площадь сферического треугольника приближается к нулю, то сумма углов его приближается к π (ст. 68), т. е. к сумме углов прямоли-

нейного треугольника (при рассматриваемом допущении). Если рассмотреть сферический многоугольник, составленный из конечного числа треугольников, площади которых стремятся к нулю, то и его площадь стремится к нулю. Но вместе с тем сумма его углов приближается к сумме углов прямолинейного многоугольника с тем же числом сторон. Следовательно, сумму углов прямолинейного многоугольника, при допущении, что сумма углов треугольника равна π, мы найдем из формулы для площади сферического многоугольника (ст. 69), положив, что площадь равна нулю, что дает

$$S = (n - 2)\pi.$$

[65] Положение, сформулированное Лобачевским, сразу вытекает из той теоремы абсолютной геометрии (ст. 53), согласно которой внешний угол треугольника больше всякого внутреннего, не смежного с ним. Однако существенен результат, вытекающий из доказательства, приведенного в тексте: *если две прямые пересекают третью, образуя с ней равные соответственные углы, то эти прямые имеют общий перпендикуляр и, следовательно, являются расходящимися в случае геометрии Лобачевского.*

[66] На основе ст. 97 можно дать более простое доказательство, пригодное во всех случаях. Пусть $AB \| CD$, $AB \| EF$. Покажем, что $CD \| EF$. Для этого выберем точку G вне плоскостей $ABCD$, $ABEF$ (эти плоскости совпадают, если все три прямые AB, CD, EF расположены в одной плоскости) и вне плоскости P, проведенной через линию CD и точку E прямой EF. Линия GH пересечения плоскостей ABG, CDG параллельна (ст. 97) прямым AB и CD; линия GH' пересечения плоскостей ABG, EFG параллельна прямым AB и EF. Прямые GH и GH' совпадают, так как обе лежат в плоскости ABG, проходят через точку G и параллельны прямой AB. Таким образом, все три плоскости ABG, CDG, EFG пересекаются по одной прямой GH. В силу ст. 97 плоскость P пересекается с плоскостью EFG по линии EF', параллельной CD и GH (так как $CD \| GH$). Но прямая EF', лежащая в плоскости EFG, проходящая через точку E и параллельная GH, необходимо совпадает с EF. Соотношение $EF' \| CD$ и дает нам теперь требуемый разультат $EF \| CD$.

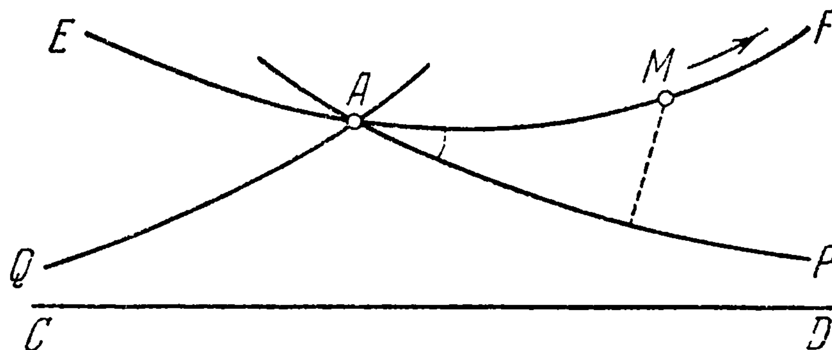
[67] Этим предложением заканчивается изучение вопроса о расположении двух прямых на плоскости. Две прямые, лежащие в одной плоскости, могут быть:

1. *пересекающимися.* В этом случае точка, уходящая в бесконечность вдоль одной из пересекающихся прямых, неограниченно удаляется от второй (ст. 104 в случае эвклидовой геометрии и ст. 106 в случае геометрии Лобачевского);

2. *параллельными.* В эвклидовой плоскости расстояние между параллельными одинаково на всем их протяжении (ст. 103). В геометрии Лоба-

чевского параллельные неограниченно сближаются в сторону параллельности и неограниченно расходятся в противоположную сторону (ст. 109);

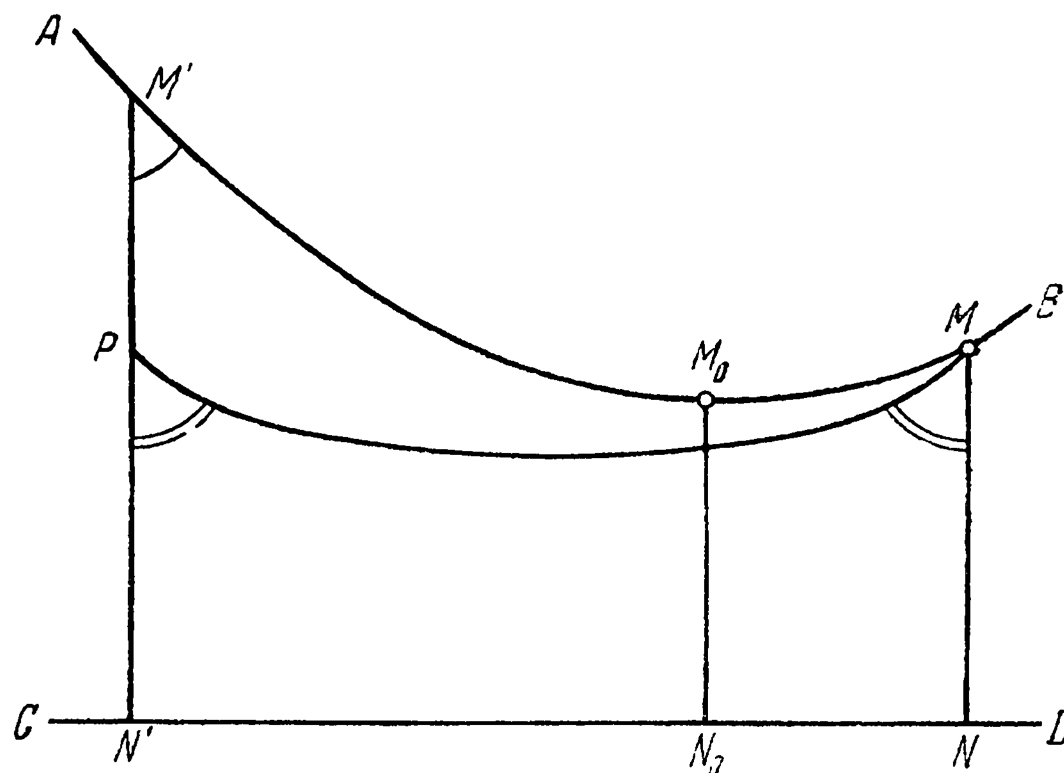
3. *расходящимися.* Расходящиеся прямые (существующие только в геометрии Лобачевского) неограниченно удаляются друг от друга в обе стороны. Иначе говоря, точка, уходящая в бесконечность (в ту или иную сторону) вдоль одной из расходящихся прямых, неограниченно удаляется от второй. В самом деле, пусть AP и AQ — прямые, параллельные CD, а EF — расходящаяся с CD прямая (черт. 52). Если точка M будет удаляться в бесконечность по прямой EF, например, в направлении точки F, то расстояние от M до прямой AP будет увеличиваться неограниченно (ст. 106).



Черт. 52

Тем более будет неограниченно увеличиваться расстояние от M до прямой CD, которая от прямой AP находится по другую сторону, чем точка M.

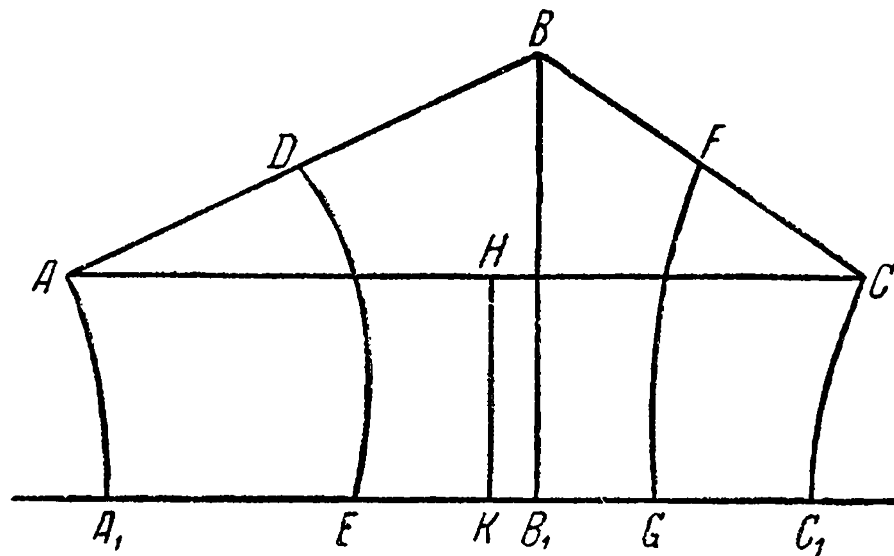
Пример расходящихся прямых дают (в геометрии Лобачевского) два перпендикуляра к одной прямой. Отметим, что этот пример является общим, так как имеет место следующее предложение:



Черт. 53

Всякие две расходящиеся прямые являются двумя перпендикулярами к одной и той же прямой. Действительно, пусть AB и CD — расходящиеся прямые. Из некоторой точки M прямой AB опустим перпендикуляр MN на прямую CD. Если $MN \perp AB$, то прямая MN — искомая. Предпо-

ложим поэтому, что MN не перпендикулярна к AB, так что один из углов AMN, BMN является острым. Пусть, например, острым является угол AMN (черт. 53). Перемещая точку M по направлению к A, найдем такую точку M', что перпендикуляр $M'N'$ к прямой CD имеет длину, большую, чем MN. Так как в четырехугольнике $NMM'N'$ имеем $M'N' > MN$, то, отложив на стороне $M'N'$ отрезок $N'P = MN$ и соединив точки M и P, найдем $\angle MM'N' < \angle MPN' < \frac{\pi}{2}$ (ибо в четырехугольнике Саккери $MNN'P$ угол MPN' острый). Следовательно, угол $AM'N' = \pi - MM'N'$ — тупой. Итак, угол AMN переходит при движении точки M к M' от значений, меньших $\frac{\pi}{2}$ (угол AMN), к значениям, большим $\frac{\pi}{2}$ (угол $AM'N'$). По непрерывности найдется точка M_0 (между M и M'), для которой перпендикуляр M_0N_0 на прямую CD образует прямой угол AM_0N_0 с прямой AB. Иначе говоря, расходящиеся прямые AB и CD имеют общий перпендикуляр M_0N_0.



Черт. 54

Заметим, что две расходящиеся прямые имеют *только один* общий перпендикуляр: два общих перпендикуляра к прямым AB и CD составили бы вместе с этими прямыми прямоугольник (четырехугольник с прямыми углами), в то время как сумма углов четырехугольника должна быть в геометрии Лобачевского меньше 2π.

[68] Разберем все возможности, которые могут иметь место для перпендикуляров, восставленных к сторонам треугольника в их серединах.

Если два из них пересекаются, то третий проходит через точку их пересечения (ст. 110). Допустим теперь, что два из них, например FG и HK, расходятся. В таком случае они имеют общий перпендикуляр GE (примечание [67]). Опустим на GE перпендикуляры AA_1, BB_1 и CC_1 из вершин треугольника ABC (черт. 54). Совмещая точки G, F, C четырехугольника $GFCC_1$ с точками G, F, B, мы убедимся, что точка C_1 совпадает с точкой B_1 вследствие невозможности существования двух перпендикуляров, опущенных из B на A_1C_1, откуда следует, что $C_1C = B_1B$. Аналогично докажем, что $C_1C = A_1A$.

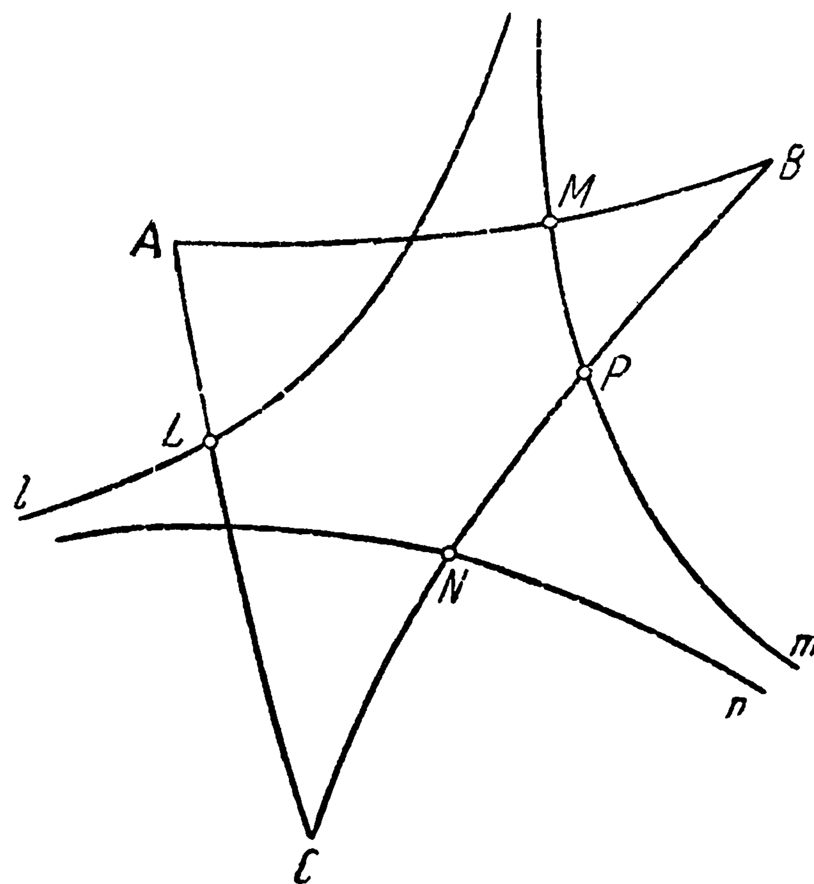
Пусть теперь DE — перпендикуляр к AB в ее середине. Налагая точки A_1, B_1 четырехугольника A_1ABB_1 на точки B_1, A_1 и принимая

во внимание, что $AA_1 = BB_1$, докажем, что точки D, E не изменяют своего положения, откуда следует, что $ED \perp EG$.

Итак, если из трех перпендикуляров к трем сторонам треугольника, восставленных в их серединах, два перпендикулярны к одной прямой, то и третий перпендикулярен к этой же прямой.

Предположим теперь, что два из трех рассматриваемых перпендикуляров параллельны между собой. В таком случае, согласно предыдущему, никакие два из них не могут иметь ни общей точки, ни общего перпендикуляра и, следовательно, всякие два из них параллельны между собой. Остается доказать, что они параллельны в одном направлении.

Допустим противное. Пусть l, m, n — перпендикуляры, восставленные к сторонам AC, AB, BC треугольника ABC в их серединах L, M, N. Предположим при этом, что прямые l, m, n попарно параллельны, но в разных направлениях (черт. 55). Точки A и B расположены по разные стороны прямой m, так что одна из них (для определенности B) расположена по другую сторону от m, чем прямые l и n. Таким образом, точка N (лежащая на прямой n) расположена по другую сторону прямой m, чем точка B, и потому отрезок BN пересекает прямую m в некоторой точке P. Отсюда получаем $BN > BP > BM$ (ибо BM — перпендикуляр, а BP — наклонная), и потому $BC = 2BN > 2BM = AB$. Итак, $BC > AB$. Но совершенно аналогично можно доказать, что $AB > AC > BC$. Полученное противоречие доказывает невозможность предположенной конфигурации.



Черт. 55

[69] Уточняем рассуждение Лобачевского. Разделим хорду AC (чертеж 117 в тексте) и стягиваемую ею дугу на m равных частей и пусть $\breve{AA_1} = \frac{1}{m}\breve{AC}$. В таком случае $m \cdot AA_1 > AC$, $AA_1 > \frac{AC}{m} > BC$. Но меньшим хордам соответствуют меньшие дуги, и мы приходим к неравенству

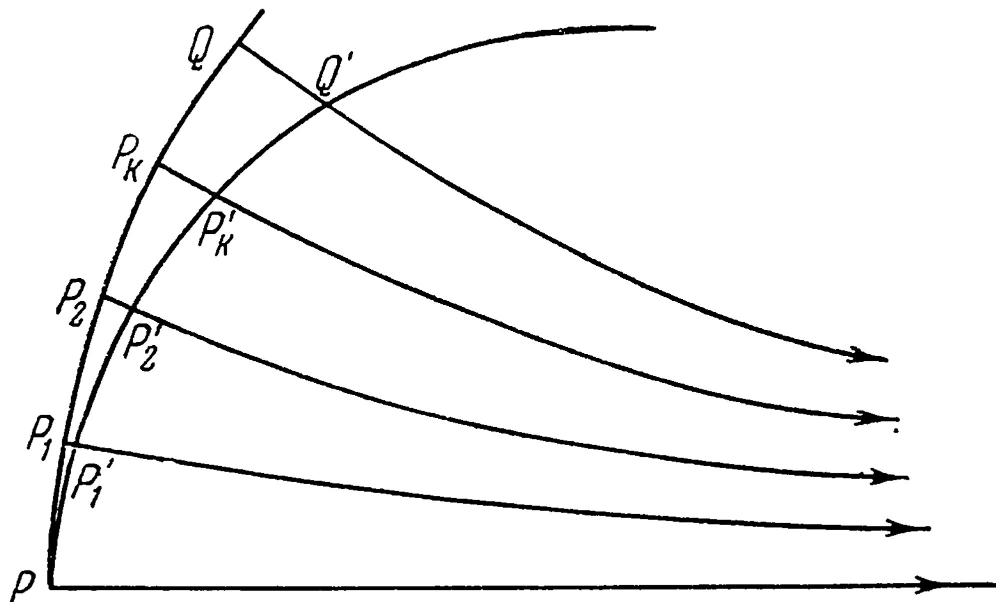
$$\breve{BC} < \frac{\breve{AC}}{m},$$

которое справедливо и для соответствующих центральных углов.

Далее мы можем рассуждать следующим образом. Пусть дуга предельной линии PQ разбита на $k+1$ одинаковых частичных дуг, каждая из которых стягивается хордами (черт. 56)

$$PP_1 = P_1P_2 = \ldots = P_kQ = \alpha.$$

Спроектируем все эти точки на окружность, касающуюся PQ в точке P, с помощью осей предельной линии. При этом дуга окружности разобьется на $k+1$ дугу. Эти дуги не равны между собой, но при достаточно большом радиусе круга отличаются меньше, чем на $\frac{\overset{\frown}{AC}}{m}$ от дуги с хордой $AC=\alpha$. Отсюда следует, что какова бы ни была требуемая точность измерения, всегда можно выбрать столь большой радиус круга, касающегося предельной линии, чтобы отношение двух дуг на предельной линии было равно (с нужной точностью) отношению соответствующих дуг на круге.



Черт. 56

[70] Это соотношение, дающее зависимость между функциями $f(x)$ и $\Pi(x)$, может быть получено более непосредственным образом, если предположить, что вершина B треугольника ACB удалилась в бесконечность так, что прямые AB, CB и BB' стали параллельными между собою. В этом случае черт. 132 заменяется приводимым здесь черт. 57, на котором $B'H \parallel AB$ и $D'K \parallel CB$. В этом случае мы будем иметь

$$r = t,$$

так что

$$p = r \sin \Pi(\alpha), \quad p = te^{-f(b)} = re^{-f(b)}.$$

С другой стороны, при удалении вершины B в бесконечность угол A стремится к углу параллельности, соответствующему перпендикуляру b, так что $\alpha = b$, откуда

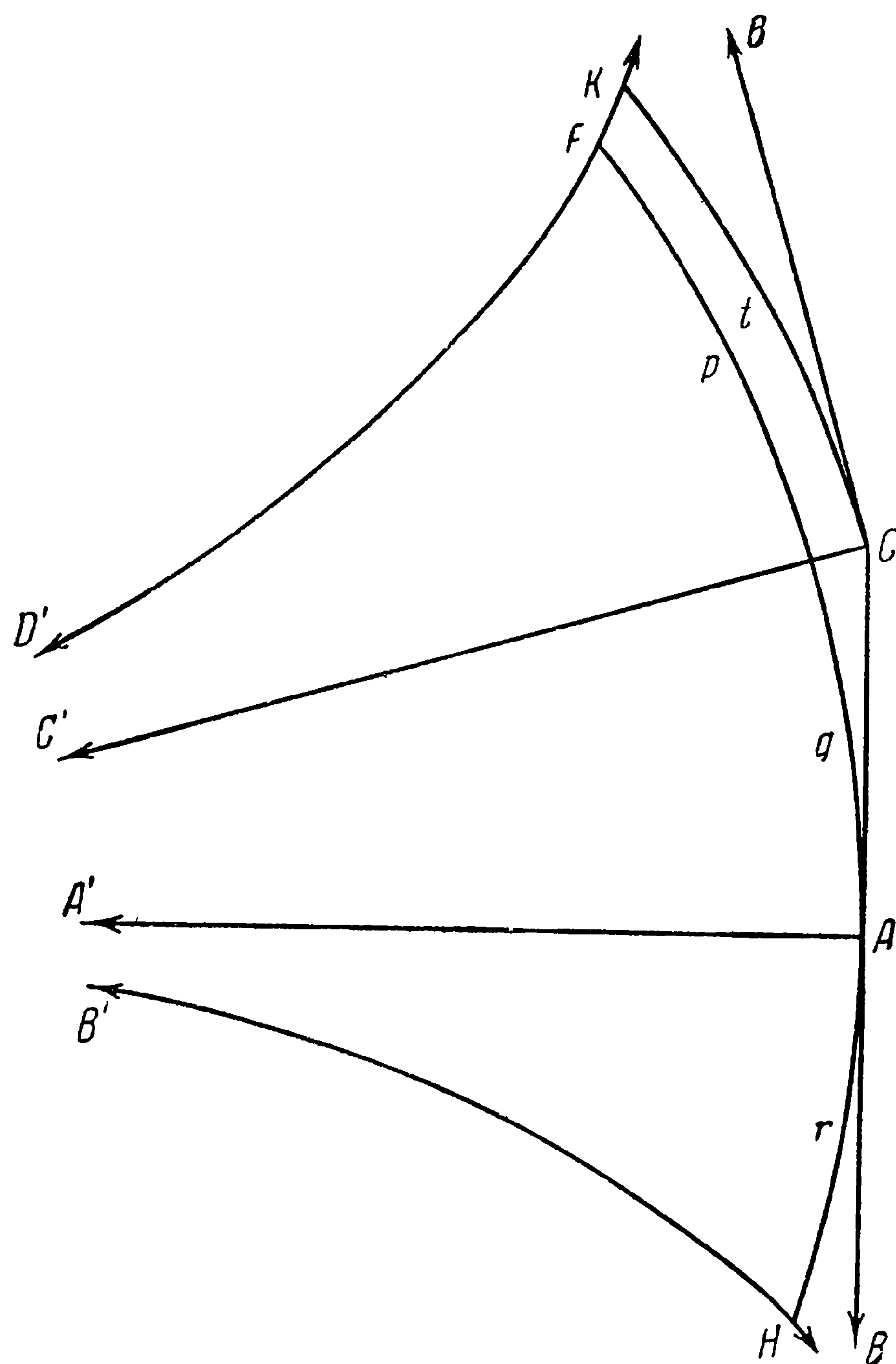
$$e^{-f(b)} = \sin \Pi(b).$$

[71] В соотношении (61) c и β — произвольные отрезки. Положив

$$c = \frac{x+y}{2}, \quad \beta = \frac{x-y}{2},$$

найдем из (61)

$$\left[\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi\left(\frac{x+y}{2}\right)\right]^2 = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(x)\cdot\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(y),$$



Черт. 57

а положив $c = \beta = \frac{x+y}{2}$, найдем

$$\left[\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi\left(\frac{x+y}{2}\right)\right]^2 = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(x+y).$$

Таким образом,

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(x+y) = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(x)\cdot\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(y),$$

т. е. функция $\varphi(x) = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(x)$ удовлетворяет соотношению $\varphi(x+y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$, и потому является показательной:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(x) = e^{-\frac{x}{k}}.$$

Покажем, что число e в соотношениях

$$s = s' e^x$$

(см. ст. 117) и

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(x) = e^{-x}$$

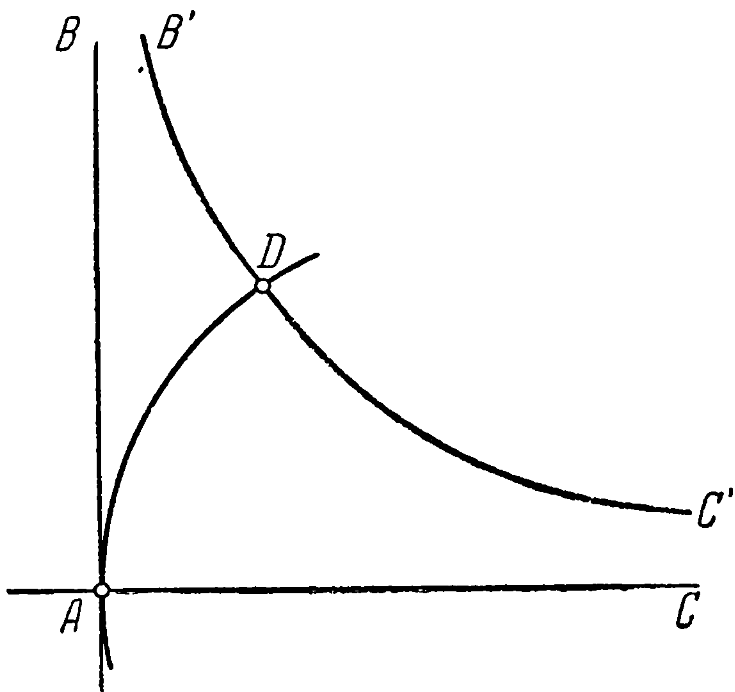
одинаково. Иначе говоря, если выбрать единицу длины так, чтобы в первом из этих соотношений число e было основанием натуральных логарифмов, то *при этой же единице длины* число e будет основанием натуральных логарифмов и во втором соотношении. Для доказательства выберем единицу длины так, чтобы в соотношении

$$s = s' e^x \qquad (*)$$

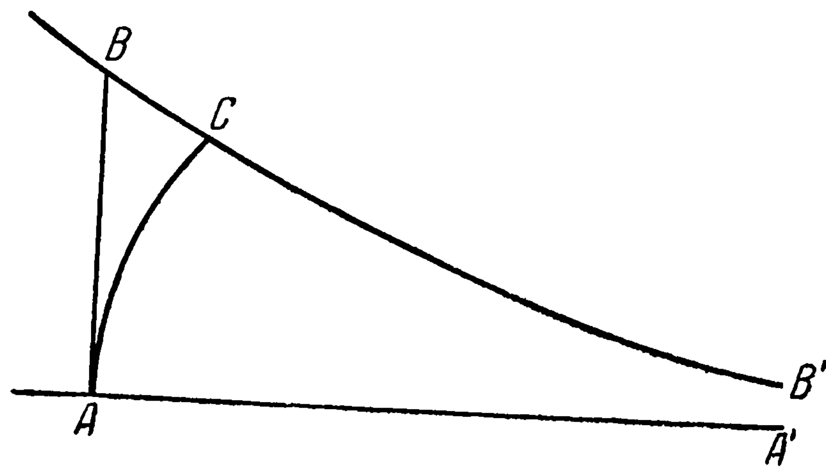
число e было основанием натуральных логарифмов, и примем

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(x) = e^{-\frac{x}{k}},$$

где k — положительное число. Нам нужно доказать, что $k = 1$.



Черт. 58

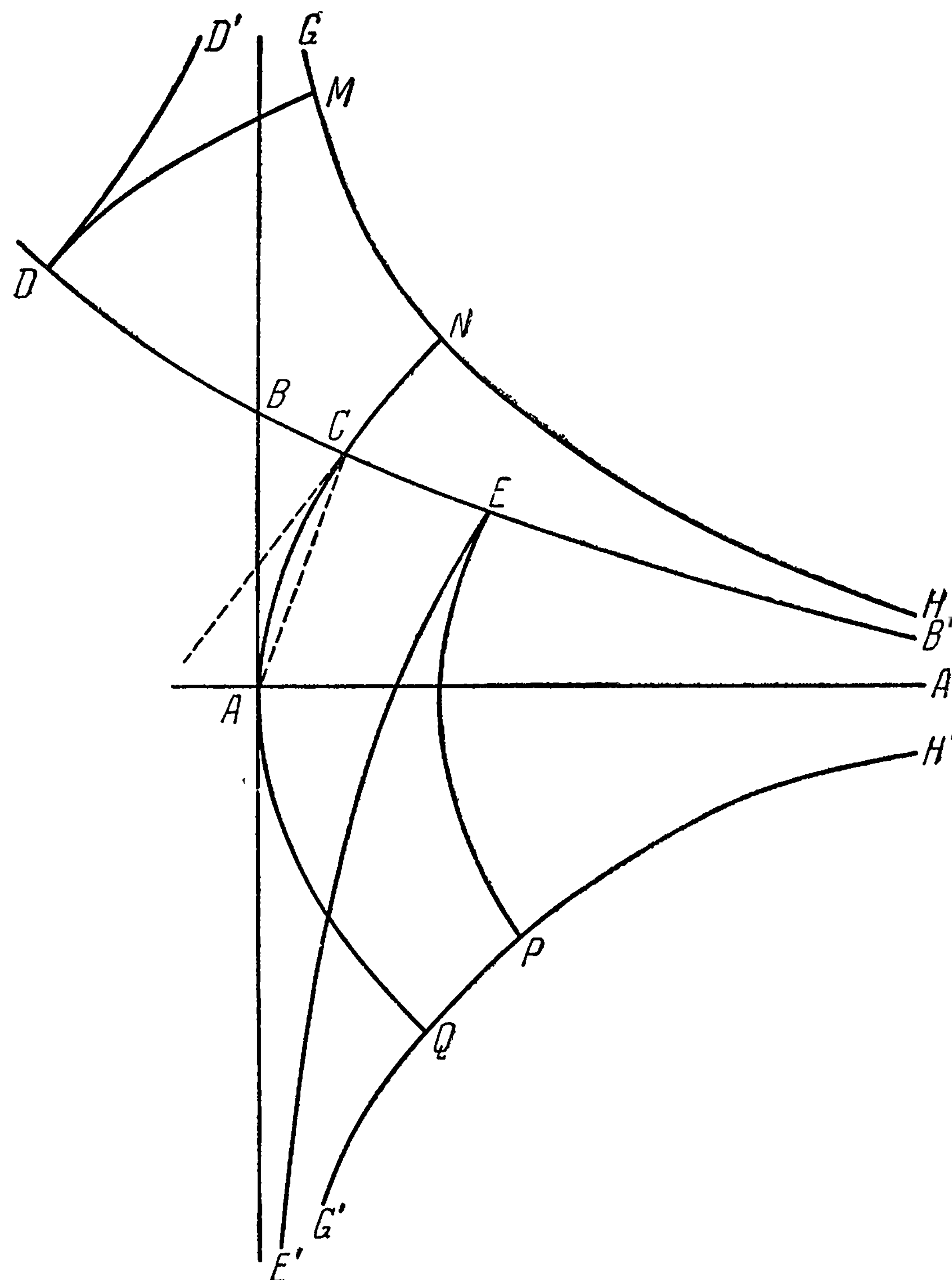


Черт. 59

Пусть AB и AC — взаимно перпендикулярные прямые, $B'C'$ — прямая, параллельная им обеим (черт. 58), а AD — дуга предельной линии, заключенная между осями AC и $B'C'$. Длина этой дуги, называемой *абсолютной дугой* предельной линии, однозначно определена (ибо если мы выберем две другие прямые $A_1B_1 \perp A_1C_1$, проведем параллельную им прямую $B_1'C_1'$ и дугу A_1D_1 предельной линии, то получим фигуру, конгруэнтную той, которая изображена на черт. 58); мы будем обозначать эту длину через σ.

Проведем к прямой AA' перпендикуляр AB длины u и параллель BB', проходящую через конец B этого перпендикуляра (черт. 59). Пусть AC — дуга предельной линии с осями AA' и BB', заключенная между этими осями. Покажем, следуя Либману *, что длина s дуги AC имеет значение

$$s = \sigma \operatorname{th} u. \qquad (**)$$



Черт. 60

Для доказательства проведем прямую GH, параллельную AB и AA', и прямую $G'H'$, симметричную GH относительно прямой AA' (черт. 60). Далее, отложим на прямой BB' отрезки $BD = BE = AB = u$ и проведем прямые $DD' \| AB$, $EE' \| BA$. Наконец, через точки D и E проведем предельные линии с осью BB'. Так как $DD' \perp DB$, а линия GH парал-

* H. Liebman. Nichteuklidische Geometrie, 1923, стр. 57.

лельна прямым DD' и DB, то дуга DM предельной линии, заключенная между прямыми DB и GH, является абсолютной. То же можно сказать о дугах AN, AQ, EP:

$$\smile DM = \smile AN = \smile AQ = \smile EP = \sigma.$$

На основании соотношения (*) имеем

$$DM = CN \cdot e^{DC}, \quad CQ = EP \cdot e^{CE},$$

или, обозначая отрезок BC через v,

$$\sigma = (\sigma - s)\, e^{u+v}, \quad \sigma + s = \sigma e^{u-v}\,*.$$

Перемножая эти равенства, находим

$$\frac{\sigma + s}{\sigma - s} = e^{2u},$$

что и дает значение (**) для s.

Обращаясь теперь к черт. 57, замечаем в силу (**), что на этом чертеже дуга q равна

$$q = \sigma \operatorname{th} b \qquad (***)$$

(ибо $AC = b$). Но, с другой стороны, мы имеем

$$q = \sigma \cos \Pi(b) = \sigma \operatorname{th} \frac{b}{k} \qquad (****)$$

[при удалении вершины B в бесконечность дуга r становится абсолютной, что видно из черт. 57, а угол $\Pi(\alpha)$ приближается к значению $\Pi(b)$; поэтому написанное равенство получается при помощи предельного перехода из соотношения $q = r \cos \Pi(\alpha)$]. Сравнивая формулы (***) и (****) для q, находим $k = 1$.

[[12]] Приведем несколько упрощенный вариант вывода Лобачевского.

Рассмотрим треугольник EHG, образованный на предельной поверхности дугами предельных линий и имеющий вершину прямого угла в точке H (черт. 61).

Возьмем на оси EE' предельной поверхности точку A и построим сферу радиуса AE. Так как оси EE' и GG' неограниченно сближаются в сторону параллелизма, то точку A можно взять так далеко от точки E, чтобы сфера пересекала ось GG'. Пусть B есть ближайшая к G точка пересечения сферы с осью GG'. Пересечем сферу плоскостями AEH, AEG,

---

* Точка E лежит вне отрезка BC, так как угол $B'CA$ острый, и потому перпендикуляр, восставленный в точке C к прямой BB', пересекает AB. Перпендикуляр же EE', восставленный в точке E, не встречает прямой AB, т. е. точка E расположена за точкой C (в сторону точки B').

$ABD \perp AEH$ и рассмотрим сферический треугольник BED с прямым углом при вершине D. Если мы обозначим линейные меры углов и сторон $\angle E, \angle B, \overparen{BD}, \overparen{ED}, \overparen{BE}$ этого сферического треугольника соответственно через b, α', c, β, a, то согласно ст. 136 (см. также предложение 35 на стр 53 или примечание [20]) существует прямолинейный прямоугольный треугольник со сторонами a, b, c и острыми углами $\Pi(\alpha')$, $\Pi(\ )$ (треугольники (A) и (B) в примечании [20]) Предположим теперь, что точка A неограниченно удаляется от E по оси EE'. В таком случае все точки сферы неограниченно приближаются к точкам предельной поверхности и, в частности,

Черт. 61

точка B стремится к точке G, а точка D — к некоторой точке H_1 на предельной линии EH. Но плоскость ADB, которая все время остается перпендикулярной плоскости AEH, стремится стать параллельной прямой AE, т. е. совпасть с плоскостью HGG', вследствие чего точка H_1 совпадает с точкой H, так что все стороны сферического треугольника EDB стремятся совместиться со сторонами треугольника EHG на предельной поверхности. Отсюда, пользуясь тем, что оба треугольника имеют общий угол при вершине E, а для треугольника на предельной поверхности имеют место соотношения эвклидовой тригонометрии, мы приходим к соотношениям

$$\lim \frac{\Pi(c)}{\Pi(\beta)} = \lim \frac{\overparen{BD}}{\overparen{ED}} = \frac{\overparen{GH}}{\overparen{EH}} = \operatorname{tg} \angle E = \operatorname{tg} \Pi(b),$$

$$\lim \frac{\Pi(a)}{\Pi(\beta)} = \lim \frac{\overparen{BE}}{\overparen{ED}} = \frac{\overparen{EG}}{\overparen{EH}} = \frac{1}{\cos \angle E} = \frac{1}{\cos \Pi(b)},$$

откуда

$$\lim \frac{\Pi(c) + \Pi(a)}{\Pi(\beta)} = \frac{1 + \sin \Pi(b)}{\cos \Pi(b)} = \frac{1 + \cos \Pi(b')}{\sin \Pi(b')} = \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \Pi(b'),$$

и, применяя третье и восьмое из уравнений (55), получаем формулу (66) в тексте Лобачевского. Из (66) тем же путем, что и в тексте*, получаем соотношение

$$\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\Pi(x+y)=\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\Pi(x)\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\Pi(y),$$

показывающее, что функция $\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\Pi(x)$ является показательной.

[73] Иначе говоря, геометрия бесконечно малого в гиперболическом пространстве есть геометрия Эвклида (см. примечание [23]).

Из этого факта следует совместимость практической достоверности эвклидовой геометрии и предположения о том, что реальное пространство в целом подчиняется законам геометрии Лобачевского с достаточно большим абсолютным отрезком.

Так, например, известно, что все космические треугольники с вершинами в звездах с известными параллаксами подчиняются соотношениям эвклидовой геометрии в пределах точности, доступной современным астрономическим наблюдениям, и это не противоречит допущению о существовании абсолютного отрезка, размеры которого превышают $4\cdot10^6$ радиусов земной орбиты, или шестьдесят световых лет◊.

Проблема связи геометрии Лобачевского и строения действительного мира получила совершенно новое освещение в общей теории относительности. Как известно, эта теория опирается на геометрическую схему римановой геометрии четырехмерного пространственно-временного многообразия, причем геометрия мира существенно зависит от распределения тяготеющих масс. Если предположить, что эти массы равномерно заполняют пространство, т. е. произвести как бы «осреднение» этого распределения, то можно прийти к схеме так называемого «изотропного мира». Эта схема позволяет отделить пространственные и временные координаты и поставить вопрос о геометрии трехмерного мирового пространства. Кривизна такого пространства будет постоянной и a priori может считаться отрицательной, положительной или равной нулю.

Выбор того из этих трех предположений, которое соответствует действительности, может быть произведен только на основании наблюдений, позволяющих определить среднюю плотность материи ρ и среднюю скорость движения внегалактических туманностей в ее отношении α к расстоянию от наблюдателя. Л. Ландау и Е. Лифшиц△ указывают, что при

* Заметим, что угловые величины сторон сферического треугольника BDE стремятся к нулю, в частности, $\lim \Pi(\beta)=0$, т. е. $\lim \beta=\infty$.

◊ F. Schilling, Nichteuklidische Geometrie, Leipzig und Berlin. 1931, стр. 213.

△ Л. Ландау и Е. Лифшиц, Теория поля, М.— Л., 1941, стр. 277.

значениях $\alpha = 1{,}8 \cdot 10^{-17}$ сек$^{-1}$ и $\rho = 10^{-3}$ г/см^3, принятых в современной астрономии, кривизна изотропного пространства *отрицательна*, так что оно является *пространством Лобачевского*. Абсолютный отрезок пространства, вычисленный в согласии с теми же данными, оказывается равным $1{,}8 \cdot 10^9$ световых лет.

[74] Если $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ — длины сторон сферического треугольника, а $k = \frac{1}{R^2}$ — полная кривизна сферы, то угловые значения сторон имеют вид

$$a = \frac{\bar{a}}{R} = \bar{a}\sqrt{k},\quad b = \frac{\bar{b}}{R} = \bar{b}\sqrt{k},\quad c = \frac{\bar{c}}{R} = \bar{c}\sqrt{k},$$

вследствие чего соотношение (101) принимает вид

$$\operatorname{ctg} A \sin C + \cos C \cos \bar{b}\sqrt{k} = \operatorname{ctg} \bar{a}\sqrt{k} \sin \bar{b}\sqrt{k}. \qquad (101')$$

Геометрический смысл формулы (101′) при отрицательном значении k был установлен Э. Миндингом * еще при жизни Лобачевского, хотя и не в связи с его исследованиями. В 1840 году он опубликовал в XX томе журнала Крелля статью «Beiträge zur Theorie der kürzesten Linien auf krummen Flächen», в которой показывает, что соотношение (101) при отрицательном k имеет место для геодезических треугольников на поверхностях постоянной отрицательной кривизны.

Трудно сказать, почему Лобачевский не заметил результата Миндинга. Если бы это произошло, то история развития идей неэвклидовой геометрии претерпела бы существенное изменение, а Лобачевский мог бы добиться их признания еще при жизни.

[75] Эти формулы, так же как соотношения (1), (2), (3) между сторонами и углами прямоугольного треугольника, Лобачевский выводит синтетическим путем в других своих работах при условии, что угол параллельности меньше прямого (см. «Геометрические исследования» и «Новые начала», включенные в настоящее издание, стр. 15 и 75). Здесь же эти соотношения приняты за исходные взамен аксиомы о параллельных (в дополнение к положениям абсолютной геометрии, которые все считаются выполненными). На основе этих соотношений выводятся остальные зависимости в прямоугольном треугольнике, а затем и в произвольном прямолинейном треугольнике. Закономерность этих принятых a priori уравнений оправдывается впоследствии (см. примечание [78]).

---

* Э. Миндинг родился в 1806 г. в городе Калише. С 1843 по 1883 г. он состоял ординарным профессором Юрьевского (ныне Тартуского) университета. Был членом-корреспондентом, а впоследствии почетным академиком Петербургской Академии наук. Умер в Юрьеве в 1885 г.

[76] Приведем вывод формул (4), (5), (6), [6a] из (1), (2), (3), [3a]. Из [3a] находим
$\cos^2 r' \sin^2 P = \cos^2 p' \sin^2 q' = \sin^2 q' (1 - \sin^2 p') = \sin^2 q' - \sin^2 p' \sin^2 q'$; далее [см. (1)],

$$\sin^2 q' - \sin^2 p' \sin^2 q' = \sin^2 q' - \sin^2 r' = \cos^2 r' - \cos^2 q'.$$

Таким образом,

$$\cos^2 q' = \cos^2 r' - \cos^2 r' \sin^2 P = \cos^2 r' \cos^2 P,$$

что дает формулу (4). Далее, из (1) и (4) имеем:

$$\operatorname{tg} r' = \sin r' \cdot \frac{1}{\cos r'} = \sin p' \sin q' \cdot \frac{\cos P}{\cos q'} = \sin p' \operatorname{tg} q' \cos P.$$

Сравнивая это выражение с формулой (3), найдем

$$\operatorname{tg} p' \sin P = \sin p' \operatorname{tg} q' \cos P,$$

что дает формулу (5). Далее согласно (2) имеем:

$$\frac{1}{\sin^2 Q} = 1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 Q} = 1 + \frac{\operatorname{tg}^2 P}{\sin^2 r'} = 1 + \operatorname{tg}^2 P (1 + \operatorname{ctg}^2 r') =$$

$$= 1 + \operatorname{tg}^2 P + \frac{\operatorname{tg}^2 P}{\operatorname{tg}^2 r'} = \frac{1}{\cos^2 P} + \frac{\operatorname{tg}^2 P}{\operatorname{tg}^2 r'};$$

далее [см. (3)],

$$\frac{1}{\cos^2 P} + \frac{\operatorname{tg}^2 P}{\operatorname{tg}^2 r'} = \frac{1}{\cos^2 P} + \frac{\operatorname{tg}^2 P}{\operatorname{tg}^2 p' \sin^2 P} = \frac{1}{\cos^2 P}(1 + \operatorname{ctg}^2 p') = \frac{1}{\cos^2 P \sin^2 p'},$$

откуда имеем формулу (6). Наконец, согласно (2) получаем (см. (4)):

$$\operatorname{ctg}^2 Q = \frac{\operatorname{tg}^2 P}{\sin^2 r'} = \frac{1}{\sin^2 r'} \left(\frac{1}{\cos^2 P} - 1 \right) =$$

$$= \frac{1}{\sin^2 r'} \left(\frac{\cos^2 r'}{\cos^2 q'} - 1 \right) = \operatorname{ctg}^2 r' \cdot \frac{1}{\cos^2 q'} - \frac{1}{\sin^2 r'} =$$

$$= \operatorname{ctg}^2 r' \left(\frac{1}{\cos^2 q'} - 1 \right) - 1 = \operatorname{ctg}^2 r' \operatorname{tg}^2 q' - 1,$$

откуда находим соотношение, равносильное [6a]:

$$\frac{1}{\sin^2 Q} = 1 + \operatorname{ctg}^2 Q = \operatorname{ctg}^2 r' \operatorname{tg}^2 q'.$$

[77] Подставляя $d = a - b + c$ в [14a], имеем

$$\cos^2 \frac{1}{2} A = \frac{(e^{a-b+c} - 1)(e^{b+c-a} - 1)}{(e^{2b} - 1)(e^{2c} - 1)} = \frac{(e^{s-2a} - 1)(e^s - 1)}{(e^{2b} - 1)(e^{2c} - 1)}.$$

Далее,

$$\sin^2 \frac{A}{2} = 1 - \frac{(e^s - 1)(e^{s-2a} - 1)}{(e^{2b} - 1)(e^{2c} - 1)} = \frac{e^{2b+2c} - e^{2b} - e^{2c} - e^{2s-2a} + e^s + e^{s-2a}}{(e^{2b} - 1)(e^{2c} - 1)} =$$

$$=\frac{e^{s-2a}}{(e^{2b}-1)(e^{2c}-1)}(1+e^{2a}-e^{2c+2a-s}-e^{2b+2a-s})=$$

$$=\frac{e^{s-2a}}{(e^{2b}-1)(e^{2c}-1)}(1+e^{2s-2b-2c}-e^{s-2b}-e^{s-2c})=$$

$$=\frac{e^{s-2a}(e^{s-2b}-1)(e^{s-2c}-1)}{(e^{2b}-1)(e^{2c}-1)}.$$

Далее, из полученных выражений для $\cos^2\frac{A}{2}$ и $\sin^2\frac{A}{2}$ в тексте имеем

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}=\frac{e^{s}-1}{e^{2c}-1}\sqrt{\frac{(e^{s-2a}-1)(e^{s-2b}-1)}{(e^{2a}-1)(e^{2b}-1)}}=$$

$$=\frac{e^{s}-1}{e^{2c}-1}\,e^{c-\frac{1}{2}s}\sin\frac{C}{2};$$

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}=\frac{e^{s-2c}-1}{e^{2c}-1}\sqrt{\frac{e^{s-2a}e^{s-2b}(e^{s-2a}-1)(e^{s-2b}-1)}{(e^{2a}-1)(e^{2b}-1)}}=$$

$$=\frac{e^{s-2c}-1}{e^{2c}-1}\sqrt{e^{2s-2a-2b-s+2c}}\,\sin\frac{C}{2}=\frac{e^{s-2c}-1}{e^{2c}-1}\,e^{-\frac{s}{2}+2c}\sin\frac{C}{2}=$$

$$=\frac{e^{\frac{s}{2}}-e^{2c-\frac{s}{2}}}{e^{2c}-1}\sin\frac{C}{2};$$

$$\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}=e^{\frac{s}{2}-a}\,\frac{e^{s-2b}-1}{e^{2c}-1}\sqrt{\frac{(e^{s-2c}-1)(e^{s}-1)}{(e^{2b}-1)(e^{2a}-1)}}=$$

$$=e^{\frac{s}{2}-a}\,\frac{e^{s-2b}-1}{e^{2c}-1}\cos\frac{C}{2}.$$

Аналогично

$$\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}=e^{\frac{s}{2}-b}\cdot\frac{e^{s-2a}-1}{e^{2c}-1}\cos\frac{C}{2}.$$

Далее

$$\cos\frac{A+B}{2}=\left(e^{c+\frac{s}{2}}-e^{c-\frac{s}{2}}-e^{\frac{s}{2}}+e^{2c-\frac{s}{2}}\right)\frac{\sin\frac{C}{2}}{e^{2c}-1}=$$

$$=\frac{(e^{c}-1)\left(e^{\frac{s}{2}}+e^{c-\frac{s}{2}}\right)}{e^{2c}-1}\sin\frac{C}{2}=\frac{e^{\frac{s}{2}}+e^{c-\frac{s}{2}}}{e^{c}+1}\sin\frac{C}{2}=e^{-\frac{s}{2}}\cdot\frac{e^{s}+e^{c}}{e^{c}+1}\sin\frac{C}{2},$$

$$\sin\frac{A+B}{2}=e^{\frac{s}{2}}\left(e^{s-a-2b}-e^{-a}+e^{s-2a-b}-e^{-b}\right)\frac{\cos\frac{C}{2}}{e^{2c}-1}=$$

$$=e^{\frac{s}{2}}\left(e^{c-a}+e^{c-b}-e^{-a}-e^{-b}\right)\frac{\cos\frac{C}{2}}{e^{2c}-1}=e^{\frac{s}{2}}\frac{e^{-a}+e^{-b}}{e^{c}+1}\cos\frac{C}{2}.$$

Наконец,

$$\cos\frac{A+B+C}{2}=\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{C}{2}=$$

$$=\frac{e^{\frac{s}{2}}+e^{c-\frac{s}{2}}-e^{\frac{s}{2}-a}-e^{\frac{s}{2}-b}}{e^{c}+1}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}=$$

$$=\frac{1+e^{c-s}-e^{-a}-e^{-b}}{e^{c}+1}e^{\frac{s}{2}}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}=$$

$$=\frac{(1-e^{-a})(1-e^{-b})}{e^{c}+1}e^{\frac{s}{2}}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

Подставляя сюда значения $\sin\frac{C}{2}$, $\cos\frac{C}{2}$, имеем

$$\cos\frac{A+B+C}{2}=$$

$$=\frac{(1-e^{-a})(1-e^{-b})}{e^{c}+1}e^{\frac{s}{2}}\frac{\sqrt{e^{s-2c}(e^{s-2a}-1)(e^{s-2b}-1)(e^{s-2c}-1)(e^{s}-1)}}{(e^{2a}-1)(e^{2b}-1)}=$$

$$=\frac{\sqrt{(e^{s}-1)(e^{s-2a}-1)(e^{s-2b}-1)(e^{s-2c}-1)}}{(e^{a}+1)(e^{b}+1)(e^{c}+1)}.$$

[78] Лобачевский утверждает, что постулируемые им тригонометрические соотношения не противоречат положениям абсолютной геометрии Он считает, что обосновал эту непротиворечивость, показав, что треугольник может быть построен по тем же данным и с теми же ограничениями для длин сторон, что и в геометрии Эвклида. Конечно, с современной точки зрения это доказательство нельзя считать строгим (см. примечание [18] и Приложение 3).

[79] Из существования прямоугольных треугольников со сторонами и углами

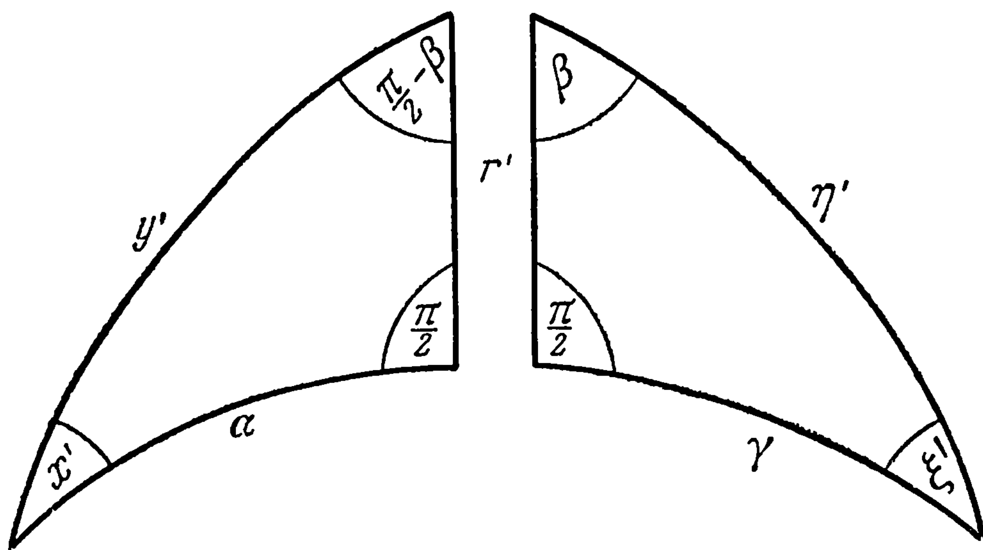
$$\left.\begin{matrix} y, & x, & r \\ \beta, & \alpha, & \frac{1}{2}\pi \end{matrix}\right\} \qquad \left.\begin{matrix} \eta, & \xi & r, \\ \frac{\pi}{2}-\beta, & \gamma, & \frac{1}{2}\pi \end{matrix}\right\}$$

(см. черт. 3 в тексте Лобачевского) следует существование сферических прямоугольных треугольников со сторонами и углами (черт. 62)

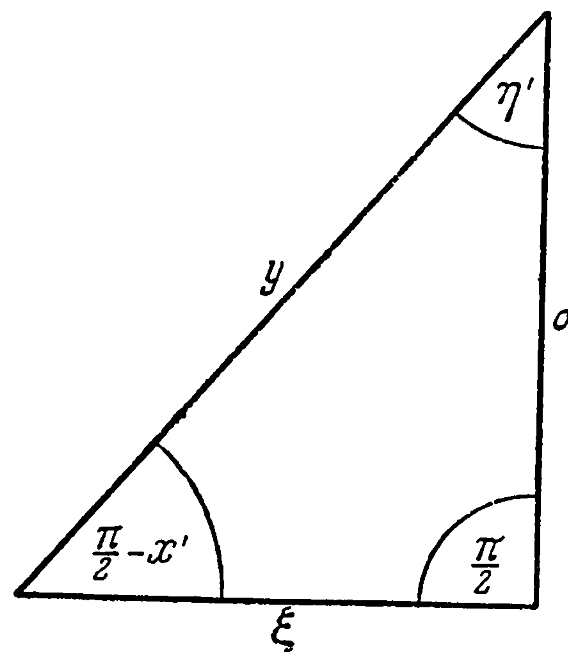
$$\left.\begin{matrix} r', & \alpha, & y', \\ x', & \dfrac{\pi}{2}-\beta, & \dfrac{1}{2}\pi \end{matrix}\right\} \qquad \left.\begin{matrix} r', & \gamma, & \eta', \\ \xi', & \beta, & \dfrac{1}{2}\pi \end{matrix}\right\}$$

[примечание [20]; следует иметь в виду, что здесь вместо $\Pi(a)$ применяется обозначение a']. Прикладывая эти сферические треугольники друг к другу общей стороной r' (так, чтобы совместились вершины прямых углов), мы получим сферический прямоугольный треугольник со сторонами и углами

$$\left.\begin{matrix} y', & \eta', & \alpha+\gamma, \\ \xi', & x', & \dfrac{1}{2}\pi. \end{matrix}\right\}$$



Черт. 62



Черт. 63

Из этого следует (примечание [20]) существование прямолинейного прямоугольного треугольника со сторонами и углами (черт. 63)

$$\left.\begin{matrix} \sigma, & \xi, & y, \\ \dfrac{1}{2}\pi - x', & \eta', & \dfrac{1}{2}\pi, \end{matrix}\right\} \qquad (*)$$

где σ — линейная мера угла $\alpha+\gamma$ (т. е. $\sigma' = \alpha+\gamma$). Из тригонометрических соотношений для треугольника (*) и получаются нужные соотношения для трипрямоугольника [соотношения (25), (26), (27), (28), (32), (33) получаются при применении к треугольнику (*) соотношений (6), (4), (2), (3), (3), (4)].

[80] Формула (36) определяет линейный элемент плоскости Лобачевского в координатах x и y. Первая из них есть расстояние, отсчитываемое

по прямой $y = 0$ от некоторой начальной точки. Вторая координата y есть длина, отсчитываемая по прямым, принадлежащим пучку с общим перпендикуляром $y = 0$. Таким образом, линии $x = \text{const}$ — прямые, т. е. геодезические линии гиперболической метрики, а линии $y = \text{const}$ — эквидистанты с общей базой $y = 0$, т. е. ортогональные траектории пучка прямых $x = \text{const}$.

Подсчитывая гауссову кривизну линейного элемента

$$ds^2 = dy^2 + \frac{dx^2}{\sin^2 y'} = dy^2 + \operatorname{ch}^2 y\, dx^2$$

по известной формуле, имеющей место для линейного элемента в полугеодезических координатах*

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}}\,\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial y^2},$$

мы получим $K = -1$, откуда следует, что *геометрия плоскости Лобачевского осуществима в малом на поверхности постоянной отрицательной кривизны.*

[81] Элемент площади (37) можно заменить через $\dfrac{|J_1|\,dx'd\xi'}{\sin y'}$, где J_1 — якобиан $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(x', \xi')}$. Переход от x, y к x', ξ' осуществляется формулами

$$\begin{cases} \operatorname{th} x = \cos x', \\ \operatorname{th} y = \dfrac{\cos \xi'}{\sin x'}, \end{cases}$$

[верхняя из этих формул приведена в сноске△ на стр. 317, а нижняя совпадает со вторым из соотношений (29)], из которых следует, что $\dfrac{\partial x}{\partial \xi'} = 0$, и потому

$$J_1 = \frac{\partial x}{\partial x'}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial \xi'} = \frac{1}{\sin x'}\cdot\frac{\sin \xi'\cdot \operatorname{ch}^2 y}{\sin x'} = \frac{\sin \xi'}{\sin^2 x' \sin^2 y'}.$$

Таким образом (см. (16), (34)),

$$d^2S = \frac{|J_1|\,dx'd\xi'}{\sin y'} = \frac{\sin \xi' \sin x'\, dx'd\xi'}{\sin^3 x' \sin^3 y'} = \frac{\sin x' \sin \xi'\, dx'd\xi'}{\sin x'} =$$

$$= \frac{\sin x' \sin \xi'\, dx'd\xi'}{(1-\cos^2 x')^{3/2}} = \frac{\sin x' \sin \xi'\, dx'd\xi'}{(1-\cos^2 x' - \cos^2 \xi')^{3/2}}.$$

---

* См. А. П. Норден, Дифференциальная геометрия. М., 1948, стр. 190, 191.

Для получения (51) элемент площади (37) заменим через $\frac{|J_2|\,dy\,d\eta}{\sin y'}$, где J_2 — якобиан $\frac{\partial(x, y)}{\partial(y, \eta)}$. Переход от x, y к y, η осуществляется формулами (см. первое соотношение (30) и формулы в сноске△ на стр. 317).

$$\begin{cases} \operatorname{sh} x = \dfrac{\operatorname{sh}\eta}{\operatorname{ch} y}, \\ y = y \end{cases}$$

из которых следует, что $\frac{\partial y}{\partial \eta} = 0$, и потому

$$-J_2 = \frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{\operatorname{ch}\eta}{\operatorname{ch} y \operatorname{ch} x} = \frac{\sin x' \sin y'}{\sin \eta'}.$$

Таким образом (см. первое соотношение (30)),

$$d^2S = \frac{|J_2|\,dy\,d\eta}{\sin y'} = \frac{\sin x'\,dy\,d\eta}{\sin \eta'} = \frac{dy\,d\eta}{\sin\eta' \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x'}} =$$

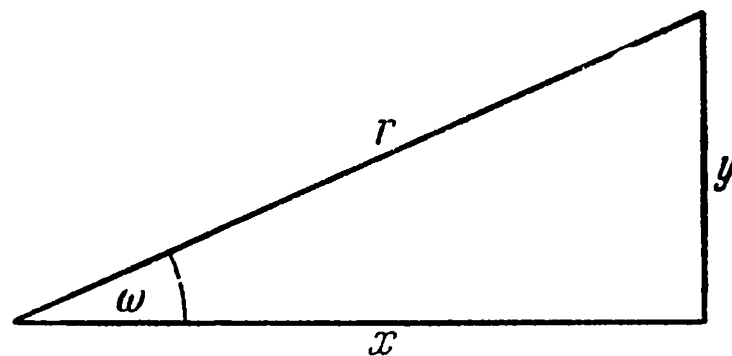
$$= \frac{dy\,d\eta}{\sin\eta' \sqrt{1 + \dfrac{\sin^2 y'}{\operatorname{tg}^2 \eta'}}} = \frac{dy\,d\eta}{\sqrt{\sin^2\eta' + \cos^2\eta' \sin^2 y'}} = \frac{dy\,d\eta}{\sqrt{1 - \cos^2\eta' \cos^2 y'}}.$$

Наконец, для получения (52) заменим элемент площади (37) через $\frac{|J_3|\,d\omega\,dr}{\sin y'}$, где J_3 — якобиан $\frac{\partial(x, y)}{\partial(\omega, r)}$. Переход от x, y к полярным координатам ω, r дается формулами [см. черт. 64 и соотношения (4), (3)]

$$\cos x' = \cos\omega \cos r', \quad \operatorname{ctg} y' = \sin\omega \operatorname{ctg} r',$$

или

$$\operatorname{th} x = \cos\omega \operatorname{th} r, \quad \operatorname{sh} y = \sin\omega \operatorname{sh} r.$$



Черт. 64

Отсюда находим значение J_3:

$$J_3 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \omega} & \dfrac{\partial x}{\partial r} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \omega} & \dfrac{\partial y}{\partial r} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\sin\omega \operatorname{th} r \operatorname{ch}^2 x & \dfrac{\cos\omega \operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{ch}^2 r} \\ \dfrac{\cos\omega \operatorname{sh} r}{\operatorname{ch} y} & \dfrac{\sin\omega \operatorname{ch} r}{\operatorname{ch} y} \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{\operatorname{sh} r \operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{ch} y} \cdot \left[\sin^2\omega + \frac{\cos^2\omega}{\operatorname{ch}^2 r}\right] = -\frac{\operatorname{ctg} r' \sin y'}{\sin^2 x'} \cdot [\sin^2\omega + \cos^2\omega \sin^2 r'] =$$

$$= -\frac{\operatorname{ctg} r' \sin y'}{\sin^2 x'}[1 - \cos^2\omega \cos^2 r'] = -\frac{\operatorname{ctg} r' \sin y'}{\sin^2 x'} \cdot (1 - \cos^2 x') =$$

$$= -\operatorname{ctg} r' \sin y'.$$

Таким образом,

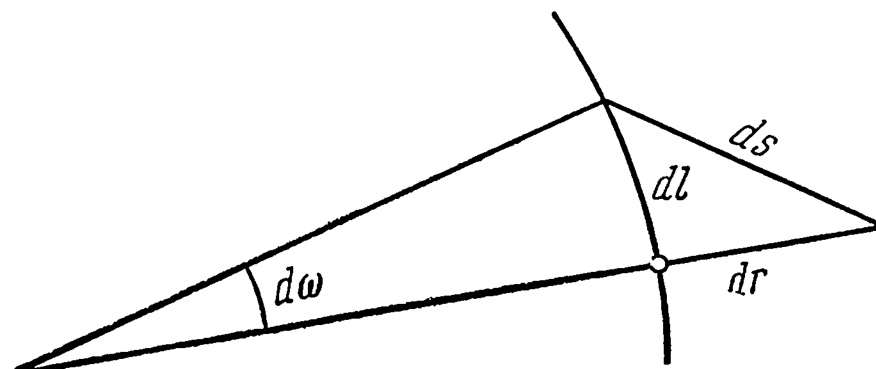
$$d^2S = \frac{|J_3|\,d\omega\,dr}{\sin y'} = \operatorname{ctg} r'\,d\omega\,dr^*.$$

Те же формулы (50), (51), (52) можно получить также, преобразуя выражение (36) линейного элемента или исходя из геометрических соображений, подобных тем, которые применялись при выводе соотношения (37). Так, например, из (49) имеем (черт. 65) $dl = \operatorname{ctg} r' d\omega$ и (вследствие ортогональности линий $\omega = \text{const}$ и $r = \text{const}$)

$$ds^2 = dr^2 + dl^2 = dr^2 + \operatorname{ctg}^2 r' d\omega^2,$$

откуда найдем элемент площади в полярных координатах:

$$d^2S = \operatorname{ctg} r'\,d\omega\,dr.$$



Черт. 65

[82] Пуассон в указанной Лобачевским работе рассматривает интеграл, распространенный по поверхности сферы

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(p\cos\theta)\sin\theta\,d\varphi\,d\theta = 2\pi\int_0^{\pi} f(p\cos\theta)\sin\theta\,d\theta,$$

где φ — долгота, θ — дополнение к широте, а p — постоянная.

Полагая $f(x) = F'(x)$ и $p = \lambda$ и распространяя интеграл на полусферу, мы получим соотношение

$$\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} F'(\lambda\cos\theta)\sin\theta\,d\varphi\,d\theta = -\frac{\pi}{\lambda}F(\lambda\cos\theta)\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{\lambda}[F(\lambda) - F(-\lambda)].$$

Если в формуле [56а] на стр. 344 положить $c = i\theta$ и $B = \varphi$, то

$$\operatorname{ctg} c' = i\sin\theta,$$

$$\frac{1}{\sin c'} = \cos\theta,$$

и соотношение [56а] принимает вид

$$\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} F'(\lambda\cos\theta)\sin\theta\,d\varphi\,d\theta = \frac{\pi}{\lambda}F(\lambda),$$

---

* В оригинале перед правой частью формулы (51) стоит знак «минус», что неправильно, так как при преобразовании выражения для элемента площади якобиан берется по абсолютной величине.

в котором оно совпадает с вышеприведенной формулой при условии замены верхнего предела ∞ через π и $F(\lambda)$ через $F(\lambda)-F(-\lambda)$. При условии же $F(-\lambda)=0$ правые части обеих формул совпадают и без этой замены.

Что касается ссылки на интеграл (68), то тут Лобачевский имеет в виду прием Пуассона, который преобразует переменные в вышеприведенном интеграле путем перехода к произвольным географическим координатам, аналогично тому переходу, с помощью которого (68) получается из [56а].

[83] Координата z есть расстояние точки от плоскости XOY, y есть расстояние проекции этой точки на плоскость XOY от оси OX, а x есть расстояние ее проекции на ось OX от начала координат. Поверхность $z=\text{const}$ есть эквидистантная поверхность с базой XOY; поверхность $y=\text{const}$ — цилиндрическая с образующими, перпендикулярными к плоскости XOY, и с направляющей — эквидистантной кривой, расположенной в плоскости XOY и имеющей OX своей базой; наконец, поверхность $x=\text{const}$ — плоскость, перпендикулярная к оси OX.

[84] Дифференцируя соотношения [74б] по φ, ψ, получаем

$$\frac{\partial x'}{\partial\varphi}=-\frac{\cos r'\sin\psi\cos\varphi}{\sin x'};\quad \frac{\partial y'}{\partial\psi}=\sin\psi\operatorname{ctg}r'\sin^2 y';\quad \frac{\partial y'}{\partial\varphi}=0,$$

откуда

$$J=\frac{\partial(x',y')}{\partial(\varphi,\psi)}=\frac{\partial x'}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial y'}{\partial\psi}=-\frac{\cos r'\operatorname{ctg}r'\sin^2 y'\sin^2\psi\cos\varphi}{\sin x'}.$$

Далее,

$$\frac{\sin y'}{\sqrt{\sin^2 x'\sin^2 y'-\sin^2 r'}}=\frac{1}{\sqrt{\sin^2 x'-\dfrac{\sin^2 r'}{\sin^2 y'}}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 r'\sin^2\psi\sin^2\varphi-\sin^2 r'(1+\cos^2\psi\operatorname{ctg}^2 r')}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\cos^2 r'-\cos^2 r'\sin^2\psi\sin^2\varphi-\cos^2\psi\cos^2 r'}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\cos^2 r'\sin^2\psi-\cos^2 r'\sin^2\psi\sin^2\varphi}}=\frac{1}{\sqrt{\cos^2 r'\sin^2\psi\cos^2\varphi}}=$$

$$=\frac{1}{\cos r'\sin\psi\cos\varphi},\qquad (*)$$

и, кроме того,

$$\sin^2 y'=\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 y'}=\frac{1}{1+\cos^2\psi\operatorname{ctg}^2 r'}=\frac{\sin^2 r'}{1-\cos^2 r'+\cos^2\psi\cos^2 r'}=$$

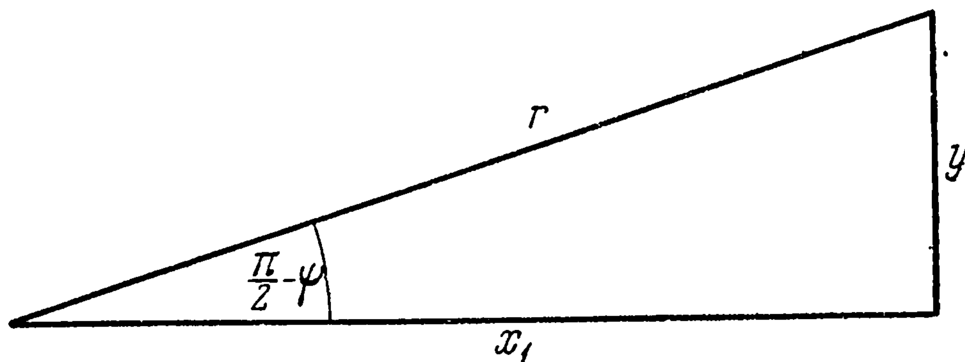
$$=\frac{\sin^2 r'}{1-\cos^2 r'\sin^2\psi}.\qquad (**)$$

$$\sin x'=\sqrt{1-\cos^2 x'}=\sqrt{1-\cos^2 r'\sin^2\psi\sin^2\varphi}.\qquad (***)$$

Подставляя в [74а] вместо $dx'\,dy'$ выражение $|J|\,d\varphi\,d\psi$ и применяя соотношение (*), получим

$$d^2S = \frac{\cos^2 r'}{\sin r'}\cdot \sin\psi\sin^2 y'\sin x'\,d\varphi\,d\psi,$$

а подставляя сюда вместо $\sin^2 y'$ и $\sin x'$ их значения из (**), (***), получим [74в]. В оригинале перед правой частью формулы [74в] стоит знак «минус», т. е. якобиан J учтен вместе со знаком, а не по абсолютной величине.



Черт. 66

Для вывода соотношения (75) заметим, что каждой точке (x, y), лежащей на сфере радиуса r и имеющей положительные координаты, однозначно соответствует точка (φ, ψ), лежащая в квадрате $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$, $0<\psi<\frac{\pi}{2}$. В самом деле, $\cos\psi=\frac{\operatorname{tg} r'}{\operatorname{tg} y'}<1$ (так как $y<r$), благодаря чему однозначно определяется значение ψ, заключенное между 0 и $\frac{\pi}{2}$. Далее, в прямоугольном треугольнике с катетами x, y гипотенуза меньше, чем r (черт. 4д на стр. 355). Поэтому в прямоугольном треугольнике с гипотенузой r и катетом y второй катет x_1 больше, чем x (черт. 66). Угол α, противолежащий катету y в этом треугольнике, определяется в силу [6а] соотношением $\sin\alpha=\operatorname{tg} r'\operatorname{ctg} y'$, т. е. равен $\frac{\pi}{2}-\psi$ [см. [74б]]. Согласно (4) имеем: $\cos r'\cos\alpha=\cos x_1'$ или $\cos r'\sin\psi = \cos x_1' > \cos x'$, откуда

$$\sin\varphi=\frac{\cos x'}{\cos r'\sin\psi}<1.$$

Таким образом, однозначно определяется значение φ, заключенное между 0 и $\frac{\pi}{2}$. Итак, каждой точке, лежащей на сфере и имеющей положительные координаты, соответствует точка квадрата $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$; $0<\psi<\frac{\pi}{2}$. Обратное очевидно. Следовательно, для получения поверхности

одного октанта сферы нужно интегрировать выражение [74в] по φ и ψ от 0 до $\frac{\pi}{2}$. Это и дает формулу (75).

[85] Значительно проще можно прийти к той же формуле, применив к (82) преобразование, аналогичное тому, которое Лобачевский производит в «Применении воображаемой геометрии» *:

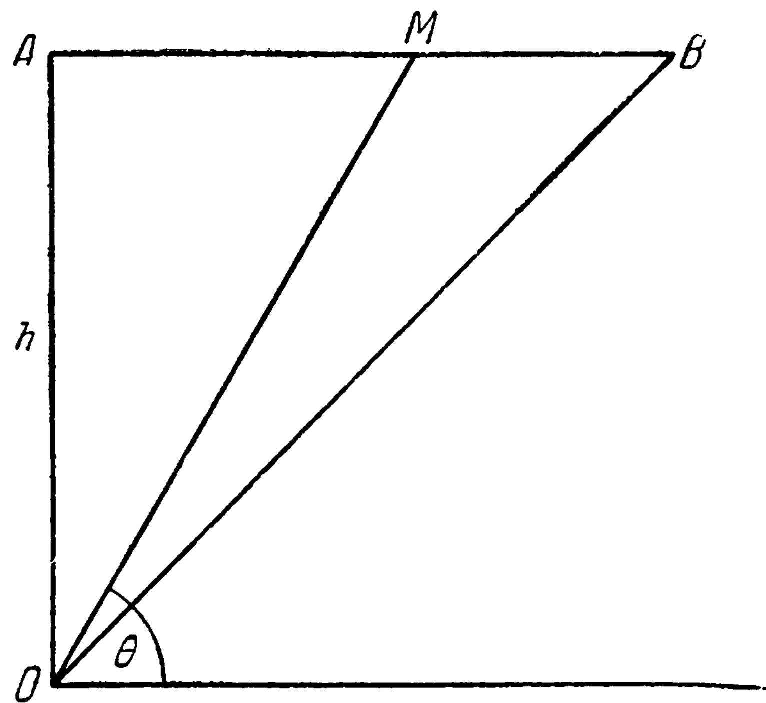
$$2\frac{dP}{d\omega}=\int\left[\frac{\cos r'\cos\theta\,d\theta}{\sin^2 r'}+dr\sin\theta-d(r\sin\theta)\right]=$$

$$=\int\left[\frac{\cos r'\cos\theta\,d\theta-dr'\sin r'\sin\theta}{\sin^2 r'}-d(r\sin\theta)\right]$$

или

$$2\frac{dP}{d\omega}=\int\left[\frac{d(\cos r'\sin\theta)}{\sin^2 r'}-d(r\sin\theta)\right]. \qquad (*)$$

Поместив полюс в вершину O конуса и взяв плоскость XOY попрежнему перпендикулярно к высоте $h=OA$, мы получим прямоугольный треугольник OAB с переменной гипотенузой $c=OB$, которая совпадает с образующей конуса, и прямоугольный треугольник OAM с гипотенузой $r=OM$, равной радиусу-вектору произвольной точки основания конуса (черт. 67). Для этого треугольника мы будем иметь согласно (4): $\cos r'\sin\theta = \cos h' =$ $=\text{const}$. Таким образом,



Черт. 67

$$2\frac{dP}{d\omega}=-\int d(r\sin\theta)=-[r]_c^h\,[\sin\theta]_{\frac{\pi}{2}-\varphi}^{\frac{\pi}{2}}=-h+c\cos\varphi.$$

[86] Этот интеграл проще вычислить следующим образом. Вспоминая, что соотношение (87) получилось из [86b], мы найдем

$$\frac{r\sin^2 h'\cos h'}{2\cos r'}\int\limits_{\rho'}^{\frac{1}{2}\pi}\frac{dx'\cos y'\sin^2 x'}{1-\sin^2 h'\sin^2 x'}=-\int\limits_{\varphi}^{0}\frac{r}{2}\sin\theta\,d\omega=\frac{r}{2}\int\limits_{0}^{\varphi}d\omega\sin\theta.$$

* Н. И. Лобачевский, Полн. собр. соч., т. III, Гостехиздат, 1948, стр. 203—204.

Рассмотрим сферический треугольник, высекаемый изображенной на черт. 7а пирамидой на сфере с центром в точке O. Его стороны равны ϑ, φ, ω; против первых двух из этих сторон лежат углы ψ, $\frac{1}{2}\pi$; угол против третьей стороны обозначим через η. Пусть, далее, прямолинейный треугольник со сторонами p, q, r и углами P, Q, $\frac{\pi}{2}$ выбран так, что соответствующий ему сферический треугольник, т. е. (см. [20]) треугольник со сторонами r', P, q' и углами против них p', $\frac{\pi}{2}-Q$, $\frac{\pi}{2}$, совпадает с рассмотренным выше сферическим треугольником:

$$r'=\vartheta,\ P=\omega,\ q'=\varphi,\ p'=\psi,\ \frac{\pi}{2}-Q=\eta.$$

Тогда соотношение (*) в сноске △ на стр. 318—319 дает

$$-d\eta=\cos\varphi\, d\psi-\sin\theta\, d\omega,$$

после чего рассматриваемый интеграл принимает вид

$$\frac{r}{2}\int_0^{\varphi}\sin\theta\, d\omega=\frac{r}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\eta+\frac{r}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\cos\varphi\, d\psi=\frac{\pi r}{4}(1-\cos\varphi).$$

Подставляя найденное значение в (90) и заменяя P его значением (89), получим формулу [90а].

[87] Интеграл (92) легко получить следующим путем. Обозначим углы ACO, ABO, ABC через μ, λ, $\varkappa$ (черт. 7а). Согласно формуле (*) сноски * на стр. 318—319 имеем (h постоянно) $d\omega=-\sin p'\, d\mu$. Отсюда получаем

$$\int_{\lambda}^{\frac{\pi}{2}}y\, d\mu=-\int_{\varphi}^{0}\frac{y\,d\omega}{\sin p'}=\cos h'\int_{\rho'}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx'\ln\operatorname{ctg}\frac{1}{2}y'}{1-\sin^2 h'\sin^2 x'}=\frac{\pi(r-h)}{2}\qquad(*)$$

(см. сноску * на стр. 377 и формулу [90а]).

Из формул (5) и [6а] имеем

$$\operatorname{ctg}\mu=\frac{\operatorname{ctg}x'}{\cos h'},\quad \operatorname{tg}\lambda=\cos h'\operatorname{tg}\rho',\quad \sin\varkappa=\operatorname{tg}\rho'\operatorname{ctg}x',$$

откуда $\sin\varkappa=\operatorname{tg}\lambda\operatorname{ctg}\mu$. Вводя новое переменное $\zeta=\frac{\pi}{2}-\varkappa$ (у Лобачевского вместо ζ стоит φ), получим $\cos\zeta=\operatorname{tg}\lambda\operatorname{ctg}\mu$, после чего

$$d\mu=\frac{\operatorname{ctg}\lambda\sin\zeta\, d\zeta}{\frac{1}{\sin^2\mu}}=\frac{\operatorname{ctg}\lambda\sin\zeta\, d\zeta}{1+\frac{\cos^2\zeta}{\operatorname{tg}^2\lambda}}=\frac{\cos\lambda\sin\lambda\sin\zeta\, d\zeta}{\sin^2\lambda+\cos^2\lambda\cos^2\zeta}=$$

$$=\cos\lambda\sin\lambda\,\frac{\sin\zeta\, d\zeta}{1-\cos^2\lambda\sin^2\zeta}.$$

Подставляя в (*) это значение $d\mu$ (когда μ меняется от λ до $\frac{\pi}{2}$, $\varkappa$ меняется от $\frac{\pi}{2}$ до нуля, а потому ζ меняется от 0 до $\frac{\pi}{2}$), а вместо y и $r-h$ — приведенные в тексте Лобачевского выражения:

$$y=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\cos y'}{1-\cos y'}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\cos\rho'\sin\zeta}{1-\cos\rho'\sin\zeta},$$

$$r-h=\ln\left(\operatorname{ctg}\frac{1}{2}r'\operatorname{tg}\frac{1}{2}h'\right)=\ln\frac{\cos\frac{1}{2}(\rho'-\lambda)}{\sin\frac{1}{2}(\rho'+\lambda)},$$

получим соотношение (92).

[88] Таким образом, проведенные на стр. 385—386 вычисления связаны с нахождением интеграла вида

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{1-z\sin^2\varphi},$$

где z — комплексное число. Подстановка $\operatorname{ctg}\varphi=\zeta$ приводит этот интеграл к виду

$$I=\int_0^{\infty}\frac{d\zeta}{(1-z)+\zeta^2}$$

(интегрирование по положительной вещественной полупрямой). Считая, что $1-z$ не есть отрицательное действительное число, обозначим через α то значение корня $\sqrt{1-z}$, которое имеет положительную вещественную часть. Тогда

$$I=\frac{1}{\alpha}\int_0^{\infty}\frac{d\left(\frac{\zeta}{\alpha}\right)}{1+\left(\frac{\zeta}{\alpha}\right)^2}=\frac{1}{\alpha}\int_0^{\infty}d\left(\operatorname{arctg}\frac{\zeta}{\alpha}\right).$$

Так как $\frac{\zeta}{\alpha}$ меняется вдоль луча, расположенного в *правой* полуплоскости, то последний интеграл равен $\frac{\pi}{2}$, т. е. $I=\frac{\pi}{2\alpha}$. Итак,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{1-z\sin^2\varphi}=\frac{\pi}{2\sqrt{1-z}},$$

где выбирается то значение корня, которое имеет положительную вещественную часть.

[89] Из этих формул для a, b, u легко находим

$$x = \sqrt{\frac{B-1}{B+1}} \cdot \frac{e^{2u}-1}{e^{2u}+1} = \frac{1}{b}\operatorname{th} u; \quad dx = \frac{du}{b \operatorname{ch}^2 u};$$

$$\ln\frac{1+bx}{1-bx} = \ln\frac{1+\operatorname{th} u}{1-\operatorname{th} u} = \ln\frac{\operatorname{ch} u + \operatorname{sh} u}{\operatorname{ch} u - \operatorname{sh} u} = 2u;$$

$$1 - ax^2 = 1 - \frac{A-1}{A+1} b^2x^2 = 1 - \frac{A-1}{A+1}\operatorname{th}^2 u =$$

$$= \frac{(A+1)\operatorname{ch}^2 u - (A-1)\operatorname{sh}^2 u}{(A+1)\operatorname{ch}^2 u} = \frac{2A + e^{2u} + e^{-2u}}{2(A+1)\operatorname{ch}^2 u};$$

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{b^2}\operatorname{th}^2 u} = \sqrt{\frac{(B+1)\operatorname{ch}^2 u - (B-1)\operatorname{sh}^2 u}{(B+1)\operatorname{ch}^2 u}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2B + e^{2u} + e^{-2u}}{2(B+1)\operatorname{ch}^2 u}}.$$

Далее

$$\sqrt{1-a} = \sqrt{\frac{2(B-A)}{(B-1)(A+1)}}.$$

Наконец, обозначая величину

$$\frac{\sqrt{B-1} - \sqrt{-2}}{(B-1)\sqrt{A+1}}$$

через σ, получаем

$$b\sqrt{a} = \sqrt{\frac{B+1}{B-1}} \cdot \sqrt{\frac{B+1}{B-1} \cdot \frac{A-1}{A+1}} = \sigma \cdot \frac{(B+1)\sqrt{A-1}}{\sqrt{B-1} - \sqrt{-2}};$$

$$(1-\sqrt{1-a})(1-\sqrt{1-b^2}) = \left[1 - \sqrt{\frac{2(B-A)}{(B-1)(A+1)}}\right]\left[1 - \sqrt{\frac{-2}{B-1}}\right] =$$

$$= \sigma\left[\sqrt{(B-1)(A+1)} - \sqrt{2B-2A}\right].$$

Подставляя эти значения в (94), непосредственно получаем формулу (95).

[90] Вычисления, совершенно аналогичные тем, которые проведены в сноске * на стр. 387 (с заменой гиперболических функций тригонометрическими *, дают для интеграла (97) значение

$$I = \frac{\pi}{4i \sin\alpha} \ln \frac{\cos\frac{\alpha}{2} + i\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2} - i\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\pi}{4i\sin\alpha} \ln e^{i\alpha}.$$

* Можно просто заменить в этой сноске a через $i\alpha$.

Возникает вопрос о том, какое значение логарифма соответствует значению интеграла I? Для α, удовлетворяющего условию $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, его можно решить, требуя, чтобы при $\alpha\to 0$ предел интеграла I совпадал с пределом интеграла (96) при $a\to 0$, и в этом случае мы придем к формуле (97).

Установив значение интеграла I для острого угла α, мы должны принять, что для α, принадлежащего промежутку $\left[\frac{\pi}{2},\ \pi\right]$,

$$\int_0^\infty \frac{u\,du\,(e^u-e^{-u})}{e^{2u}+e^{-2u}+2\cos 2(\pi-\alpha)}=\frac{\pi(\pi-\alpha)}{4\sin(\pi-\alpha)}$$

или

$$\int_0^\infty \frac{u\,du\,(e^u-e^{-u})}{e^{2u}+e^{-2u}+2\cos 2\alpha}=\frac{\pi(\pi-\alpha)}{4\sin\alpha}. \qquad (*)$$

Таким образом, интеграл I выражается формулой (97) при $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ и отличной от нее формулой (*) при $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

На этом различии основана критика Остроградского формулы (47) в сочинении Лобачевского «О началах геометрии», которая совпадает с формулой (97) «Воображаемой геометрии».

При этом в рапорте Конференции Академии наук Остроградский говорит о «неверном» (fausse) интеграле у Лобачевского, а в приложении к этому рапорту называет интеграл (47) только «неточным» (inexacte)*. Очевидно, что эта «неточность» сводится к отсутствию указания $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

[91] Произведя в интеграле (98) замену $k=\sin^2\alpha$, $a=1$ и полагая

$$f(x)=\frac{x^n-1}{x-1}=x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+1,$$

мы получим

$$\lambda=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

---

* Рапорт Остроградского Конференции Академии наук вместе с приложением (запиской о двух интегралах Лобачевского) помещен в сборнике «Материалы для биографии Н. И. Лобачевского» под редакцией Л. Б. Модзалевского, Изд-во АН СССР, М. — Л., 1948, на стр. 332—337 под № 354.

и, далее,

$$I=\int\limits_{-1}^{+1}\frac{x\,dx}{(1-x^2\sin^2\alpha)\sqrt{1-x^2}}\ln\frac{x^n-1}{x-1}=\frac{2\pi}{\sin 2\alpha}\sum_{m=1}^{m=n-1}\ln\frac{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}A_m}{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}A_m},$$

или, комбинируя попарно слагаемые, соответствующие комплексно сопряженным корням:

$$I=\frac{2\pi}{\sin 2\alpha}\sum_{m=1}^{\frac{n-1}{2}}\ln\frac{1-2M_m\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+N_m\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+2M_m\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+N_m\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},$$

где

$$M_m=\frac{1}{2}(A_m+\overline{A}_m)=\mathrm{R}(A_m);\quad N_m=A_m\overline{A}_m=|A_m|^2.$$

Но

$$A_m=\alpha_m+\sqrt{\alpha_m^2-1}=e^{i\varphi_m}+\sqrt{\cos 2\varphi_m+i\sin 2\varphi_m-1}=$$
$$=e^{i\varphi_m}+\sqrt{2\sin\varphi_m}\cdot\sqrt{e^{i\left(\varphi_m+\frac{\pi}{2}\right)}},$$

где φ_m есть аргумент корня из единицы, откуда следует, что

$$\mathrm{R}(A_m)=\cos\varphi_m+\sqrt{2\sin\varphi_m}\cos\left(\frac{\varphi_m}{2}+\frac{\pi}{4}\right);$$

$$|A_m|^2=\left[\cos\varphi_m+\sqrt{2\sin\varphi_m}\cos\left(\frac{\varphi_m}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]^2+$$
$$+\left[\sin\varphi_m+\sqrt{2\sin\varphi_m}\sin\left(\frac{\varphi_m}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]^2=1+2\sin\varphi_m+$$
$$+2\sqrt{2\sin\varphi_m}\left[\cos\varphi_m\cos\left(\frac{\varphi_m}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\varphi_m\sin\left(\frac{\varphi_m}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]=$$
$$=1+2\sin\varphi_m+2\sqrt{2\sin\varphi_m}\cos\left(\frac{\varphi_m}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=$$
$$=1+2\sin\varphi_m+2\sqrt{2\sin\varphi_m}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi_m}{2}\right).$$

Следует отметить, что использованные значения для A_m не согласуются с правилом знаков при извлечении корня, указанном в сноске$^\diamond$ на стр. 388—389.

[92] Произведение под знаком логарифма правой части (98) имеет ви

$$z=\prod_{m=1}^{n}\frac{1-\lambda A_m}{1+\lambda A_m}=(-1)^n\prod_{m=1}^{n}\frac{\frac{1}{\lambda}-A_m}{-\frac{1}{\lambda}-A_m},$$

но $$\frac{1}{A_m}=\frac{a}{\alpha_m+\sqrt{\alpha_m^2-a^2}}=\frac{\alpha_m-\sqrt{\alpha_m^2-a^2}}{a}\text{, откуда}$$

$$A_m+\frac{1}{A_m}=2\frac{\alpha_m}{a}.$$

Вводя функцию

$$\varphi(x)=c\prod_{m=1}^{n}(x-A_m),$$

мы получим

$$z=(-1)^n\frac{\varphi\left(\frac{1}{\lambda}\right)}{\varphi\left(-\frac{1}{\lambda}\right)}=(-1)^n\frac{\varphi\left(\sqrt{\frac{1}{k}}+\sqrt{\frac{1}{k}-1}\right)}{\varphi\left(-\sqrt{\frac{1}{k}}-\sqrt{\frac{1}{k}-1}\right)}.$$

Но

$$\varphi(x)\varphi\left(\frac{1}{x}\right)=c^2\prod_{m=1}^{n}(x-A_m)\left(\frac{1}{x}-A_m\right)=$$

$$=c^2\prod\left[1-A_m\left(\frac{1}{x}+x\right)+A_m^2\right]=$$

$$=c^2\prod(-A_m)\prod\left[\frac{1}{x}+x-\left(A_m+\frac{1}{A_m}\right)\right]=$$

$$=c^2\prod(-A_m)\prod\left(\frac{1}{x}+x-2\frac{\alpha_m}{a}\right)=$$

$$=c^2\prod(-A_m)\left(\frac{2}{a}\right)^n\prod\left[\frac{a}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)-\alpha_m\right]=$$

$$=c^2 f\left[\frac{a}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right],$$

где $f(x)=\prod_{m=1}^{n}(x-\alpha_m)$ есть подинтегральная функция (98), причем можно положить $c_1=1$ за счет произвола в выборе c.

[93] Интеграл (91) или, что то же самое, [90a] после умножения на $\cos h$ равносилен, как мы видели в примечании [87], интегралу (обозначения см. на черт. 7а):

$$\int_{\lambda}^{\frac{\pi}{2}} y\,d\mu=I_1.$$

Согласно (1), (5), (4) имеем

$\sin x' \sin y' = \sin \rho'$; $\cos h' = \operatorname{ctg} x' \operatorname{tg} \mu$; $\cos \rho' = \cos \lambda \cos r'$; из первых двух формул следует, что

$$\operatorname{ctg} \mu = \frac{\sqrt{\sin^2 y' - \sin^2 \rho'}}{\sin \rho' \cos h'}.$$

Сравнивая эти формулы с формулами [104a] (и принимая во внимание, что в последних опущены штрихи), мы видим, что

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \mu; \quad \gamma = \frac{\pi}{2} - \lambda$$

и

$$I_1 = \int_0^\gamma y\, d\varphi = [y]_\rho^0 [\varphi]_0^\gamma - \int_0^\gamma \varphi\, dy,$$

причем проинтегрированная часть обращается в нуль, так как либо $\varphi = 0$, либо $\mu = \lambda$, что имеет место при $y = 0$. Но

$$\frac{1}{\sin y'} = \operatorname{ch} y = \frac{\sin x'}{\sin \rho'},$$

откуда

$$dy = \frac{\cos x'\, dx'}{\sin \rho' \sqrt{\frac{\sin^2 x'}{\sin^2 \rho'} - 1}} = -\frac{\operatorname{ctg} x'\, d \operatorname{ctg} x'}{\sin \rho' \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \rho' - \operatorname{ctg}^2 x'}\,(1 + \operatorname{ctg}^2 x')} =$$

$$= \frac{\cos^2 h' \operatorname{ctg} \mu\, d\mu}{\sin \rho' \sin^2 \mu \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \rho' - \cos^2 h' \operatorname{ctg}^2 \mu}\,(1 + \cos^2 h' \operatorname{ctg}^2 \mu)} =$$

$$= \frac{\cos h' \cos \mu\, d\mu}{\sin \rho' \sqrt{\frac{\operatorname{ctg}^2 \rho'}{\cos^2 h'} \sin^2 \mu - \cos^2 \mu}\,(\sin^2 \mu + \cos^2 h' \cos^2 \mu)}.$$

Далее, согласно (5) имеем

$$\cos h' = \operatorname{ctg} \rho' \operatorname{tg} \lambda,$$

вследствие чего

$$dy = \frac{\cos h' \cos \mu\, d\mu}{\sin \rho' \sqrt{\operatorname{ctg}^2 \lambda (1 - \cos^2 \mu) - \cos^2 \mu}\,[\sin^2 \mu + (1 - \sin^2 h') \cos^2 \mu]} =$$

$$= \frac{\cos h' \sin \lambda \cos \mu\, d\mu}{\sin \rho' \sqrt{\cos^2 \lambda - \cos^2 \mu}\,(1 - \sin^2 h' \cos^2 \mu)},$$

так что

$$I_1 = \frac{\cos h' \cos \gamma}{\sin \rho'} \int_0^\gamma \frac{\varphi \sin \varphi\, d\varphi}{\sqrt{\sin^2 \gamma - \sin^2 \varphi}\,(1 - \sin^2 h' \sin^2 \varphi)},$$

где

$$\frac{\cos \gamma}{\sin \rho'} = \cos \gamma \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \rho'} = \cos \gamma \sqrt{1 + \cos^2 h' \operatorname{tg}^2 \gamma} = \sqrt{1 - \sin^2 h' \sin^2 \gamma}.$$

С другой стороны,

$$I_1 = \frac{\pi}{2}(r - h).$$

Наконец, согласно [6а] имеем

$$r = \operatorname{Arsh}(\operatorname{ctg} r') = \operatorname{Arsh}\left(\frac{\operatorname{ctg} h'}{\sin\lambda}\right) = \operatorname{Arsh}\frac{\operatorname{ctg} h'}{\cos\gamma} =$$

$$= \ln\left(\frac{\cos h' + \sqrt{\cos^2 h' + \cos^2\gamma \sin^2 h'}}{\cos\gamma \sin h'}\right) =$$

$$= \ln\frac{\cos h' + \sqrt{1 - \sin^2\gamma \sin^2 h'}}{\cos\gamma \sin h'},$$

где

$$h = \operatorname{Arth}(\cos h') = \frac{1}{2}\ln\frac{1 + \cos h'}{1 - \cos h'} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{(1 + \cos h')^2}{\sin^2 h'} = \ln\frac{2\cos^2\frac{h'}{2}}{\sin h'}.$$

Сопоставляя полученные результаты, придем к (105).

[94] Подставляя в интеграл (112)

$$\omega = \frac{\omega_1}{2}; \quad \cos\alpha = \operatorname{tg}\frac{\alpha_1}{2}; \quad \cos\beta = \operatorname{tg}\frac{\beta_1}{2},$$

мы получим:

$$1 - \sin^2\alpha\cos^2\omega = 1 - \left(1 - \frac{1 - \cos\alpha_1}{1 + \cos\alpha_1}\right)\frac{1 + \cos\omega_1}{2} =$$

$$= \frac{1 - \cos\alpha_1\cos\omega_1}{1 + \cos\alpha_1} = \frac{1 - \cos\alpha_1\cos\omega_1}{2\cos^2\frac{\alpha_1}{2}}.$$

Преобразуя аналогичным образом второй множитель в знаменателе интеграла (112), мы получим:

$$I = \frac{1}{2}\cos^2\frac{\alpha_1}{2}\cos^2\frac{\beta_1}{2}\int_0^{\pi}\frac{\omega_1\, d\omega_1 \sin\omega_1}{(1 - \cos\alpha_1\cos\omega_1)(1 - \cos\beta_1\cos\omega_1)};$$

с другой стороны, правая часть принимает вид

$$\frac{\pi}{2\left(\operatorname{tg}^2\frac{\alpha_1}{2} - \operatorname{tg}^2\frac{\beta_1}{2}\right)}\ln\left(\frac{1 + \cos\alpha}{1 + \cos\beta}\right) =$$

$$= \frac{\pi\cos^2\frac{\alpha_1}{2}\cos^2\frac{\beta_1}{2}}{2\sin\frac{\alpha_1 + \beta_1}{2}\sin\frac{\alpha_1 - \beta_1}{2}}\ln\left(\frac{1 + \operatorname{tg}\frac{\alpha_1}{2}}{1 + \operatorname{tg}\frac{\beta_1}{2}}\right),$$

откуда и следует (113).

[95] Разбивая интеграл в правой части (125а) на два и делая замену переменных

$$u = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}x' - \frac{1}{2}\xi'; \quad v = \frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}\xi' - \frac{1}{4}\pi$$

в первом и втором соответственно получаем

$$\int\limits_{x'}^{\frac{\pi}{2}} y\,dx' = \int\limits_{u}^{\frac{\pi}{2}-\frac{\xi'}{2}} du \ln \operatorname{tg} u - \int\limits_{v}^{\frac{\xi'}{2}} dv \ln \operatorname{tg} v = \int\limits_{u}^{\frac{\pi}{2}-\frac{\xi'}{2}} du \ln \operatorname{tg} u - \int\limits_{v}^{\frac{\xi'}{2}} du \ln \operatorname{tg} u =$$

$$= \int\limits_{u}^{\frac{\pi}{2}-\frac{\xi'}{2}} du \ln \operatorname{tg} u + \int\limits_{\frac{\pi}{2}-\frac{\xi'}{2}}^{\frac{\xi'}{2}} du \ln \operatorname{tg} u + \int\limits_{\frac{\xi'}{2}}^{v} du \ln \operatorname{tg} u,$$

так как при замене $t = \frac{\pi}{2} - u$ добавленный интеграл

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}-\frac{\xi'}{2}}^{\frac{\xi'}{2}} du \ln \operatorname{tg} u = \int\limits_{\frac{\xi'}{2}}^{\frac{\pi}{2}-\frac{\xi'}{2}} dt \ln \operatorname{tg} t$$

и, следовательно, равен нулю. Таким образом,

$$\int\limits_{x'}^{\frac{\pi}{2}} y\,dx' = \int\limits_{u}^{v} du \ln \operatorname{tg} u.$$

Полагая $z = \ln \operatorname{tg} u$, мы будем иметь

$$u = \operatorname{arctg} e^z; \quad du = \frac{e^z\,dz}{1+e^{2z}}$$

и получим (125b).

[96] Этих трех положений *недостаточно* для измерения площадей многоугольников. В самом деле, если условимся обозначать площадь фигуры Δ через $S(\Delta)$, то величина $T(\Delta) = \frac{S(\Delta)}{1+S(\Delta)}$ удовлетворяет всем трем положениям Лобачевского и, однако же, не пропорциональна площади. Ниже Лобачевский неявно пользуется еще одним положением об *аддитивности* площади (см. сноску* на стр. 419). Достаточными для измерения площадей являются следующие два положения: *аддитивность* площади и ее *положительность*. Отсюда уже вытекают все три положения, указанные Лобачевским. Действительно, 1-е и 2-е положения очевидны. Покажем, что имеет место 3-е. Пусть стороны a, b, c треугольника ABC

меняются таким образом, что $r_1 < b < r_2$, $r_1 < c < r_2$ (r_i — постоянные), $a \to 0$*. Тогда произведение $\sin C \operatorname{tg} \Pi(c)$ не превосходит $\operatorname{tg} \Pi(r_1)$, т. е. ограничено, а $\operatorname{tg} \Pi(a) \to \infty$. Поэтому из соотношения $\sin C \operatorname{tg} \Pi(c) = \sin A \operatorname{tg} \Pi(a)$ [см. формулу (85) на стр. 295] вытекает, что $\sin A \to 0$, т. е. угол A стремится к нулю. Если сторона a настолько мала, что $\angle A < \frac{2\pi}{n}$, то, разбив круг радиуса r_2 на n секторов с центральными углами $\frac{2\pi}{n}$, мы сможем в каждом из них поместить треугольник, равный ABC. Таким образом, площадь треугольника ABC меньше $\frac{1}{n} S$, где S — площадь круга радиуса r_2 (или площадь многоугольника, содержащего этот круг). Так как число n может быть выбрано произвольно, то при $a \to 0$ площадь треугольника ABC имеет пределом нуль.

[97] В настоящем рассуждении, цель которого заключается в доказательстве теоремы «площадь треугольника определяется суммой его углов», Лобачевский допустил недосмотр, однако, не повлиявший на правильность окончательного заключения.

Если через α мы обозначим угол FAD (черт. 1 в тексте) при точке F в прямоугольном треугольнике FAD, так что

$$A + \alpha = \angle FAC,$$

то по формуле (71) на стр. 290 мы будем иметь

$$\cos \alpha = \frac{\cos \Pi(h)}{\cos \Pi\left(\frac{c}{2}\right)}.$$

Лобачевский пишет

$$\sin A = \frac{\cos \Pi(h)}{\cos \Pi\left(\frac{c}{2}\right)},$$

т. е. считает, что $\angle FAC = A + \alpha$ будет прямым. Но $\angle FAC$ острый (ибо в четырехугольнике Саккери $AFGC$ углы F и G прямые и потому остальные два угла острые). Таким образом, формула, приведенная в тексте, неверна. Однако утверждение: «... при сравнении площадей двух треугольников всегда можно полагать, что у них по одному боку равному...» верно.

---

* Т. е. две стороны остаются ограниченными и *не стремятся* к нулю, а третья стремится к нулю. Если *все* стороны треугольника беспредельно уменьшаются, то стремление его площади к нулю очевидно.

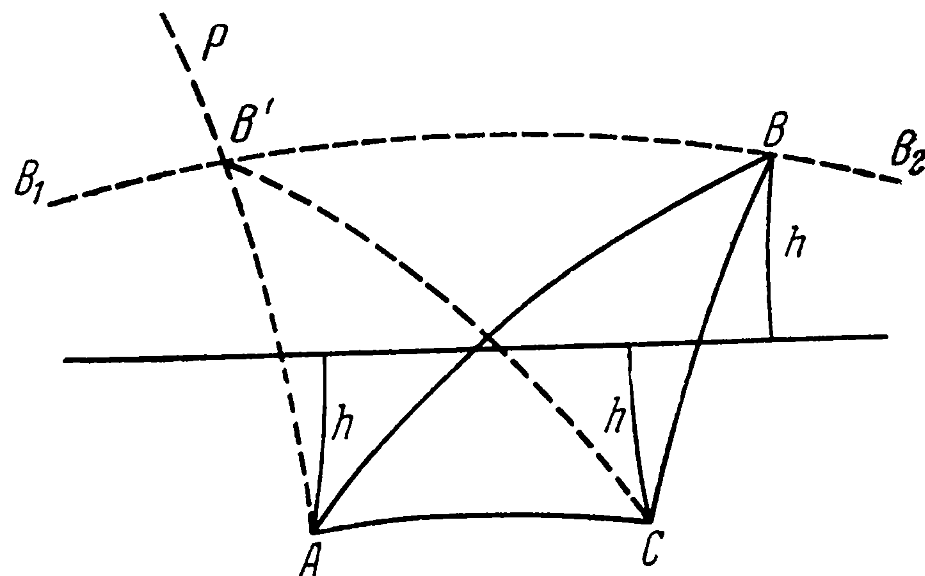
В самом деле, пусть ABC и $A'B'C'$ — два треугольника, в которых, для определенности $AB < A'B'$. Сохраняя обозначения черт. 1, проведем окружность радиуса $\frac{1}{2}A'B'$ с центром в точке A, и пусть D_1 — одна из точек пересечения этой окружности с прямой DE (черт. 68). Продолжим отрезок AD_1 на величину $D_1B_1 = AD_1$ и опустим из полученной точки B_1 перпендикуляр B_1I_1 на прямую DE. Прямоугольные треугольники

Черт. 68

AFD_1 и $B_1I_1D_1$ равны между собой (по гипотенузе $AD_1 = D_1B_1$ и острому углу $\angle AD_1F = \angle B_1D_1I_1$) и потому $B_1I_1 = AF = h$. Следовательно, точка B_1 лежит на эквидистанте, и потому треугольник AB_1C имеет ту же площадь и ту же сумму углов, что и треугольник ABC. Поэтому вместо ABC мы можем рассматривать треугольник AB_1C, у которого имеется с треугольником $A'B'C'$ равная сторона $AB_1 = A'B'$. Это и есть тот результат, который нужен Лобачевскому.

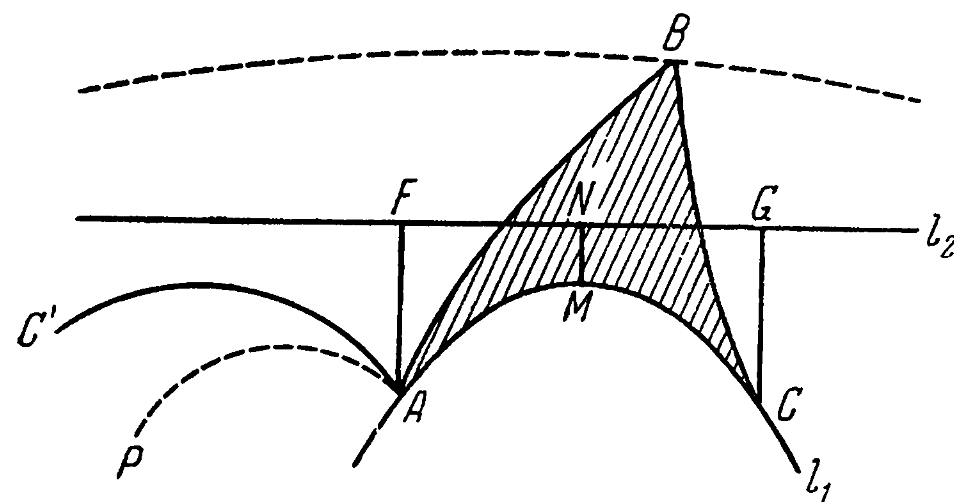
[98] Пусть B_1B_2 — геометрическое место вершин B^* треугольников AB^*C, равновеликих треугольнику ABC (черт. 69, этим геометрическим местом будет, как указано в сноске^△ на стр. 416, эквидистанта с базой DE). Для того чтобы построить равновеликий с ABC треугольник $AB'C$, имеющий прямой угол $B'AC$ при основании, необходимо, очевидно, восставить перпендикуляр AP к отрезку AC и найти его точку пересечения с эквидистантой. Однако этой точки пересечения может не существовать. В самом деле, пусть l_1 и l_2 — две прямые, имеющие обший перпендикуляр MN. Отложим на l_1 отрезки $AM = CM$ и из точек A и C опустим перпендикуляры $AF = CG = h$ на l_2 (черт. 70). Углы $\angle FAC = \angle GCA$ могут быть сделаны как угодно малыми, если выбрать отрезки $AM = CM$ до-

статочно большими. Мы выберем точки A и C таким образом, чтобы было $\angle FAC = \angle GCA < \frac{\pi}{4}$. По другую сторону прямой l_2 выберем точку B на расстоянии $BI = h$ и проведем через нее эквидистанту с базой l_2. В полученном треугольнике ABC перпендикуляр AP к основанию AC не пересекает эквидистанты. Действительно, пусть AC' — прямая, симметричная с AC относительно перпендикуляра AF. Тогда AC' (так же, как и симметричная ей прямая AC) не встречает прямой l_2 и образует с AC угол $\angle CAC' = 2\angle FAC < \frac{\pi}{2}$. Поэтому перпендикуляр AP к AC подавно не встречает прямой l_2 и тем более не пересекается с эквидистантой (которая расположена по другую сторону прямой l_2, чем точка A).



Черт. 69

Итак, утверждение, высказанное Лобачевским (и разъясненное в сноске $\triangle$ на стр. 419), вообще говоря, места не имеет. Однако нетрудно доказать предложение, которое позволит сделать рассуждения Лобачевского верными.

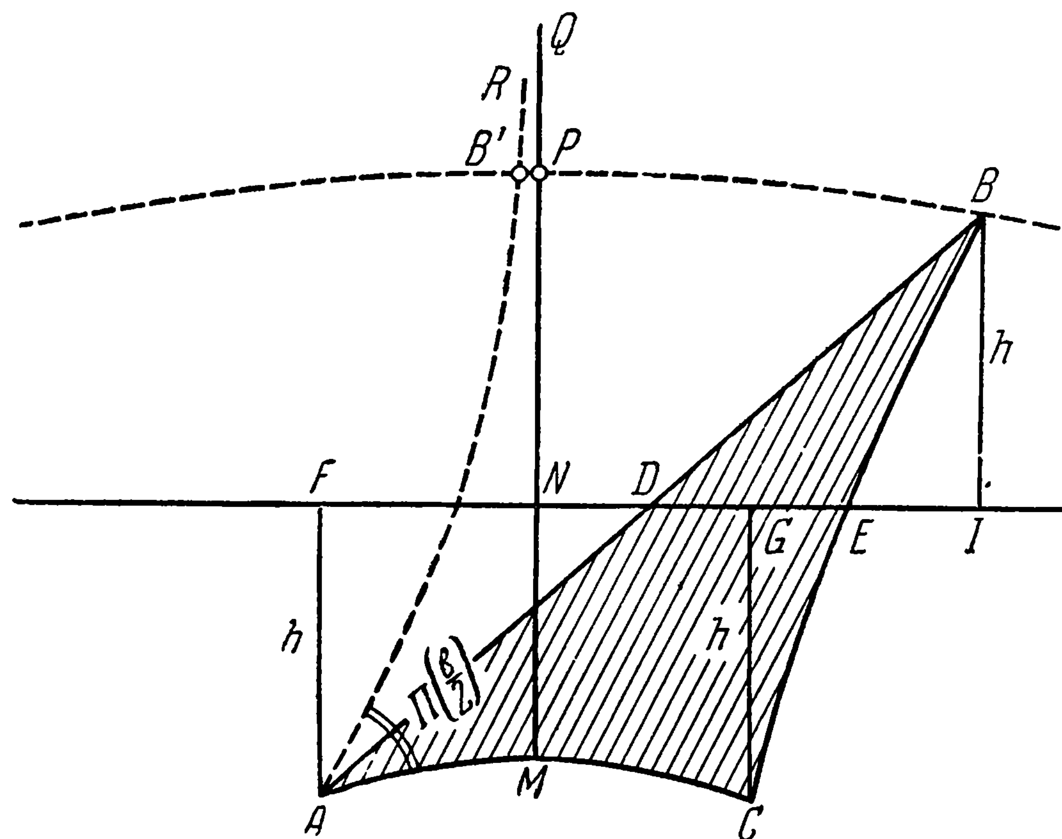


Черт. 70

Лемма. Пусть ABC — произвольный треугольник. Тогда существует треугольник $AB'C$ с тем же основанием $AC = b$, той же площадью и той же суммой углов, что и у треугольника ABC, и имеющий, кроме того, угол $B'AC$ при основании, равный $\Pi(\frac{b}{2})$.

Доказательство. Проведем прямую AR под углом $\angle CAR = \Pi(\frac{b}{2})$ к отрезку AC. Для доказательства леммы достаточно установить, что прямая AR пересекает эквидистанту (черт. 71). Заметим, что перпендикуляр MQ, восставленный к стороне AC в ее середине M, является средней линией четырехугольника Саккери $AFGC$ и потому пересекает прямую DE под прямым углом, а следовательно, пересекает в некоторой

точке P и эквидистанту. Так как $AM = \frac{b}{2}$, а угол CAR равен $\Pi(\frac{b}{2})$, то луч AR параллелен MQ. Следовательно, точки луча AR все ближе подходят к прямой MQ (примечание [67]), а потому на луче AR имеются точки, расположенные по другую сторону эквидистанты, чем точка A. Из этого вытекает, что AR пересекается с эквидистантой в некоторой точке B', что и требовалось доказать.



Черт. 71

Обратимся теперь к рассуждениям Лобачевского. Если ABC и $A'B'C'$ — два треугольника, имеющие одинаковую сумму углов, то мы можем без ограничения общности считать, что $AC = A'C'$ (см. примечание [97]) и $\angle BAC = \angle B'A'C'$ (см. лемму). Лобачевский ошибочно утверждает, что эти углы при основании можно всегда сделать прямыми. В этом нет необходимости: рассуждения Лобачевского остаются без перемены, хотя бы этот общий угол при основании и не был прямым. Действительно, наложим треугольник ABC на $A'B'C'$ так, чтобы вершина A совпала с A', а C — с C'. Тогда сторона AB пойдет по $A'B'$. Если бы при этом точка B не совпала с B', то образовался бы треугольник CBB', имеющий дефект, равный нулю (ибо суммы углов, а значит, и дефекты, треугольников ABC и $A'B'C'$ одинаковы, а дефект аддитивен — см. примечание [7]). Но существование треугольника с нулевым дефектом в геометрии Лобачевского невозможно. Следовательно, точка B совпадает с B' и потому площади треугольников ABC и $A'B'C'$ одинаковы. Итак, «площади двух треугольников равны, если в них суммы углов равны», как и утверждает Лобачевский.

[99] Итак, Лобачевский доказывает, что площади треугольников тогда и только тогда равны, когда в них одинаковы суммы углов (и следовательно, одинаковы дефекты). Заметим, что с самого начала можно было ***принять*** за площадь многоугольника его дефект (или величину, пропорциональную дефекту), ибо дефект положителен и аддитивен (примечание [7]), а следовательно, удовлетворяет и трем положениям, сформулированным Лобачевским на стр. 415 (см. примечание [96]). Рассуждения Лобачевского, проводимые ниже, носят характер *теоремы единственности*: только дефект (или пропорциональная ему величина — в зависимости от выбора единицы измерения площадей) удовлетворяет требованиям, которым подчинено понятие площади.

[100] Пусть a, b—катеты прямоугольного треугольника, а A и B—противолежащие им углы. Лобачевский вводит величины α и β по формулам

$$\Pi(a)+\Pi(\alpha)=\frac{\pi}{2},$$

$$\Pi(b)+\Pi(\beta)=\frac{\pi}{2}.$$

Пользуясь этими формулами и соотношениями

$$\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\Pi(x)=e^{x},\quad \sin\Pi(a)=\frac{\sin B}{\cos A},\quad \sin\Pi(b)=\frac{\sin A}{\cos B}$$

(см. формулу (72) на стр. 290), имеем

$$\operatorname{ctg}^2\frac{1}{2}\Pi(\alpha+\beta)=e^{2(\alpha+\beta)}=e^{2\alpha}\cdot e^{2\beta}=\operatorname{ctg}^2\frac{1}{2}\Pi(\alpha)\cdot\operatorname{ctg}^2\frac{1}{2}\Pi(\beta)=$$

$$=\frac{1+\cos\Pi(\alpha)}{1-\cos\Pi(\alpha)}\cdot\frac{1+\cos\Pi(\beta)}{1-\cos\Pi(\beta)}=\frac{1+\sin\Pi(a)}{1-\sin\Pi(a)}\cdot\frac{1+\sin\Pi(b)}{1-\sin\Pi(b)}=$$

$$=\frac{\cos A+\sin B}{\cos A-\sin B}\cdot\frac{\cos B+\sin A}{\cos B-\sin A}=$$

$$=\frac{\cos A+\cos\left(\frac{\pi}{2}-B\right)}{\cos A-\cos\left(\frac{\pi}{2}-B\right)}\cdot\frac{\cos B+\cos\left(\frac{\pi}{2}-A\right)}{\cos B-\cos\left(\frac{\pi}{2}-A\right)}=$$

$$=\frac{\cos\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+A-B\right)\cos\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-A-B\right)}{\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+A-B\right)\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-A-B\right)}\times$$

$$\times \frac{\cos\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+B-A\right)\cos\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-A-B\right)}{\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+B-A\right)\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-A-B\right)} =$$

$$= \operatorname{ctg}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+A-B\right)\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+B-A\right)\operatorname{ctg}^2\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-A-B\right) =$$

$$= \operatorname{ctg}^2\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-A-B\right).$$

Таким образом,

$$\Pi(\alpha+\beta) = \frac{\pi}{2} - A - B = s,$$

т. е. угол $\Pi(\alpha+\beta)$ равен дефекту рассматриваемого прямоугольного треугольника.

Если мы теперь определим γ из уравнения

$$\Pi(\alpha+\gamma) = \frac{n}{m}s,$$

а c — из уравнения

$$\Pi(c) + \Pi(\gamma) = \frac{\pi}{2},$$

то найдем, аналогично, что дефект треугольника с катетами a и c равен $\Pi(\alpha+\gamma)$, т. е. равен $\frac{n}{m}s$. Полагая последовательно $n = 1, 2, \ldots, m$ найдем такие отрезки $c_1, c_2, \ldots, c_m = b$, что дефект треугольника с катетами a, c_n равен $\frac{n}{m}s$. Отложим на $CB = b$ отрезки $CC_1, CC_2, \ldots, CC_m$, равные соответственно $c_1, c_2, \ldots, c_m$. Тогда мы получим треугольники ACC_1, $AC_1C_2, \ldots, AC_{m-1}B$, дефект каждого из которых равен $\frac{1}{n}s$*. Следовательно, все эти треугольники равновелики. Если мы обозначим площадь каждого из них через σ, то площадь треугольника ABC (составляющегося из m элементарных треугольников) равна $m\sigma$, а площадь треугольника ACC_n (имеющего дефект $\frac{n}{m}s$ и составленного из n элемен-

---

* Это рассуждение, принадлежащее Лобачевскому, позволяет получить в явном виде те точки $C_1, C_2, \ldots, C_{m-1}$, которые разбивают треугольник ABC на m треугольников ACC_1, $AC_1C_2, \ldots, AC_{m-1}B$ равного дефекта. Однако *существование* таких точек можно гораздо проще доказать, пользуясь непрерывностью дефекта.

тарных треугольников) равна $n\sigma$*. Таким образом, если имеются два прямоугольных треугольника ABC и ACC_n, имеющие общий катет AC и соизмеримые дефекты s и $\frac{n}{m}s$, то отношение их площадей равно $m\sigma : n\sigma$, т. е. равно отношению s: $(\frac{n}{m}s)$ их дефектов. Это же верно и в случае произвольных дефектов (не обязательно соизмеримых), что доказывается обычным предельным переходом с использованием положения 3-го на стр. 415. Таким образом, если два прямоугольных треугольника имеют общий катет, то отношение их площадей равно отношению дефектов. Наконец, это же имеет место и для двух произвольных прямоугольных треугольников (не обязательно имеющих общий катет). Действительно, если Δ_1 — треугольник с катетами a, b, а Δ_2 — треугольник с катетами c, d, то рассмотрим еще треугольник Δ_3 с катетами b, c. Обозначим дефекты и площади треугольников Δ_1, Δ_2, Δ_3 соответственно через s_1, s_2, s_3 и S_1, S_2, S_3. Тогда имеем

$$\frac{s_1}{s_3} = \frac{S_1}{S_3}; \quad \frac{s_2}{s_3} = \frac{S_2}{S_3},$$

ибо треугольник Δ_3 имеет с каждым из треугольников Δ_1, Δ_2 общий катет. Отсюда получаем

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{S_1}{S_2},$$

т. е. отношение площадей двух прямоугольных треугольников равно отношению их дефектов. Это же верно и для произвольных (а не только прямоугольных) треугольников (см. сноску△ на стр. 419).

---

* Здесь используется предположение об *аддитивности* площади, не включенное Лобачевским в число основных положений (см. примечание [[96]]).

П. С. АЛЕКСАНДРОВ

НИКОЛАЙ ИВАНОВИЧ ЛОБАЧЕВСКИЙ

КРАТКИЙ ОЧЕРК ЕГО ЖИЗНИ И ДЕЯТЕЛЬНОСТИ *

Глава I

23 (11) февраля 1826 г. произошло одно из значительнейших событий в истории математики: на заседании Физико-математического факультета Казанского университета профессор этого университета — Николай Иванович Лобачевский сделал доклад, содержащий основные положения созданной им неэвклидовой геометрии. Этим закончился двухтысячелетний период в истории геометрии, в течение которого геометры не жалели усилий на доказательство так называемого пятого постулата или «аксиомы параллельных» Эвклида, т. е. аксиомы, утверждающей, что к данной прямой через данную лежащую вне ее точку можно провести лишь одну параллельную прямую.

I

Со времен «Начал» Эвклида (около 300 лет до н. э.) геометрия считалась образцом аксиоматически построенной математической науки. Это значит, что предложения, составляющие содержание геометрии, выводятся путем чисто логической дедукции из небольшого числа определений и принимаемых

---

* В основу этого очерка легла речь, произнесенная мною в сентябре 1943 г. на Общем собрании Академии наук СССР по поводу 150-летия со дня рождения Лобачевского. Речь эта была напечатана в Вестнике Академии наук и затем в сильно расширенном и переработанном виде вошла в сборник «Н. И. Лобачевский», изданный Гостехиздатом в том же 1943 г.

без доказательств основных утверждений, называемых аксиомами.

Первая система аксиом геометрии была дана самим Эвклидом в уже упомянутых его «Началах», ему же принадлежит и дедуктивное построение «элементарной геометрии», в основных чертах сохранившееся и до сих пор. Надо сказать, что система аксиом, данная Эвклидом, современным логическим требованиям не удовлетворяет: вполне исчерпывающим образом аксиоматика элементарной геометрии построена лишь недавно на рубеже прошлого и текущего столетий, т. е. немногим больше полувека. Одну из таких систем аксиом геометрии читатель найдет в статье Б. Н. Делоне, приложенной к настоящему изданию.

Однако в настоящую минуту нас интересуют не те или иные несовершенства в системе аксиом Эвклида — несовершенства, как сказано, устранимые и устраненные,— а то особое место, которое в этой системе занимает упомянутая выше аксиома параллельных. Дело в том — и это обстоятельство является фактом истории науки,— что аксиома параллельных была единственной из аксиом Эвклида, вызвавшей потребность доказательства, т. е. логического вывода из остальных аксиом. Она не обладала, следовательно, той непосредственной очевидностью, которой обладали, по крайней мере для людей, занимавшихся математикой, эти «остальные аксиомы». Попытки доказать аксиому параллельных начались с эпохи первых же последователей Эвклида и более или менее непрерывно продолжались до тех пор, когда математики поняли, что Лобачевский созданием своей неэвклидовой геометрии убедительно и раз навсегда показал, что все такие попытки обречены на неудачу, что ни одна из них не только не приведет, но и не может привести к успеху. В настоящее время недоказуемость постулата Эвклида, т. е. невозможность логического его вывода из остальных эвклидовых аксиом, является строго доказанным математическим фактом, столь же достоверным, как любое предложение арифметики.

Лобачевский предположил, что основные элементы плоской геометрии — точки и прямые (в пространстве пришлось бы, кроме точек и прямых, взять еще плоскости) — удовлетворяют всем аксиомам геометрии, кроме одной — аксиомы параллельных. Отвергнув эту аксиому, т. е. предположив, что можно к данной прямой через данную точку провести по крайней мере две параллельных*, Лобачевский из этого предположения и совокупности остальных аксиом Эвклида вывел стройную цепь теорем, не содержащих никакого противоречия. Эта цепь теорем составляет некую своеобразную логически безупречную систему, некую «геометрию». Эта «геометрия» и называется геометрией Лобачевского.

II

Обычная элементарная геометрия состоит из теорем двух родов: теоремы первого рода — это теоремы, доказываемые без привлечения аксиомы параллельных, другими словами, это — теоремы, входящие как в геометрию Эвклида, так и в геометрию Лобачевского. Примерами таких теорем могут служить: внешний угол треугольника больше всякого внутреннего, не смежного с ним; против большей стороны в треугольнике лежит и больший угол; в равнобедренном треугольнике углы при основании равны; если три стороны одного треугольника равны трем сторонам другого, то треугольники равны; во всякий треугольник можно вписать круг и мн. др. Совокупность теорем первого рода (т. е. теорем, не зависящих от аксиомы параллельных) иногда называют «абсолютной геометрией».

Но в элементарной геометрии имеются и другие теоремы — это те, которые опираются на аксиому параллельных, т. е. не могут быть доказаны без ее привлечения. Они, таким образом, не являются следствиями остальных аксиом геометрии. Эти теоремы — назовем их теоремами «второго рода»— не имеют места в геометрии Лобачевского, им в геометрии Лобачевского

* Это утверждение называется аксиомой параллельных Лобачевского

естественно соответствуют предложения, не входящие в геометрию Эвклида и доказываемые лишь при помощи аксиомы Лобачевского. Например:

В геометрии Эвклида	В геометрии Лобачевского
Сумма трех углов треугольника постоянна и равна двум прямым углам	Сумма трех углов треугольника меняется от треугольника к треугольнику, но всегда меньше двух прямых.
Сумма углов всякого выпуклого четыреугольника равна четырем прямым	Сумма углов выпуклого четыреугольника меньше четырех прямых углов (так что, в частности, не существует прямоугольников).
Ко всякому треугольнику можно построить подобный, но не равный ему треугольник.	Если три угла одного треугольника соответственно равны трем углам другого, то треугольники равны (другими словами, подобие в геометрии Лобачевского совпадает с равенством).

Как видно из этих примеров (число их можно было бы умножить), геометрия Лобачевского сильно отличается от геометрии Эвклида. Однако логическая стройность и строгость геометрии Лобачевского такова же, как и геометрии Эвклида. Это привело Лобачевского к полному убеждению в том, что в этой новой геометрии не только нет, но и не может быть никакого противоречия. Это убеждение великого геометра получило свое окончательное подтверждение в конце прошлого века: одновременно Клейн и Пуанкаре доказали, что всякое противоречие в геометрии Лобачевского имело бы своим следствием и противоречие в геометрии Эвклида: обе геометрии равно совершенны с логической точки зрения. С доказатель-

ством непротиворечивости геометрии Лобачевского читатель в этом издании может ознакомиться по статье Б. Н. Делоне* Отсюда следует невозможность доказать пятый постулат Эвклида: если бы эвклидова аксиома параллельных могла быть выведена из остальных аксиом геометрии, то, заменяя эту аксиому противоположным ей допущением, т. е. аксиомой Лобачевского, мы неминуемо должны были бы прийти к противоречию, тогда как в действительности в геометрии Лобачевского противоречия нет.

III

Итак, наряду с эвклидовой геометрией существует еще одна, математически столь же безупречная, но совершенно отличная от нее геометрия, а именно — геометрия Лобачевского. Естественно возникает вопрос — и Лобачевский ставит его со всею определенностью и свойственной ему силой: *какая же из двух геометрий фактически осуществляется в физическом мире?* Ставя этот вопрос, Лобачевский ясно понимает, что он относится к физике, а не к математике: ведь как математические теории обе геометрии безупречны, ни в одной из них никакой математической ошибки нет, следовательно, вопрос о том, какая из них осуществляется в окружающем нас физическом пространстве, может быть решен лишь экспериментом. Такие эксперименты пытался ставить Лобачевский; пытался ставить их и Гаусс (который также пришел к основным положениям неэвклидовой геометрии, см. об этом ниже). В настоящее время мы считаем, что нельзя столь упрощенно ставить вопрос: основные геометрические понятия — точки, прямые и т. п. — конечно, взяты из опыта, но не непосредственно, а в результате длинного пути абстракции. Поэтому бессмысленно спрашивать, можно ли «на самом деле» через данную точку провести

* См. также мою книжку «Что такое неэвклидова геометрия», Изд-во Академии педагогических наук РСФСР, М., 1950.

к данной прямой одну или две параллельные прямые или, наконец, к данной прямой нельзя провести вообще ни одной параллельной*: ведь «на самом деле», т. е. в области непосредственных опытных данных, не обработанных математической абстракцией, вообще не существует точек и прямых в том идеализированном смысле, в каком их понимает геометрия, а существуют лишь конкретные предметы, более или менее напоминающие геометрические точки и геометрические прямые. Тем более бессмысленно спрашивать, пересекутся или нет две данные «физические» прямые (т. е., например, два данных световых луча), так как никогда и ни в каком физическом опыте эти «прямые» не даны в их бесконечной протяженности, а даны лишь бóльшие или меньшие их отрезки.

В силу этих соображений единственное, что мы можем утверждать, оставаясь на почве опыта, это, что эвклидова геометрия является достаточно адэкватной идеализацией тех пространственных соотношений, которые мы можем наблюдать в масштабах окружающего нас участка вселенной, не уклоняясь от этих масштабов слишком далеко ни в ту, ни в другую сторону, т. е., с одной стороны, не ставя вопрос о геометрии мира в целом, а с другой,—не погружаясь в пространственные соотношения микро-мира, скажем, атомного ядра. Геометрия «мировых областей средней величины» (например области, охватывающей нашу солнечную систему) есть, конечно, эвклидова геометрия в том смысле, что она с достаточной точностью описывает геометрические соотношения, которые мы наблюдаем в этих областях. Если же выйти за их пределы, то, как это и

* Есть и такая неэвклидова геометрия — эллиптическая геометрия или геометрия Римана, в которой вообще не существует параллельных прямых; правда, в этой геометрии, кроме аксиомы параллельных, отпадают и некоторые другие эвклидовы аксиомы: например, прямые в эллиптической геометрии суть замкнутые линии. Вообще, эллиптическая плоскость по общему своему (так называемому топологическому) устройству есть не что иное, как проективная плоскость. См. об этом уже цитированную мою книжку «Что такое неэвклидова геометрия?».

обнаруживается в современной физике, могут понадобиться геометрические системы, гораздо более сложные, гораздо более далекие от «употребительной» эвклидовой геометрии, чем неэвклидова геометрия Лобачевского. Таким образом, нельзя говорить об «единой» геометрии, раз навсегда охватывающей всё разнообразие пространственных соотношений, которые могут быть отвлечены нашим сознанием от окружающего нас материального мира: бессмертной заслугой Лобачевского является то, что он навсегда покончил с восприятием геометрии как единственно мыслимой логической системы*.

IV

Показав впервые, что эвклидово пространство не является единственным математически мыслимым пространством, Лобачевский тем самым поставил проблему геометрической аксиоматики, т. е. проблему исследования различных систем математических объектов, или, как теперь принято говорить, различных «абстрактных пространств», определяемых системами аксиом, в большей или меньшей степени связанными с системой аксиом обычной геометрии. Различные типы этих «пространств» составляют предмет различных «геометрий». Этих «геометрий», изучающих пространства, как теперь говорят, различных типов связности, и с другой стороны,— бесконечномерные (не только многомерные!) пространства, а также общие метрические, линейные, топологические пространства,— в настоящее время очень много. Вся совокупность возникающих таким образом «абстрактно-геометрических» дисциплин, включая многомерную дифференциальную геометрию, геометрию

* См. об этом, кроме статьи Б. Н. Делоне, помещенной в настоящем издании, также статью А. Н. Колмогорова «Лобачевский и математическое мышление 19-го века», помещенную в уже упомянутом сборнике «Н. И. Лобачевский», изданном Гостехиздатом в 1943 г. к 150-летию со дня рождения Лобачевского (в том же сборнике была впервые напечатана и моя статья «Что такое неэвклидова геометрия?»).

гильбертова бесконечномерного пространства и других функциональных пространств, так называемую абстрактную топологию и т. д., составляет значительную часть всей современной математики. Современное развитие теоретической физики (теория относительности, квантовая физика) было одним из самых сильных стимулов к построению, с одной стороны, многомерной дифференциальной геометрии (составляющей основной аппарат общей теории относительности), а с другой стороны,—геометрии бесконечномерных функциональных пространств.

Всё это поистине грандиозное движение творческой математической мысли имеет одним из основных своих истоков созданную Лобачевским неэвклидову геометрию. Аксиоматический метод в математике, одним из творцов которого был Лобачевский, занимает в современной математике одно из основных и первенствующих мест. Он дает возможность безграничного расширения тех средств и возможностей, которые математическое естествознание применяет в качестве рычагов, исторгающих у природы ее тайны. Из всего этого видно, что в ряду ученых, которым не только математика, но и все точное естествознание обязаны своим прогрессом в новейшее время, Лобачевскому принадлежит одно из самых первых мест.

V

Как ученый Лобачевский в полном смысле слова был революционером в науке, и английский геометр Клиффорд был совершенно прав, называя Лобачевского Коперником геометрии: подобно тому, как Коперник разрушил вековечный догмат о неподвижности Земли, так и Лобачевский разрушил заблуждение о неподвижной, раз навсегда данной, единственно мыслимой геометрии, заблуждение, на котором всецело покоилось кантовское учение о пространстве, бесповоротно рухнувшее вместе с открытием неэвклидовой геометрии. Идеи Лобачевского настолько опередили свое время, что они не только не были

признаны во всей их значительности, но просто не были даже поняты современниками. А среди этих современников были такие выдающиеся математики, как, например, В. Я. Буняковский и М. В. Остроградский — даже их математического кругозора и таланта было недостаточно, чтобы понять то, что сделал Лобачевский! Не будем слишком строги к ним: в эпоху Лобачевского еще не создан был тот математический аппарат и тот стиль математической мысли, который позволил бы придать утверждению о математическом равноправии неэвклидовой геометрии и эвклидовой тот для всех математиков обязательный смысл, который это утверждение имеет в настоящее время. Поэтому при своей жизни Лобачевский попал в тяжелое положение «непризнанного ученого». Он не только с поразительным достоинством, но и с настоящим человеческим героизмом нес все тяготы, а порой насмешки и унижения, с которыми это положение было связано. Известным выходом из него была та разносторонняя, кипучая деятельность, которую почти до конца своей жизни развивал Лобачевский в Казанском университете — в качестве профессора, а в течение ряда лет и ректора этого университета.

В аналогичное положение непризнанности попал и великий венгерский математик Бóяи, независимо от Лобачевского и приблизительно в то же время также пришедший к построению неэвклидовой геометрии (правда, в несколько менее развернутом виде). Судьба Бóяи была еще более трагической: он был настолько подавлен непризнанием своих идей, что в конце концов оказался совершенно сломленным человеком, рано замкнувшимся в себя и отошедшим от всякой деятельности.

Из современников Лобачевского и Бóяи только Гаусс до конца понимал все созданное ими: Гаусс сам владел основными идеями неэвклидовой геометрии. Но, владея ими, он никогда не имел мужества публично заявить об этом: все его высказывания по вопросам неэвклидовой геометрии были сделаны лишь в его частной переписке. Надо отдать Гауссу справедливость:

он не только весьма активно содействовал опубликованию некоторых основных работ Лобачевского, но и никогда не выступал ни с какими заявлениями о своих правах на участие в открытии неэвклидовой геометрии, справедливо полагая, повидимому, что такие права даются лишь тем, кто открыто заявляет о своих идеях, а не хранит их «под спудом». Во всяком случае, Гаусс понял и вполне оценил Лобачевского. Гауссу же принадлежит и инициатива в единственной научной почести, выпавшей на долю Лобачевского: по представлению Гаусса Лобачевский был избран в 1842 г. членом-корреспондентом Геттингенской академии наук.

VI

Право на бессмертие в истории науки Лобачевский, несомненно, завоевал своими геометрическими работами; однако не следует все же забывать, что и в других областях математики он не только стоял на уровне современных ему знаний, но и опубликовал ряд работ (по математическому анализу, алгебре, теории вероятностей, а также по механике, физике и астрономии). Что касается этих негеометрических работ, то по поводу их необходимо отметить два обстоятельства. Во-первых, Лобачевский сформулировал в одной из них, уже в 1834 г., общее понятие функции, обычно связываемое с именем Дирихле.

В самом деле, Лобачевский в упомянутой работе пишет: «... Это общее понятие требует, чтобы функцией от x называть число, которое дается для каждого x и вместе с x постепенно изменяется. Значение функции может быть дано или аналитическим выражением, или условием, которое подает средства испытывать все числа и выбирать одно из них, или, наконец, зависимость может существовать и оставаться неизвестной. ...Обширный вид теории допускает существование зависимости только в том смысле, чтобы числа, одно с другим в связи, понимать как бы вместе. Лагранж в своем вычислении функций,

которым хотел заменить дифференциальное, столько же, следовательно, повредил обширности понятия, сколько хотел выиграть в строгости суждения».

Во-вторых, Лобачевский с полной отчетливостью понимал разницу между функцией непрерывной (в его терминологии «постепенной») и дифференцируемой (в его терминологии «непрерывной»). В статье «Способ уверяться в исчезании бесконечных строк и приближаться к значению функций от весьма больших чисел» (Ученые записки Казанского университета, 1835 г.) по этому поводу написано: «... обращать должно внимание на постепенность и непрерывность. В сочинении моем «Об исчезании тригонометрических строк» я доказывал необходимость этого различия, называя функцию $f(x)$ постепенною, когда приращения в ней уменьшаются до нуля вместе с приращениями переменного x; непрерывною,— когда содержание (т. е. в нашей терминологии отношение.— *П. А.*) двух этих приращений с их уменьшением переходит нечувствительно в новую функцию, которая будет, следовательно, дифференциальным множителем».

Таким образом, Лобачевский обладал остротой понимания основных понятий анализа, превосходившей современный ему уровень в этой области.

Глава II

I

Точная дата рождения Н. И. Лобачевского окончательно установлена в самое последнее время. До недавнего времени общепризнанным днем его рождения считался день 22 октября (по старому стилю) 1793 г. За последние примерно полтора десятилетия были обнаружены данные, говорящие о том, что Н. И. Лобачевский родился 20 ноября 1792 г. Полную убедительность эти данные, однако, получили только в самые последние годы. Что касается места рождения, то вполне достоверно установлено теперь, что он родился в городе Нижнем-Новгороде (ныне — г. Горький).

Отец Н. И. Лобачевского — Иван Максимович Лобачевский — был мелким чиновником—регистратором межевой конторы. Семья жила в бедности. О детских годах Н. И. Лобачевского известно очень мало. Последнее, что сейчас известно об отце Лобачевского, — это увольнение его от службы («за болезнями») в 1800 году. Все заботы о содержании и воспитании детей легли на мать— Прасковью Александровну Лобачевскую; энергии ее приходится удивляться: без денег и без связей она добилась того, что все три ее сына — Александр, Николай и Алексей — были приняты в 1802 г. в Казанскую гимназию.

Старший брат, Александр, родился в 1791 г. и, окончив гимназию в 1805 г., в том же году был принят в университет, но через два года (19 июля 1807 г.) утонул, купаясь в реке Казанке.

Младший брат, Алексей, родился в 1795 г. и дожил до старости (умер в 1870 г.); учился, как и оба его брата, в Казанском университете, по окончании которого сделался научным работником (был адъюнктом по кафедре технической химии).

Николай Лобачевский, поступив вместе со своими братьями в гимназию в 1802 г., в июле 1806 г. был, среди других учеников, подвергнут испытанию, но в университет вместе с некоторыми другими принят не был — «дабы могли себя больше усовершенствовать, и особенно в латинском»; к слушанию университетских лекций он был допущен лишь 9 января 1807 г., а в число студентов был принят 14 февраля того же 1807 г.

Казанский университет был открыт в 1805 г., выражаясь современным языком, «на базе» Казанской гимназии — большинство лекций читалось в первое время учителями гимназии и даже начальство было общее: директор гимназии Яковкин (1764—1836 гг.) стоял и во главе университета. Уровень преподавания был невысок. Положение изменилось с приездом группы иностранных профессоров — математика Бартельса (1808 г.),

физика Броннера и астронома Литтрова; последние два приехали в Казань в 1810 г. Это были люди, стоявшие на уровне передовых научных идей своего времени; в частности, Бартельс был другом знаменитого Гаусса. Преподавание точных наук в Казанском университете было поднято ими на большую высоту. Однако первым учителем Лобачевского по математике был не Бартельс, а Григорий Иванович Карташевский (1779—1840 гг.); у него Лобачевский учился математике в гимназии, и под его влиянием и развились математические способности будущего великого геометра. Сам Карташевский был, несомненно, человеком, значительно возвышавшимся над средним уровнем тогдашних гимназических преподавателей; бывши в в течение недолгого времени адъюнктом по кафедре высшей математики в университете, он преподавал «увлекательно и блистательно», с полным знанием своего дела. Достаточное математическое образование Карташевского дополнялось широкой общей культурой (в частности, и в области гуманитарных наук), поэтому как воспитатель юношества он представлял собою выдающееся явление; воспитав же такого ученика, как Лобачевский, Карташевский навсегда заслужил себе право на благодарную память дальнейших поколений. Бартельс, к которому преподавание математики в Казанском университете перешло из рук Карташевского, по достоинству оценил своего предшественника.

Серьезное увлечение студента Лобачевского математикой началось не сразу — имеются сведения, что он вначале готовил себя к занятиям медициною; его выдающиеся способности проявились скоро — уже весною 1809 г. он был выбран в так называемые «камерные студенты» — так назывались студенты отличных успехов, избиравшиеся своими же товарищами для наблюдения за занятиями и поведением всех вообще студентов. Однако уже первый, вообще очень лестный отзыв, который университетский инспектор дал Лобачевскому при утверждении его в звании «камерного студента», дает почувствовать живой, экспансивный и шаловливый характер молодого студента,

в сущности еще мальчика (не забудем, что Лобачевскому весною 1809 г. не было еще и 17 лет!). Этой живости своего характера Лобачевский-студент обязан многими бедами, систематически обрушивавшимися на его голову. Так, в августе 1808 г. он был посажен в карцер за пускание ракеты в 11 час. вечера; в рапорте субинспектора студентов Кондырева от 27 мая 1809 г. читаем: «...в генваре месяце Лобачевский оказался самого худого поведения: Несмотря на приказание начальства не отлучаться из университета, он в новый год, а потом еще раз ходил в маскарад, и многократно в гости, за что опять наказан написанием имени на черной доске и выставлением оной в студентских комнатах».

Однажды пришла ему в голову своеобразная фантазия кататься в центре Казани, в городском саду, известном под названием «Черное озеро»*, верхом на корове, управляя нетренированным в этом спорте четвероногим с помощью его же собственных рогов; совершая эту своеобразную прогулку, Лобачевский имел неосторожность попасться на глаза ректору университета...

Однако не только такие мальчишеские шалости ставились в вину (повидимому, с вполне достаточными основаниями!) юноше-Лобачевскому. Рапорт того же Кондырева отмечает в июле 1811 г. «мечтательное о себе самомнение, упорство, неповиновение, грубости, нарушения порядка и отчасти возмутительные поступки..., оказывая которые в значительной степени явил признаки безбожия». Но в то же время блестящие способности Лобачевского ни в ком не вызывают сомнения: попечитель учебного округа академик Румовский (1734—1812 гг.), крупный для своего времени русский астроном, ученик Ломоносова и Эйлера, пишет ректору университета: «А студенту Лобачевскому, занимающему первое место по худому

---

* Во времена Лобачевского и еще много позже там действительно было озеро, впоследствии засыпанное.

поведению, объявить о том, что он отличные свои способности помрачает несоответствующим поведением...».

В июле 1811 г. по постановлению Совета университета Лобачевский, очевидно за худое поведение, не удостаивается звания кандидата, но уже на следующем заседании Совета возводится прямо в степень магистра (утвержден был в этой степени 3 августа 1811 г.). В инспекторской книге читаем по этому поводу:

«В сие же собрание совета призываем был студент Н. Лобачевский; получив выговор, увещеваясь к исправлению и признаваясь в весьма многих своих поступках, дал обещание и честное слово, с подпиской в сей книге, исправиться и не доводить до начальства впредь жалоб на его дурное поведение, в надежде чего и представлен в магистры». Такое постановление Совета могло иметь место только в силу того, что блестящие способности и блестящие научные успехи Лобачевского в это время сделались уже общим достоянием, и не считаться с ними дальше, несмотря на все его юношеские проказы, стало невозможно.

Это подтверждается и тем, что в сентябре того же 1811 г. министр народного просвещения выражает Николаю и Алексею Лобачевским, а также их товарищам, Кайсарову и Линдгрену, благодарность за особые успехи, засвидетельствованные профессором Бартельсом. К этому времени Лобачевский уже математик — в июне 1810 г. (когда Лобачевскому еще нет полных 18 лет!) Литтров начинает заниматься с ним, а также с Симоновым (родился в 1785 г.) и Линдгреном, астрономией «для предварительного приготовления их к деланию наблюдений», а в октябре 1811 г. Бартельс уже занимается с Лобачевским у себя на дому математикой по четыре часа в неделю, проходя с ним недавно вышедшие «Арифметику» Гаусса и первый том «Небесной механики» Лапласа — великие произведения математической мысли, с самого своего появления ставшие классическими. Одновременно Бартельс пишет восторженное письмо о Лобачевском попечителю Румовскому, что и вызвало

упомянутую нами официальную благодарность со стороны министра*. Наконец, в это же время Бартельс привлекает Лобачевского к педагогической работе со студентами на правах его, так сказать, приватного ассистента: «... сверх того, г. Лобачевский будет объяснять слушателям его, господина профессора, чего они недоразумевают»...

Итак, юношеская карьера Лобачевского развивалась, я бы сказал, парадоксально: только несколько месяцев отделяют выговоры, карцеры, записи в «шнуровую книгу» и вывешивание имени Лобачевского на черной доске от благодарности министра и занятий со студентами в том самом университете, в котором он только что занимал «первое место по худому поведению»!

За частной ассистентурой у Бартельса не замедлило последовать и начало официальной педагогической деятельности Лобачевского: оно относится к 1812 г. и скромно выразилось в курсах арифметики и геометрии для готовящихся к экзамену «на чин»◊.

* Из письма Бартельса Румовскому: «Лекции свои я располагаю так, что студенты мои в одно и то же время бывают слушателями и преподавателями. По сему правилу поручил я старшему Лобачевскому (т. е. Николаю.— *П. А.*) предложить под моим руководством пространную и трудную задачу о вращении, которая мною для себя уже была (по Лагранжу) в удобопонятном виде обработана. В то же время Симонову приказано было записывать течение преподавания, которое я в четыре приема кончил, дабы сообщить его прочим слушателям. Но Лобачевский, не пользовавшись сею запискою, при окончании последней лекции подал мне решение сей, столь запутанной задачи на нескольких листочках, в четверку написанное. Г. академик Вишневский, бывший тогда здесь, неожиданно восхищен был сим небольшим опытом знаний наших студентов».

Из этого письма Бартельса, между прочим, видно, что Лобачевский и в студенческие годы отлично владел тем, что мы называем «технической стороной» математического анализа — обстоятельство не очевидное, если иметь в виду основные серьезные творческие устремления Лобачевского, как по преимуществу отвлеченного, аксиоматически мыслящего математика.

◊ Не сдав этот экзамен или не получив эквивалентного школьного образования, мелкий чиновник не мог подняться выше самых первых ступенек чиновной лестницы.

26 марта 1814 г. Лобачевский (одновременно с Симоновым) произведен в адъюнкты чистой математики; 1814—1815 учебный год является первым годом университетского преподавания Лобачевского: он читает в университете курс теории чисел по Гауссу и Лежандру. (Теорию чисел «по Гауссу» читает Лобачевский и в 1815—1816 учебном году). 7-го июля 1816 г. Лобачевский (снова в один и тот же день с Симоновым) был утвержден в звании экстраординарного профессора Казанского университета.

В 1816 — 1817 учебном году он читает в университете курс элементарной алгебры, геометрии и тригонометрии (плоской и сферической) — «по собственным тетрадям», т. е. не опираясь ни на какой определенный литературный источник, а в 1817 — 1818 г. читает курс дифференциального и интегрального исчисления по Монжу и Лакруа. Лекции по геометрии, читавшиеся Лобачевским в 1816—1817 учебном году, представляют для нас особый интерес, так как на этих лекциях он, повидимому, впервые вплотную подошел к тому вопросу, решение которого составило славу всей его жизни,— к вопросу об аксиоме параллельных. Правда, это первое прикосновение к основному предмету всей его творческой деятельности было еще вполне традиционным — Лобачевский, так же как и многочисленные его предшественники в области неэвклидовой геометрии, начал с попыток доказательства знаменитой аксиомы Эвклида. Теперь, благодаря дальнейшим работам Лобачевского, мы знаем, что попытки эти не могли привести к удовлетворительному результату. Но такое начало было, конечно, не только естественным, но и единственно возможным как с исторической, так и с психологической точки зрения. Во всяком случае надо считать, что именно в эту пору, когда Лобачевскому было около 23 лет, возникли первые его геометрические идеи, приведшие его через несколько лет к открытию неэвклидовой геометрии.

Юность Лобачевского кончалась. Начался период полного раскрытия богатой и многообразной личности на всех путях

ее взаимодействия с окружавшим ее миром; началось научное творчество, исключительное по своей отвлеченной математической силе; началась и быстро развивалась изумительно многосторонняя, исполненная непреклонной энергии и страстного увлечения работа профессора — вскоре во всех отношениях первого профессора — Казанского университета, началось горячее участие во всех сторонах работы, организации и строительства университета, перешедшее затем в двадцатилетнее полное и единоличное руководство всею университетской жизнью, словом, начался период разносторонней и в то же время концентрированной активности зрелого Лобачевского. Но, переходя к этому периоду, естественно наиболее богатому и исполненному содержания, трудно оторваться, не оглянувшись еще раз, от обаятельного образа Лобачевского-юноши, с его искрящейся жизнерадостностью, увлекающейся экспансивностью и в то же время сосредоточенной, упорной и уверенной работоспособностью, с господством над всей его юношеской индивидуальностью той серьезной и неотвратимой устремленности к знанию и мышлению, из которой и рождается, наконец, подлинное большое творчество, постепенно заполняющее человека и овладевающее первым планом всех его сознательных жизненных интересов...

II

Как уже сказано, Лобачевский с 1816 г.— профессор Казанского университета; через два года начинается и его административно-организационная деятельность, различные формы которой сопутствуют ему далее в течение трех десятилетий его жизни: в августе 1818 г. Лобачевский назначается членом училищного комитета. В эти годы над Казанским университетом, да и над всем вообще российским просвещением собирались темные тучи: реакционные устремления последнего десятилетия царствования Александра I с каждым годом усиливались, делались всё более давящими. Наступавшая эпоха известна

в истории русской культуры под названием «эпохи Магницкого», по имени известного своим мракобесием попечителя Казанского учебного округа. Казань делается, таким образом, центром и рассадником самой мрачной реакции, захватывающей все области культурной жизни. Магницкий приехал в Казань в феврале 1819 г. в качестве ревизора с правами попечителя округа (его предшественник на посту попечителя, граф М. А. Салтыков, сменил в 1812 г. умершего Румовского, а сам был уволен в августе 1818 г.). Вскоре после своего приезда, в апреле 1819 г., Магницкий уже предлагает в министерстве весьма решительную меру «переустройства» Казанского университета, которая заключалась в том, чтобы университет закрыть, а здание его разрушить. Однако, несмотря на всю реакционность правительства Александра I, эта «мера» показалась слишком сильной и не была утверждена в Петербурге. Тем не менее, Магницкий приступил — в июне 1819 г.— к исполнению обязанностей попечителя округа и оставался в этой должности семь с лишним лет. Обстоятельства и характер этого «попечительства» о российском просвещении слишком хорошо известны читателю, чтобы нужно было далее останавливаться здесь на этом. Тем большие трудности выпали на долю Лобачевского, который именно в эту мрачную пору должен был делать свои первые шаги на поприще организационной университетской деятельности. Между тем, как мы сейчас увидим, работа его на этом поприще быстрыми шагами шла вперед: в декабре 1819 г. Лобачевский вместе с профессором Вердерамо получает поручение по приведению в порядок университетской библиотеки, находившейся в крайне запущенном состоянии.

Через месяц, в январе 1820 г., с уходом Вердерамо из университета вся работа по приведению в порядок библиотеки целиком ложится на плечи Лобачевского. Как и ко всякой взятой на себя работе, Лобачевский отнесся к своим тяжелым и утомительным библиотечным обязанностям с самоотверженной добросовестностью, тратя на их исполнение массу времени и сил. Тем не менее, обстановка была такова, что в июне 1821 г. он,

«обманутый надеждой привести библиотеку в новый порядок», просит об освобождении его от работы в библиотеке.

В конце же 1819 г. на Лобачевского ложатся еще более ответственные обязанности: 19 ноября он избирается деканом физико-математического факультета. Однако и эта его деятельность оканчивается летом 1821 г., приблизительно одновременно с библиотечной деятельностью.

Профессорская деятельность Лобачевского в эти годы получила существенно новое содержание: ему поручаются кафедры физики и астрономии (профессор астрономии Симонов в 1819—1820 гг. участвовал в кругосветной экспедиции Беллингсгаузена и Лазарева, в которой производил геофизические и метеорологические наблюдения). В связи с этим Лобачевский два учебных года, 1819—1820 и 1820—1821, математического преподавания не ведет, отдавая себя всецело преподаванию физики и астрономии.

Между прочим, Лобачевский и в дальнейшем не отказывается от преподавания физики и механики и никогда не теряет интереса к физике как науке, продолжая деятельно интересоваться также и астрономией, и метеорологией. Преподавание математики было возобновлено Лобачевским в 1821—1822 учебном году. При этом надо иметь в виду, что после перехода Бартельса на профессуру в Юрьев (Дерпт, Тарту)— с осени 1820 г.— Лобачевский оказывается единственным серьезным математиком в Казани.

25 февраля 1822 г. Лобачевский (одновременно с Симоновым) избирается ординарным профессором, а весною следующего, 1823 г. на него вторично падают обязанности декана.

Однако еще годом раньше — весною 1822 г.— Лобачевский оказывается перед лицом новых, сложных и утомительных обязанностей, не имеющих никакого отношения к его научной деятельности: образуется строительный комитет по постройке новых и приведению в порядок старых университетских зданий, под председательством ректора Никольского с двумя членами, одним из которых был Лобачевский.

Как всегда, Лобачевский отнесся к своим новым обязанностям не только с добросовестностью и серьезностью, но и с огромным увлечением. Через три года, в 1825 г., Лобачевский — уже председатель строительного комитета. Комитет под председательством Лобачевского существует, меняя состав своих других членов, многие годы. Фактически Лобачевский становится основным строителем всей совокупности зданий, составляющих Казанский университет. Специально изучив как инженерную технику строительного дела, так и собственно архитектуру, Лобачевский в значительной мере делается руководителем строительных работ и в техническом, и в художественном отношении. Многие наиболее удачные в архитектурном отношении здания на территории Казанского университета являются осуществлением строительных замыслов Лобачевского. Таковы — анатомический театр, библиотека, астрономическая обсерватория. В своей деятельности на этом новом поприще Лобачевский проявил как увлекающуюся страстность своей натуры, так и свою неподкупную честность, вследствие которой он органически не мог быть свидетелем воровства и должностных злоупотреблений со стороны различных хозяйственных и прочих «аппаратов», которых стены Казанского университета воистину достаточно насмотрелись за свое более чем столетнее существование. В результате Лобачевский нередко терял душевное равновесие и реагировал на злоупотребления различных хозяйственных «деятелей» с большой резкостью, доходившей до прямого приложения физической силы (например, в отношении подрядчика Груздева, имя которого таким образом оказалось сохраненным для потомства).

Чуть ли не каждый год приносил Лобачевскому то или иное увеличение объема его организационной деятельности: в 1823 г. Лобачевский вторично становится деканом физико-математического факультета; в 1825 г. он уступает эту должность Симонову, а сам становится университетским библиотекарем, поставив себе задачу, пусть очень большими трудами,

но все же положить конец тому состоянию совершенного хаоса, в котором находилась библиотека Казанского университета. Наконец, 30 июля 1827 г. Лобачевский избирается ректором университета. На этом посту он пребывает целые девятнадцать лет — до 14 августа 1846 г., когда, вопреки своему желанию и несмотря на энергичное ходатайство Совета университета, Лобачевский был грубо отстранен от руководства университетом.

Свои обязанности ректора Лобачевский понимал очень широко — от идейного руководства жизнью и работой университета в целом до личного вхождения в повседневные нужды университета. Не легко найти руководителя какого бы то ни было высшего учебного заведения, который так универсально понимал бы свои обязанности и оставил на всех сторонах жизни руководимого им учреждения такой нестираемый след, как тот, который оставил Лобачевский в жизни Казанского университета.

В качестве примеров энергии и активности, проявленных Лобачевским на благо университету, упомянем об его роли во время двух трагических событий, обрушившихся на население Казани в середине прошлого века. Первым из этих событий была холерная эпидемия 1830 г.; эпидемия эта (бывшая частью мировой холерной эпидемии 1829—1832 гг.) свирепствовала у нас в особенности на Поволжье и унесла многие тысячи жертв. Когда холера в своем распространении достигла Казани, Лобачевский сразу же принял в отношении университета героические меры: университет был фактически изолирован от всего остального города и превращен как бы в крепость. Было организовано проживание и питание студентов на самой университетской территории, все это при самом деятельном участии ректора Лобачевского.

Успех был очень велик — эпидемия прошла мимо университета, среди студентов и работников университета не было, или почти не было, случаев холерного заболевания. Энергичная и самоотверженная работа Лобачевского по борьбе

с холерой произвела на все тогдашнее общественное мнение столь большое впечатление, что и официальные инстанции сочли необходимым ее отметить: Лобачевскому было выражено «высочайшее благоволение»... «за усердие по предохранению университета и других учебных заведений от холеры».

Другим стихийным бедствием, разразившимся над Казанью в эпоху ректорства Лобачевского, был пожар 1842 г. Во время этого ужасного пожара, уничтожившего огромную часть города, Лобачевский вновь принял чрезвычайно энергичные меры к спасению от огня университетских построек и оборудования. В частности, благодаря его распорядительности были сохранены библиотека и астрономические инструменты.

Интересно отметить, что, даже будучи ректором, Лобачевский не считал возможным отказаться от обязанностей библиотекаря в течение целых восьми лет: лишь в 1835 г., когда работа библиотеки могла считаться уже налаженной, Лобачевский оставляет место библиотекаря.

Не только о библиотеке, но и о всех прочих учебновспомогательных учреждениях университета заботился Лобачевский и до, и во время своего ректорства: астрономические инструменты, организация стоящего на должной высоте физического кабинета, который не только служил бы основой университетского преподавания физики, но и давал бы возможность устраивать популярные лекции по физике с демонстрацией физических опытов (сам Лобачевский читал такие популярные лекции),— все это составляло предмет постоянного внимания и интереса ректора Казанского университета, Николая Ивановича Лобачевского.

Необходимо указать также на издательскую деятельность Лобачевского (с 1823 г. он — член издательского комитета). Лобачевский впервые поставил издательское дело в Казанском университете на должную высоту. Он создал, между прочим, «Ученые записки» Казанского университета, явившиеся на смену реакционному и малосодержательному «Казанскому вестнику», организованному Магницким, чтобы доказывать, что

«христианское благочестие есть основание истинно доброго воспитания»*.

Избрание Лобачевского на пост ректора университета было лишь несколькими месяцами отделено от смены попечителя учебного округа: 6 мая 1826 г. Магницкого отстранили от должности попечителя за денежные растраты, обнаруженные ревизией генерал-майора Желтухина; еще ранее, в феврале, по ходу ревизии генерала Желтухина, исполняющим обязанности попечителя округа был назначен Мусин-Пушкин, а 30 июля того же 1826 г. Лобачевский уже избирается ректором. Отстранение Магницкого от должности, да еще с такой скандальной мотивировкой, не могло не разрядить несколько атмосферу и в округе, и в университете, и это облегчило положение Лобачевского, тем более, что новый попечитель, Мусин-Пушкин, очень уважал Лобачевского и в высшей степени считался с ним. Таким образом, становятся понятными те возможности, которые получил Лобачевский для своей организационной деятельности. Становится понятным и то, что его заслуги на этом поприще доходили (по представлениям Мусина-Пушкина) до правительства и приносили Лобачевскому различные виды официального правительственного признания — чин действительного статского советника (1838 г.), «высочайшие благоволения» (т. е. благодарности), ордена и т. п. Важнее же всего, конечно, то, что с увольнением Магницкого и назначением Мусина-Пушкина Лобачевский получил довольно широкий простор в осуществлении своих замыслов по реорганизации университета и руководству им.

---

* Цитирую по книжке проф. А. В. Васильева «Николай Иванович Лобачевский» (отдельное издание одноименной статьи из «Русского библиографического словаря»). Этим сочинением проф. А. В. Васильева я вообще широко пользовался при составлении настоящего биографического очерка.

III

«Для них и солнцы, знать, не дышат,
И жизни нет в морских волнах.
Лучи к ним в душу не сходили,
Весна в груди их не цвела,
При них леса не говорили
И ночь в звездах нема была».

Тютчев

«...но вы, которых существование несправедливый случай обратил в тяжелый налог другим; вы, которых ум отупел и чувство заглохло, вы не наслаждались жизнию! Для вас мертва природа, чужды красоты поэзии, лишена прелести и великолепия архитектура, незанимательна история веков. Я утешаюсь мыслию, что из нашего Университета не выйдут подобные произведения растительной природы; даже не войдут сюда, если, к несчастью, родились с таким назначением. Не выйдут, повторяю, потому что здесь продолжается любовь славы, чувство чести и внутреннего достоинства».

Лобачевский

Приведенные слова Лобачевского взяты из его знаменитой речи «О важнейших предметах воспитания», произнесенной 5 июля 1828 г. и являющейся программной для всей деятельности Лобачевского как воспитателя юношества. Несомненно, что именно воспитателем юношества в первую очередь чувствовал себя Лобачевский в многообразии своих ректорских обязанностей. Все остальные стороны его организационной деятельности составляли только рамку для двух основных устремлений его жизни: творческой научной деятельности и деятельности воспитательной. Эта последняя воспринималась им с исключительной широтой и охватывала все стороны формирующейся личности молодого человека, начиная с физического развития и кончая специальным научным образованием. Проблемы воспитания интересовали его во всем их объеме и самым горячим образом. Еще с 1818 г. он состоял членом Училищного ко-

митета, ведавшего средними и низшими школами, и с тех пор не терял из виду, наряду с вопросами университетского образования, и всех сторон собственно школьного преподавания. В частности, постоянно председательствуя в комиссии по приемным экзаменам в университет, Лобачевский прекрасно знал, с какими знаниями школьник того времени приходил в высшее учебное заведение. Лобачевский интересовался и занимался всей линией развития человека—от детского до позднего юношеского возраста. Из приведенных выше слов его видно, как высоки были задачи, которые он ставил перед воспитанием, и как полнозвучен и содержателен был тот идеал человека, к достижению которого воспитательная деятельность, по его мнению, должна была стремиться. Речь Лобачевского «О важнейших предметах воспитания» является действительно замечательным памятником не только педагогической мысли, но, если позволительно так выразиться, и той воспитательной эмоции, которая необходимо должна сопровождать педагогическую деятельность, если считать, что ее задачи заключаются не только в том, чтобы научить молодого человека тем или иным знаниям, но и выпустить его в жизнь с определенными жизненными устремлениями и устоями. Этой «воспитательной эмоцией», соединенной с продуманным и отчетливо сформулированным общим мировоззрением, имевшим своим жизненным основанием и подлинные творческие озарения, с одной стороны, и огромную, дисциплинированную и прекрасно организованную ежедневную работу,— с другой, Лобачевский обладал, как, вероятно, никто из его современников, что и создавало неповторимый комплекс личных свойств, делавший из него педагога в самом высшем и волнующем смысле этого слова.

Сам Лобачевский обладал в полной мере разнообразием и широтой жизненных интересов, входивших в его идеал гармонически развитой человеческой личности. И он многого требовал от молодого человека, пришедшего в университет учиться: он прежде всего требовал от него, чтобы он был гражданином, который «высокими познаниями составляет честь и славу своего

отечества», т. е. ставил перед ним в полном и высшем смысле слова патриотический идеал, основанный на высоком уровне данной специальной квалификации человека (студент пришел в университет, чтобы получить именно эту квалификацию специалиста в той или иной интеллигентной профессии). Далее им подчеркивается, что «одно образование умственное не довершает еще воспитания», и ставятся те большие требования к интеллигентному человеку как полноценному носителю интеллектуальной, этической и эстетической культуры, которые с такой яркостью высказаны Лобачевским в словах, выбранных нами в качестве эпиграфа.

Заметим, между прочим, что Лобачевский уделял внимание и физическому развитию юношества, в частности, содействовал введению занятий гимнастикой в средней школе (имеются сведения, что Лобачевский и сам не был чужд забот о физической тренировке своего организма — ежедневно обливался холодной водой и т. п.).

В своих мыслях о воспитании Лобачевский интересовался не только общими проблемами. Его постоянно занимал ряд совершенно конкретных вопросов прежде всего университетского преподавания (ведь в своей воспитательной деятельности он в первую очередь оставался профессором и ректором университета!), а также школьной и внешкольной педагогической практики. Но, может быть, больше всего следует подчеркнуть то, что Лобачевский был не теоретиком воспитания и педагогики (или, вернее, был не только теоретиком), а был и на самом деле воспитателем, учителем молодежи. И, опять-таки, не только профессором, блестяще и тщательно читавшим свои лекции, но и человеком, знавшим прямую дорогу к сердцам молодежи, умевшим во всех случаях, когда это требовалось, находить те самые нужные слова, которые способны были действовать на сбившегося с пути студента, возвращать его к работе, дисциплинировать его. Авторитет Лобачевского в студенческой среде был чрезвычайно велик; студенты любили его, несмотря на то, что Лобачевский обладал неумолимой строгостью как

профессор (в частности, как экзаминатор) и горячностью, а иногда и резкостью в качестве ректора. Студенты чувствовали его большую и горячую любовь к молодежи и, конечно, понимали, что строгость и требовательность были по существу необходимыми аспектами этой большой и серьезной любви.

Необходимо, однако, отметить, что горячий и экспансивный характер Лобачевского, сохраненный им с юношеских лет, ни в какой мере не лишал его большого чувства такта, проявлявшегося в виде того, что мы называем педагогическим тактом — в отношении студентов, но имевшего еще гораздо более широкое поле применения в различных и сложных отношениях с профессорами, которые Лобачевскому как ректору университета постоянно нужно было иметь. Сохранилось много данных о большом искусстве, неизменно проявлявшемся Лобачевским при председательствовании Ученым советом университета, его умении устранять ненужные конфликты, сглаживать личную неприязнь и всевозможные трения в профессорской среде, словом, умело вести весь университетский корабль не только в его действительно значительных делах, но и по мелководью всех неизбежно возникавших личных и служебных отношений, окружавших и осложнявших эти большие дела.

Лобачевский может служить примером крупного человека — вероятно, самого крупного человека, выдвинутого нашей почти двухсотлетней университетской жизнью. И если бы он не написал ни одной строчки самостоятельных научных исследований, мы должны были бы вспомнить о нем как о значительнейшем нашем университетском деятеле, как о человеке, который высокому званию ректора университета дал такую полноту содержания, которой ему не придавал, повидимому, никто другой из лиц, носивших это звание до, во время или даже после Лобачевского.

IV

Внешними событиями жизнь Лобачевского богата не была. Он редко выезжал из Казани; всего несколько раз ему прихо-

дилось ездить в Петербург по делам службы (зимой 1836—1837 г. к такой поездке в Петербург присоединилась еще и поездка в Юрьев); ездил в 1840 г. в Гельсингфорс на юбилей тамошнего университета, участвовал в 1842 г. в экспедиции в Пензу для наблюдения полного солнечного затмения. Если отвлечься от таких немногочисленных поездок, а также от пребывания Лобачевского у себя в деревне («Беловолжская слободка» верстах в шестидесяти от Казани вверх по Волге), то можно сказать, что вся жизнь Лобачевского прошла в Казани. Женился он поздно, 16 октября 1832 г., на Варваре Алексеевне Моисеевой, принадлежавшей к очень состоятельной дворянской семье. В приданое его жена принесла ему значительные денежные средства и обширный дом на Большой Проломной (ныне Баумановской) улице. Дом этот сохранился и до наших дней, но не целиком. Дом был настолько велик, что, когда одно время Вторая казанская гимназия нуждалась в помещении, Лобачевский предоставил под гимназию свой дом (в период своего ректорства, т. е. значительную часть своей жизни, Лобачевский жил в казенной квартире при самом здании университета). В своем небольшом имении Лобачевский с увлечением занимался сельским хозяйством и садоводством (по утверждению проф. Васильева, кедровая роща, посаженная Лобачевским, сохранялась долгое время после его смерти). Как сельский хозяин Лобачевский отнюдь не отличался недостатком инициативы; так, например, пожалованный ему государем бриллиантовый перстень он продал и на вырученные деньги купил кровных мериносовых овец, за которых потом на сельскохозяйственной выставке получил награду.

При всем том, сельскохозяйственная деятельность Лобачевского не только не приумножила полученных им при женитьбе капиталов, но, повидимому, существенно способствовала их уменьшению. Во всяком случае к старости у Лобачевского не было никакого избыточного богатства, скорее даже наблюдалась некоторая стесненность в средствах.

Первый сын Лобачевского, Алексей, родился в 1833 г. Сохранились сведения, что он был очень похож на отца и наружностью, и характером; он был любимым сыном, и смерть его в 1852 г. была для Лобачевского тяжелым ударом, от которого он так и не смог вполне оправиться. Кроме старшего сына у Лобачевского было еще трое сыновей — Николай (родился в 1835 г.), Александр (родился в 1846 г.) и снова Алексей (родился в 1852 г.). О Николае Николаевиче Лобачевском известно, что на нем проявилась, между прочим, объективная, хоть и суровая строгость отца как профессора: экзаменуя своего сына по дифференциальному исчислению, Лобачевский поставил ему единицу, вопреки, впрочем, мнению остальных экзаминаторов, находивших эту оценку слишком строгой. Но, как бы то ни было, научных талантов отца Николай Николаевич Лобачевский не унаследовал; впоследствии он служил в кавалерии, а потом в интендантстве. Третий сын; Александр, также избрал военную службу и умер в чине полковника. Младший сын умер вскоре после смерти отца.

V

Если двадцатые и тридцатые годы были периодом высшего расцвета как творческой, так и научно-педагогической и организационной деятельности Лобачевского, то с середины сороковых годов, и притом совершенно внезапно, для Лобачевского наступил период бездействия и старческого догорания. Событием, принесшим с собой этот трагический перелом всей жизни Лобачевского, было увольнение его 14 августа 1846 г. от должности ректора*. Мы уже говорили о том, что это увольнение произошло вопреки желанию как самого Лобачевского, так и Совета университета. Одновременно произошло и увольнение Лобачевского от должности профессора по кафедре чистой математики. Этому последнему акту сам Лобачевский, быть может,

* Преемником Лобачевского на посту ректора был Симонов, который пробыл ректором до самой своей смерти в январе 1855 г.

дал некоторый повод, так как, исполняя с весны 1845 г. обязанности попечителя округа вместо переведенного в Петербург Мусина-Пушкина, он, препровождая в министерство постановление Совета университета об избрании его на новое пятилетие на кафедру математики, присовокупил, что «готов отказаться от должности в пользу достойного молодого человека, каков доктор математики Попов».

Надо полагать, что, делая такое представление, Лобачевский не сомневался в том, что пост ректора сохранится за ним. Вероятно, считал он, кроме того, несомненным, что будет назначен и попечителем учебного округа, так как почти полтора года управлял уже округом после Мусина-Пушкина. Естественно, что при таком обилии ответственных административных обязанностей Лобачевский считал возможным уступить руководство кафедрой математики. Однако одним министерским росчерком пера Лобачевский был уволен сразу от всех своих обязанностей по университету и назначен помощником попечителя округа. При этом место попечителя округа оставалось вакантным до мая 1847 г., когда на эту должность был назначен некто В. П. Молоствов, ничем не примечательный чиновник. Таким образом, увольнение Лобачевского имело все черты грубой служебной дисквалификации, граничившей с прямым оскорблением. Такова была официальная благодарность правительства императора Николая I не только величайшему русскому ученому девятнадцатого века, но и крупнейшему нашему университетскому деятелю.

Вполне понятно, что Лобачевский, для которого его деятельность на поприще университетского образования, да и вообще народного просвещения, была большой и незаменимой частью всей его жизни, воспринял свою отставку как тяжелый, непоправимый удар. В этот период его собственно научная работа в основном была уже закончена и, следовательно, университетская деятельность, естественно, становилась основным содержанием его жизни. Кроме того, исключительно деятельный характер Лобачевского и его привычка быть в организацион-

ных делах именно руководителем, а не рядовым участником (привычка, на которую Лобачевский воистину имел право!) усугубили размеры разразившейся над ним катастрофы. Лобачевский от этой катастрофы оправиться не смог. С весны 1847 г. (назначение Молоствова попечителем) он фактически совершенно отстранился от участия в делах как учебного округа, так и университета. Началась старость, но тем более гнетущая, с прогрессировавшими признаками парадоксально раннего одряхления. Его здоровье быстро шло на убыль. Он стал слепнуть и к концу своей жизни ослеп совершенно. Его последнее научное произведение — «Пангеометрия» — писалось уже под диктовку. Ко всему этому присоединилась еще смерть сына. Разбитый жизнью, больной, слепой, он умер 12 февраля 1856 г.

VI

Жизнь Лобачевского была мало похожа на жизнь «кабинетного ученого». Вся она была наполнена большим внутренним волнением, большим драматизмом. Постоянное, бескорыстное и — в тех условиях непонятости и непризнания, в которых он находился,— прямо героическое искание отвлеченной научной истины, с одной стороны, и горячая любовь к родной стране, к ее просвещению, к ее молодежи, с другой,— вот те две основные пружины, которые сообщали жизни Лобачевского все ее необыкновенное эмоциальное движение, ее полет, ее патетику. Характеристикой всего внутреннего облика Лобачевского могут служить его же слова, сказанные им в уже упомянутой «Речи о важнейших предметах воспитания»: «Жить — значит чувствовать, наслаждаться жизнию, чувствовать непрестанно новое, которое бы напоминало, что мы живем... Будем же дорожить жизнию, пока она не теряет своего достоинства. Пусть примеры в Истории, истинное понятие о чести, любовь к отечеству, пробужденная в юных летах, дадут заранее то благородное направление страстям и ту силу, которые дозволят нам торжествовать над ужасом смерти».

РАБОТЫ Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО

I. По неэвклидовой геометрии

1. «О началах геометрии», Казанский вестник, вып. 25—28 (1829—1830 гг.).

2. «Воображаемая геометрия», Ученые записки Казанского университета, **1**, 1835 г.,

3. «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных», Ученые записки Казанского университета, 1835—1838 гг.

4. «Применение воображаемой геометрии к некоторым интегралам», там же, 1836 г.

5. «Géométrie imaginaire», Journal für die reine und angewandte Mathematik, **17** (1837).

6. «Geometrische Untersuchungen», Берлин, 1840.

7 «Пангеометрия», Ученые записки Казанского университета за 1855 г.

II. По другим вопросам

1. «Геометрия», 1823 г. (издана в 1909 г. Казанским физико-математическим обществом).

2. «О резонансе» (реферат работы Уитстона), Казанский вестник, **24**, 1828 г.

3. «Речь о важнейших предметах воспитания», Казанский вестник, **35**, 1832 г.

4. «Алгебра или вычисление конечных», Казань, 1834 г.

5. «Понижение степени двучленного уравнения, когда показатель без единицы делится на 8», Ученые записки Казанского университета, **1**, 1834 г.

6. «Об исчезании тригонометрических строк», там же, **2**, 1834 г.

7. «Условные уравнения для движения и положения главных осей обращения в твердой системе», Ученые записки Московского университета, 8, 1835 г.

8. «Способ увериться в исчезании бесконечных строк и приближаться к значению функций от весьма больших чисел», Ученые записки Казанского университета, 2, 1835 г.

9. «Über die Convergenz der unendlichen Reihen», Казань, 1841 г.

10. «Sur la probabilité des résultats moyens, tirés des observations répétées», Journal für die reine und angewandte Mathematik, 28.

11. «Полное затмение солнца в Пензе 26 июня 1842 года», Ученые записки Казанского университета, **3**, 1842 г., и Журнал Мин. нар. просв., 1843 г., т. 39, отд. 2.

12. Подробный разбор рассуждения, представленного А. Ф. Поповым «Об интегрировании дифференциальных уравнений гидродинамики, приведенных к линейному виду» (Приложение к докторской диссертации А. Ф. Попова, Казань, 1845 г.).

13. «Значение некоторых неопределенных интегралов», Ученые записки Казанского университета 1852 г., 1, 2.

ОГЛАВЛЕНИЕ

От редакции 7

Геометрические исследования по теории параллельных линий . . 13

Новые начала Геометрии с полной теорией параллельных 73

Вступление 75
Глава I. Первые понятия в Геометрии 98
Глава II. Определение шара, сферы, круга, плоскости и прямой линии 112
Глава III. Измерение прямых линий, линейных и плоскостных углов 136
Глава IV. О линиях и плоскостях перпендикулярных 147
Глава V. Измерение телесных углов помощию плоскостных . . . 166
Глава VI. Одинаковость треугольников 198
Глава VII. Параллельные линии 214
Глава VIII. Линия, поверхность и треугольники предельные . . 242
Глава IX. Тригонометрические функции. 257
Глава X. Зависимость угла параллельности с его перпендикулом 270
Глава XI. Зависимость углов и боков треугольника. 287

Воображаемая Геометрия 313

Приложения 411

Приложение 1. Измерение площадей многоугольников в воображаемой геометрии (Отрывок из сочинений Н. И. Лобачевского «О началах Геометрии») 413

Приложение 2. Речь Н. И. Лобачевского «О важнейших предметах воспитания». 1828 г. 421

Приложение 3. Б. Н. Делоне. Доказательство непротиворечивости планиметрии Лобачевского 431

Примечания 467

П. С. Александров. Н. И. Лобачевский. Краткий очерк его жизни и деятельности 562

Николай Иванович Лобачевский. Избранные труды по геометрии

*

Утверждено к печати Институтом истории естествознания и техники Академии наук СССР

*

Редактор издательства *К. П. Гуров* Технический редактор *А. А. Киселева*

*

РИСО АН СССР № 3—105. В Сдано в набор 1/III 56 г. Подп. в печ. 5/Х-56 г.
Т-09441 Формат бум. 70×92 1/16. Печ. л. 37 1/4. Уч.-изд. лист. 29,3. Тираж 3500.
Изд. № 1643. Тип. зак. 245

Цена 22 р. 50 к.

Издательство Академии наук СССР, Москва, Подсосенский пер., д. 21

2-я типография Издательства АН СССР, Москва, Шубинский пер., д. 10

Н. И. ЛОБАЧЕВСКИЙ

ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ ПО ГЕОМЕТРИИ



22 р. 50 к.